Επαναληπτική εξέταση στην Πραγματική Ανάλυση
24/02/2015

Θέμα 1 (i) Έστω $K \subset \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, K φραγμένο. Δώστε τον ορισμό του $\sup K$ και του $\inf K$ και δείξτε ότι το $\sup K$ και το $\inf K$ είναι οριακά σημεία του K.

(ii) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής.

(α) Δείξτε ότι το $f[X]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_0, y_0 \in X$ ώστε $f(x_0) = \sup f[X]$ και $f(y_0) = \inf f[X]$.

Θέμα 2 (α) Έστω A, B μη κενά κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(i) Δείξτε ότι $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

(ii) Δείξτε ότι $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

(β) Δίνονται τα παρακάτω υποσύνολα του $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$.

i) $A_1 = \{(x, y) : |x \cdot y| < 1\}$

ii) $A_2 = \{(\frac{1}{n}, y) : n \in \mathbb{N}$ και $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{n}\}$

Δείξτε ότι το A_1 είναι ανοικτό και ότι $\overline{A_2} = A_2 \cup \{(0, 0)\}$.

Θέμα 3 Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ θέτουμε $d(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$.

(α) Δείξτε ότι η d είναι μετρική στον $\mathbb{R}$.

(β) Δείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική $\rho_{|\cdot|}$ του $\mathbb{R}$ (*Υπόδειξη*: δείξτε ότι μια ακολουθία $(x_n)_n$ συγκλίνει ως προς τη d σε ένα x αν και μόνο συγκλίνει στο x ως προς τη $\rho_{|\cdot|}$).

(γ) Δείξτε ότι ο $(\mathbb{R}, d)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Θέμα 4 (α) Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνάρτηση.

(i) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής δείξτε ότι για κάθε βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον Y.

(ii) Δείξτε (παραθέτοντας κατάλληλο παράδειγμα) ότι αν η f υποτεθεί συνεχής (αντί ομοιόμορφα συνεχής) τότε δεν ισχύει αντίστοιχο συμπέρασμα.

(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε η σφαίρα $S(x, \varepsilon_x)$ να είναι πεπερασμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι κάθε υποσύνολο του X είναι ανοικτό.

Θέμα 5 (α) (i) Διατυπώστε το Θεώρημα Baire και αποδείξτε ότι αν (X, ρ) είναι πλήρης μ.χ. και $X = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ όπου κάθε K_n είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε υπάρχει n_0 ώστε $(K_{n_0})^o \neq \varnothing$.

(ii) Δείξτε ότι αν ο (X, ρ) είναι πλήρης και αριθμήσιμος, έχει ένα τουλάχιστον μεμονωμένο σημείο.

(β)(i) Έστω (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και K ένα κλειστό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι ο $(K, \rho|_K)$ είναι πλήρης.

(ii) Έστω $A \subset \mathbb{R}$ χωρίς μεμονωμένα σημεία. Δείξτε ότι το $\overline{A}$ είναι υπεραριθμήσιμο.