ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

5ο ΕΞ. ΣΕΜΦΕ, 2012-13

2η Σειρά Ασκήσεων

1) Οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες διακριτές με τιμές στο $\{0, 1, \dots, N\}$ όπου $N \in \mathbb{N}$ και $P(X=k) = P(Y=k) = \frac{1}{N+1}$ για $k \in \{0, 1, \dots, N\}$.

α) Βρείτε την $P(X=Y)$

β) Βρείτε τις $P(X<Y)$, $P(X>Y)$

γ) Βρείτε την σ.μ.π. της τ.μ. $Z = |X-Y|$.

2) Έστω ζεύγος τ.μ. (X, Y) με σ.π.π. f που είναι συμμετρική δηλ. $f(x,y) = f(y,x)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Να βρείτε τις $P(X>Y)$ και $P(X<Y)$.

3) Ο Α και ο Β έχουν συνάντηση στις 12.30. Οι χρόνοι άφιξης του καθενός είναι ανεξάρτητες τ.μ. X, Y αντίστοιχα με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (12.00, 13.00), (0 ως 1). Βρείτε την σ.υ. του χρόνου που ο Α περιμένει τον Β. Έχει σ.π.π. η κατανομή αυτή;

4) Η τ.μ. U ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ και η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου ότι $U=u$ είναι διωνυμική $B(n,u)$ με $n \in \mathbb{N}$ και $u \in (0,1)$. Να υπολογίσετε την σ.μ.π της τ.μ. X

$$\left(B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \text{ για } a,b>0 \right).$$

5) Έστω τ.μ. X, Y, Z με $E(X^2) < +\infty$, $E(Y^2) < +\infty$, $Cov(X,Y) = 1$ και $Z \sim N(0,1)$. Αν Z ανεξάρτητη των X, Y υπολογίστε την $Cov(XZ^2, Y+Z)$.

6) Έστω τ.μ. X με σ.π.π. $f_X(x) = 2\alpha x e^{-\alpha x^2}$, $x>0$ όπου $\alpha>0$

α) Να βρείτε την κατανομή της τ.μ. $Y = 2\alpha X^2$

β) Αν $X_1, \dots, X_{10}$ είναι ισόνομες, ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή αυτήν της τ.μ. X, να βρείτε την κατανομή της τ.μ. $T = \sum_{i=1}^{10} 2\alpha X_i$

7) Φορτίο q βρίσκεται στη θέση (X, Y, Z) όπου X, Y, Z ανεξάρτητες τ.μ. και ισόνομες με κατανομή $N(0,1)$. Υπολογίστε την κατανομή του δυναμικού V στην αρχή των αξόνων

$\left(V = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \right.$ με ε την διηλεκτρική σταθερά $\left. \right)$.

8) Το τυχαίο διάνυσμα $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N(\mathbf{0}, I_2)$ και $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ όπου $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \sim N(\mathbf{0}, I_2)$

9) Έστω ζεύγος τ.μ. (X, Y) με σ.π.π. $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6x^{\alpha} y^{\alpha+1}, & (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0, & (x,y) \notin [0,1]^2 \end{cases}$

α) Να βρείτε τη σταθερά α

β) Να εξετάσετε αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες

γ) Να υπολογίσετε την $p(X+Y \geq 1)$.

10) Έστω ότι $(X, Y)^T \sim N(\mathbf{0}, I_2)$ και $U = X+Y$, $V = X-Y$

Δείξτε ότι οι τ.μ. U, V είναι ανεξάρτητες.

11) Η τ.μ. X είναι διακριτή με τιμές στο $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ και σ.μ.π. $p_n = P(X=n) = \frac{1}{\zeta(s)\, n^s}$, $n \in \mathbb{N}$ όπου $s>1$ και ζ η συνάρτηση Riemann: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

α) Αν $2 = q_1 < q_2 < \dots$ είναι η ακολουθία των πρώτων αριθμών δείξτε ότι τα ενδεχόμενα $E_i = \{q_i \mid X\}$, $i = 1, 2, \dots$ είναι ανεξάρτητα

β) Δείξτε ότι $\{X=1\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c$ και εν συνεχεία ότι

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{q_i^s}\right).$$

Παράδοση 29/1/2013.