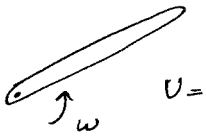
ΜΗΧΑΝΙΚΗ IV, ΔΥΝΑΜΙΚΗ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ 11/3/2015

1

- Engineering Dynamics
- Αναλυτική Μηχανική

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \Sigma \vec{F} - m\vec{a} = 0$$ (μετατρέπω το πρόβλημα σε στατικό).

$$m\vec{a} \equiv \vec{F}_{αδρ}$$



$v = \omega r$

Κινηματική: γεωμ. της κίνησης συστημάτων σωμάτων.

Δυναμική: σχέση της κίνησης με τα αίτια.

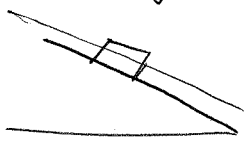
3N διαφ. εξισώσεις για N σώματα.

Αναλυτική Μηχανική

- συντηρητικά συστήματα

Οι δυνάμεις τριβής σε μικροσκοπικό επίπεδο είναι συντηρητικές. Μόνο σε μακροσκοπικό επίπεδο εμφανίζονται μη συντηρητικές.

Λαγκρανζιανή περιγραφή



- μπορώ να μικρύνω τη διάσταση, λόγω των περιορισμών της κίνησης.
- μεταβολική αρχή του Hamilton.

Χαμιλτονιανή περιγραφή

- κίνηση στο φασικό χώρο (q, p)
- είμεθα κυρίως αποκλειστικός.

π.χ.

Αρχή του Fermat (ελάχιστο του χρόνου)

π.χ. πρόβλημα του ναυαγοσώστη.

N

k

Χαμιλτονιανή περιγραφή γεωμετρικής οπτικής.

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

από τέλεσι N σε όταν ικανοποιούνται τη σχέση διασποράς $\omega = \Omega(\vec{k})$.

Υλικό Σημείο

- ≠ γεωμετρικό (έχει μάζα)
- διαστάσεις μικρότερες από τις χαρακτηριστικές διαστάσεις του προβλήματος

Ιδιότητα του αδιαχώρητου: δεν μπορεί δύο σημεία να φέρονται σε οποίο σημείο την ίδια χρονική στιγμή.

Σύστημα Υλικών Σημείων

- συνήθως αλληλεπιδρώντα
- δυναμική εξαρτάται από εσωτερικά και εξωτερικά αίτια.

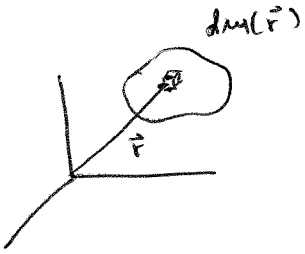
→ Κλειστά και ανοικτά συστήματα.

έχουν σταθ. ολική μάζα	μεταβλητή μάζα

Υλικό Σώμα: συνεχής κατανομή μάζας

υλικό σημείο: μάζα dm

πυκνότητα μάζας $\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m(\vec{r})}{\Delta V} = \frac{dm(\vec{r})}{dV}$

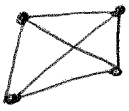


για ομογενή σώματα $\rho(\vec{r}) = \rho = \text{σταθ.}$

Ολική μάζα σώματος: $M = \int_V dm = \int_V \rho(\vec{r})\,dV$

Απολύτως Στερεό Σώμα: $\boxed{|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{σταθ.} \quad \forall\, i,j}$ → ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΤΕΡΕΟΤΗΤΑΣ ⇓ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΥΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

- συνεχές
- διακριτό:



μάζες ανδεδεμένες με αβαρείς ~~ραβδ~~ ράβδους.

→ Δίσκος: ονομάζουμε 3d στερεό του οποίου η μια διάσταση είναι πολύ μικρότερη από τις άλλες δύο.

→ Ράβδος: οι δύο διαστάσεις της είναι μικρότερες από τις άλλες δύο.

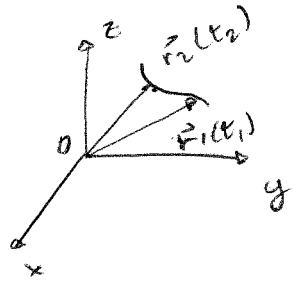
$v_1 = \omega r_1$, $v_2 = \omega r_2$ } κινηματικές σχέσεις

Κινηματική του υλικού σημείου

Τροχιά:

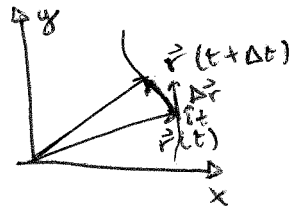
$\vec{r}(t)$ ή $\vec{r}(s)$, όπου s το μήκος τροχιάς από δεδομένο σημείο.

(η s εξαρτάται από την τροχιά, όχι από εξωτερικό παράγοντα)



Ταχύτητα: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\dot{s} = \dot{s}\,\hat{i}_t$$



$$\hat{i}_t = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \text{γιατί} \quad \Delta s\to 0,\ |\Delta\vec{r}| = \Delta s$$

άρα η ταχύτητα είναι πάντα εφαπτομένη της τροχιάς!

Επιτάχυνση: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \left(=\dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}\right)$

Καρτεσιανές Συντεταγμένες

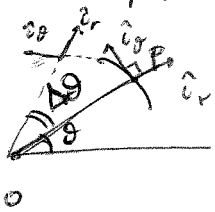
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

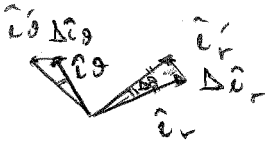
$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

Πολικές Συντεταγμένες (επίπεδη κίνηση)

τα διανύσματα δεν έχουν σταθ. κατεύθυνση



$$\boxed{\frac{d\hat{i}_r}{d\theta} = \hat{i}_\theta}, \quad \boxed{\frac{d\hat{i}_\theta}{d\theta} = -\hat{i}_r}$$



$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{|\Delta\hat{i}_r|}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2\eta\mu\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} = 1$$

$$\Delta\hat{i}_r \parallel \hat{i}_\theta$$

Θέση: $\vec{r} = r\cdot\hat{i}_r$

Ταχύτητα: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\cdot\hat{i}_r + r\dfrac{d\hat{i}_r}{dt} = \underbrace{\dot{r}\cdot\hat{i}_r}_{\text{ακτινική}} + \underbrace{r\dot{\theta}\hat{i}_\theta}_{\text{εφαπτομενική}}$ συνιστώσα ταχύτητας

$$\frac{d\hat{i}_r}{dt} = \frac{d\hat{i}_r}{d\theta}\dot{\theta}$$

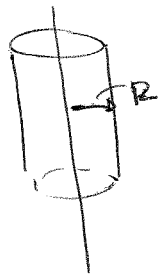
Επιτάχυνση: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\hat{i}_r + \dot{r}\dfrac{d\hat{i}_r}{dt} + \dfrac{d(r\dot{\theta})}{dt}\hat{i}_\theta + r\dot{\theta}\dfrac{d\hat{i}_\theta}{dt} = \ddot{r}\hat{i}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{i}_\theta + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{i}_\theta$

$$= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{\text{αντίστοιχα}}\hat{i}_r + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{\text{εφαπτομενικά}}\hat{i}_\theta$$

Κυλινδρικές Συντεταγμένες

πολικές $(r \to R)$ ← απόσταση από τον άξονα

- $\vec{v}_z = \dot{z}\hat{k}$
- $\vec{a}_z = \ddot{z}\hat{k}$



Φυσικές Συνιστώσες (Συνοδεύων Τρίεδρο Frenet)

$\boxed{\text{• Επίπεδη κίνηση}}$: Δείξαμε ότι $\vec{v} = v\hat{i}_t$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{i}_t + v\frac{d\hat{i}_t}{dt}$$

← είχαμε από τη τροχιά και μόνο!

$$\frac{d\hat{i}_t}{dt} = \frac{d\hat{i}_t}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)\frac{ds}{dt}$$

t: tangent

n: normal

- Θέλω $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$ (ρ: ακτίνα καμπυλότητας)

- $\frac{ds}{dt} = v$ · $\frac{d\hat{i}_t}{d\theta} = \hat{i}_n$ (ανάλογα με πολικές συντεταγμένες)

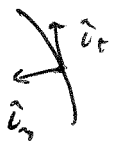
$$\frac{d\hat{i}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{i}_n$$

Τελικά

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{επιβράδυνση}}\hat{i}_t + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}}_{\text{κεντρομόλος (τοπική)}}\hat{i}_n}$$

κεντρομόλος (τοπική): φέρνει από τον τοπικό ακτίνα καμπυλότητας (πόσο περισσότερο μια καμπύλη στρίβει)

τα $\hat{i}_t, \hat{i}_n$ ορίζονται από σύνδεση στη τροχιά



$\boxed{3D}$ $\hat{i}_n$: πρωτοκάθετο διάνυσμα

ορ: $\hat{i}_b = \hat{i}_t \times \hat{i}_n$: δικάθετο διάνυσμα περιγράφει το επίπεδο (συγκτικό) της κίνησης.

$(\hat{i}_t, \hat{i}_n, \hat{i}_b)$ συνοδεύων τρίεδρο του Frenet

Ορ: $\frac{d\hat{i}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{i}_n$

της κυρτότητας καμπυλότητας

Ανάλογα ορίζω $\frac{d\hat{i}_b}{ds} = -\sigma \hat{i}_n$ σ: στρέψη

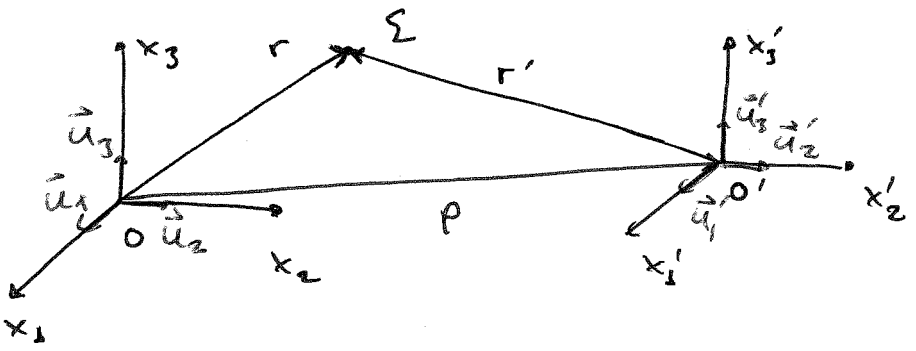
Τελικά αποδεικνύεται: $\boxed{\frac{d\hat{i}_n}{ds} = -\frac{1}{\rho}\hat{i}_t + \sigma \hat{i}_b}$

Πίνακας

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \hat{i}_t \\ \hat{i}_n \\ \hat{i}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\rho & 0 \\ -1/\rho & 0 & \sigma \\ 0 & -\sigma & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{i}_t \\ \hat{i}_n \\ \hat{i}_b \end{bmatrix}$$

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

18/3/2015



<u>Δωμαστοπαγές σύστημα αξόνων</u>: το σύστημα να κινείται πάνω στο στερεό.

Τελικά βολεύει να επιλέγω συστήματα με άξονες ≡ άξονες συμμετρίας

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3), \quad p_i = \vec{p}\cdot\hat{u}_i \quad , i = 1,2,3.$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{p} \Rightarrow x_1'\hat{u}_1' + x_2'\hat{u}_2' + x_3'\hat{u}_3' = (x_1-p_1)\hat{u}_1 + (x_2-p_2)\hat{u}_2 + (x_3-p_3)\hat{u}_3$$

Πολλ/ω εσωτερικά με $\hat{u}_1', \hat{u}_2', \hat{u}_3'$ διαδοχικά:

$$x_1' = (x_1-p_1)\hat{u}_1'\hat{u}_1 + (x_2-p_2)\hat{u}_1'u_2 + (x_3-p_3)\hat{u}_1'\hat{u}_3 .$$

$$x_2' = \ldots$$

$$x_3' = \ldots$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-p_1 \\ x_2-p_2 \\ x_3-p_3 \end{bmatrix}, \quad c_{ij} = \hat{u}_i'\hat{u}_j = \cos(\hat{u}_i', \hat{u}_j), \quad i,j = 1,2,3.$$

<u>ΠΑΡΑΛΛΗΛΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ (απλή μεταφορά)</u>

$$c_{ij} = \delta_{ij}$$

Ανισοτροποι Μετασχηματισμοι (εσ. πολλ/μος με $\hat{a}_i$).

Αυτός εμπεριέχει τον ανάστροφο πίνακα:

$$\begin{bmatrix} x_1-p_1 \\ x_2-p_2 \\ x_3-p_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}}_{C^T} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

$$CC^T = C^T \cdot C = I \Longrightarrow \boxed{C^{-1} = C^T}$$ ορισμός ορθογωνα πίνακα.

Τα στοιχεία του C πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\boxed{c_{ij} \cdot c_{kj} = \delta_{ik}}$$ (συμβολισμός Einstein)

Πχ. Αν $i = k$: $c_{i1} \cdot c_{i1} + c_{i2} \cdot c_{i2} + c_{i3} \cdot c_{i3} = 1 = \delta_{ii}$

$$\Downarrow$$

$$c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + c_{i3}^2 = 1 \quad , i = k = 1,2,3 \longleftarrow 3 \text{ σχέσεις}$$

Αν $i \neq k$:

$$\left.\begin{aligned} c_{11} \cdot c_{21} + c_{12} \cdot c_{22} + c_{13} \cdot c_{23} &= 0 = \delta_{12} \\ c_{21}\, c_{31} + c_{22}\, c_{32} + c_{23} \cdot c_{33} &= 0 = \delta_{23} \\ c_{31} \cdot c_{11} + c_{32} \cdot c_{12} + c_{33} \cdot c_{13} &= 0 = \delta_{31} \end{aligned}\right\} 3 \text{ σχέσεις}$$

Τα στοιχεία του C είναι τα δίνα συμμετρικα. Αρκουν 3 δίνα συμμετρικα για να φτιαχτεί ο πρόσανατολισμός.

Οι ορθογωνιότητες εκφράζουν την διατήρηση του μέτρου:

$$|x'|^2 = (x')^T \cdot x' = (Cx)^T \cdot Cx = x^T \underbrace{C^T \cdot C}\, x = x^T x = |x|^2.$$

Πραγματικά, θα αλλάξει το σύστημα αξονων χωρίς να αλλάξει το μέτρο της απόστασης των σημείων πάνω σ'ένα στερεό.

ΔΙΑΔΟΧΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

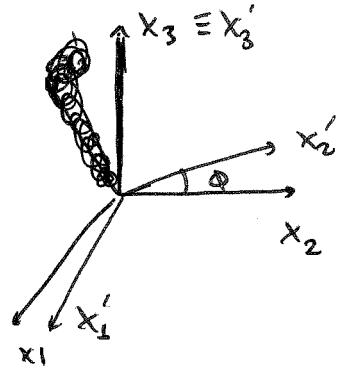
→ Μη αντιμεταθετική ομάδα

$C = AB$: ορθογώνιοι πίνακες ΟΜΣ

$AB \neq BA$: όχι αντιμεταθετικότητα

$(AB)C = A(BC)$: προσεταιριστικότητα.

Μετασχηματισμοί Στροφής ($\vec{p} = \vec{0}$).

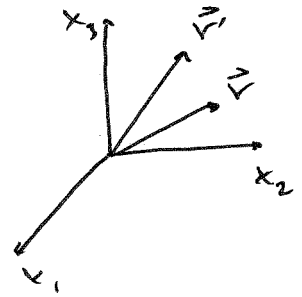


$$C_3 = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

αντίστοιχα οι C_1, C_2.

Παθητική θεώρηση: Αλλάζω το σύμα από το σύστημα συντεταγμένων μου.

Ενεργητική θεώρηση: Παραγωγή της κίνησης του σώματος στο σύστημα συντεταγμένων μου. Η κίνηση είναι διαδοχικοί τέτοιοι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί (αλλά μη αντιμεταθετικοί)

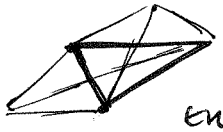


$\vec{r}' = A\vec{r}$

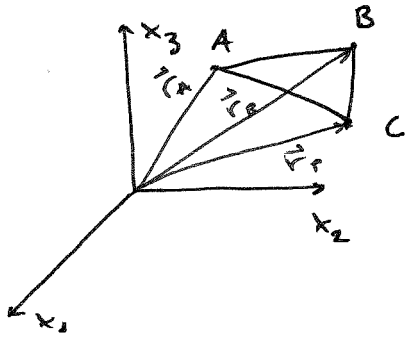
μετασχ. συντ/νων

Κινηματικές Σωστικές Στερεότητας

3 μη συνευθειακά σημεία ορίζουν λαστική πλάκα και μπορώ να μελετήσω ολοκληρο το στερεό μελετώντας την κίνησή τους:



Φαντάζομαι το στερεό μου να αποτελείται από σημεία ενωμένα μεταξύ τους με αβαρείς ράβδους που είναι στέρεες (εξασφαλίζουν στέρεες αποστάσεις).



Τα A, B, C μη συνευθειακά

<u>Συνθήκες Στερεότητας</u>

$$|\vec r_A - \vec r_B|^2 = c_{AB}^2 = \text{σταθ.}$$

$$|\vec r_B - \vec r_\Gamma|^2 = c_{B\Gamma}^2 = \text{σταθ.}$$

$$|\vec r_\Gamma - \vec r_A|^2 = c_{\Gamma A}^2 = \text{σταθ.}$$

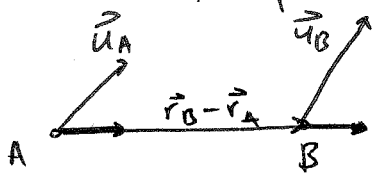
$\frac{\partial}{\partial t}$

$$\left.\begin{aligned} 2(\dot{\vec r}_A - \dot{\vec r}_B)(\vec r_A - \vec r_B) &= 0 \\ 2(\dot{\vec r}_B - \dot{\vec r}_\Gamma)(\vec r_B - \vec r_\Gamma) &= 0 \\ 2(\dot{\vec r}_\Gamma - \dot{\vec r}_A)(\vec r_\Gamma - \vec r_A) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\dot{\vec r}_A - \dot{\vec r}_B$

$\dot{\vec r}_{BA} \cdot \vec r_{BA} = 0 \rightsquigarrow \dot{\vec r}_{AB} \cdot \vec r_{AB} = 0$

<u>Φυσική Ερμηνεία</u>: Για να έχω στερεό πρέπει οι προβολές των διανυσμάτων ταχυτήτων πάνω στο στερεό να είναι ίσες



<u>1ος νόμος των Προβολών</u>

Κατά την $\vec{AB}$ δεν αλλάζει η σχετική ταχύτητα των A, B $\Rightarrow$ A & B έχουν σταθ. απόσταση μεταξύ τους.

<u>Γενικότερα</u>, τα σημεία ενός στερεού ανά δύο έχουν ταχύτητες με ίσες προβολές και ίδια φορά πάνω στην ευθεία που τα ενώνει.

$$\rightarrow \vec r_{AB} + \vec r_{B\Gamma} + \vec r_{\Gamma A} = 0 \rightarrow |\vec r_{AB}|^2 = |\vec r_{B\Gamma}|^2 + |\vec r_{\Gamma A}|^2 + 2\vec r_{B\Gamma}\vec r_{\Gamma A}$$

$$|\vec r_{B\Gamma}|^2 = \ldots$$

$$|\vec r_{\Gamma A}|^2 =$$

$$\cancel{2\dot{\vec r}_{AB}\vec r_{AB}} = \cancel{2\dot{\vec r}_{B\Gamma}\vec r_{B\Gamma}} + \cancel{2\dot{\vec r}_{\Gamma A}\vec r_{\Gamma A}} + 2\dot{\vec r}_{B\Gamma}\vec r_{\Gamma A} + 2\dot{\vec r}_{B\Gamma}\vec r_{\Gamma A}$$

?

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \dot{\vec r}_{\Gamma A} \cdot \vec r_{\Gamma B} = \dot{\vec r}_{\Gamma B} \cdot \vec r_{A\Gamma} \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

<u>2ος νόμος των προβολών</u>

Οι προβολές των σχετικών ταχυτήτων του Γ ως προς τα A και B πάνω στις διανυσματικές αποστάσεις ΓB και ΓA αντίστοιχα είναι ίσες

Έννοια της μεταπόπισης στερεού

ορισμός: Κάθε μετακίνηση θέσης της βασικής τριάδας σημείων.
Η μετατόπιση χαρακτηρίζεται από το εύρος και την κατεύθυνσή της τροχιάς.

Έννοια της Κίνησης Στερεού

ορισμός: Η αναγωγή της μετατόπισης στο χρόνο

Έννοια της Τροχιάς Στερεού

ορισμός: Η ακολουθία των θέσεων από τις οποίες αυτό διέρχεται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Βαθμοί ελευθερίας (κινητικότητα) Στερεού

ορισμός: Το ελάχιστο πλήθος συντεταγμένων θέσης ή άλλων βαθμωτών ποσοτήτων που επαρκούν για τον προσδιορισμό της θέσης ενός στερεού

Οι β.ε. της βασικής τριάδας θα πρέπει να ταυτίζονται με τους β.ε. του συνολικού στερεού.
Για να ακινητοποιήσουν ένα σημείο του στερεού χρειάζομαι τρείς δεσμικές ράβδους (μη συνεπιπεδικές). Για να ακινητοποιήσουν και το δεύτερο χρειάζομαι δύο ακόμη για το συνδέσω με το πρώτο. Τώρα το στερεό μπορεί να κινηθεί γύρω από τον άξονα των Σ1 & Σ2.
Χρειάζομαι μια τελευταία δεσμική ράβδο (ασύμβατη με τον άξονα περιστροφής) για να περιορίσω όλες τις κινήσεις του στερεού.
Συνολικά 6 ράβδοι = 6 β.ε. κινήσεις περιορισμένοι.

Όλες οι κινήσεις προκύπτουν από

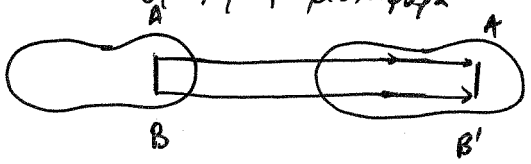
ΜΕΤΑΦΟΡΑ

Τα διανύσματα θέσης όλων των σημείων του στερεού υπόκεινται στην ίδια διαν. μετατόπιση
⇓
Κάθε διάνυσμα που ενώνει δύο σημεία του στερεού μετατοπίζεται παράλληλα.

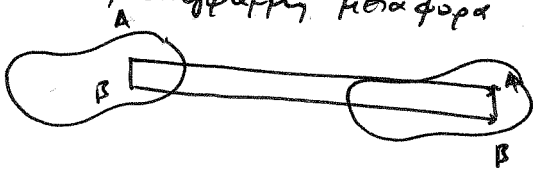
ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Δεν μπορώ να φτιάξω διάνυσμα πάνω δα μου δείξει περιστροφή τώρα (στην μεταφορά είχα την ταχύτητα) διότι δεν υπάρχει η δυνατότητα αντιμετάθεσης, δηλ. ανάλογα με το ποιά περιστροφή διαδέχεται ποιά παίρνω τελικά θέση του στερεού.

ευθύγραμμη μεταφορά



καμπυλόγραμμη μεταφορά



Οι ταχύτητες όλων των σημείων του σώματος είναι ίσες

$$\frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_2}{\Delta t} = \dots = \frac{\Delta \vec{r}_n}{\Delta t}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \dots = \frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \dots \vec{u}_n = \vec{u} = \vec{v}$

& όμοια

$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \dots = \vec{a}_n = \vec{a} = \dot{\vec{u}} = \dot{\vec{v}}$.

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

20/3/2015

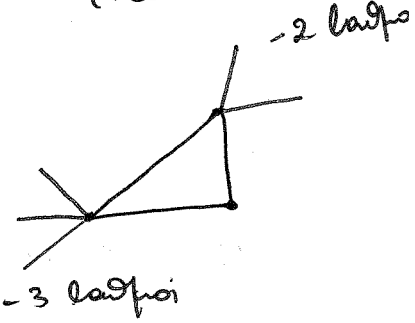
Μετατοπίση κατά την οποία δύο σημεία του στερεού παραμένουν ακίνητα (ή δύο σημεία μιας νοητής προέκτασης του στερεού)

<u>Άξονας Περιστροφής</u>: ορίζεται από δύο ακίνητα σημεία.

<u>Περιφορά</u>: όταν ο άξονας περιστροφής βρίσκεται εκτός του στερεού.

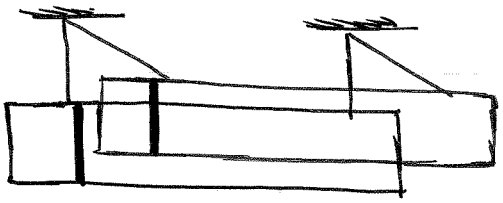
<u>Βαθμοί Ελευθερίας</u>: Θεωρώ μια βαρκούλα τριάδα.

Περιορίζω με 3+2 ράβδους. Μένει ένας βαθμός ελευθερίας, γύρω από τον άξονα των δύο σημείων.

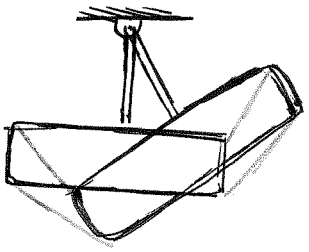


Κάθε σημείο του στερεού σε περιστροφή διαγράφει κυκλικό τόξο με επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Διάκριση μεταξύ καμπυλόγραμμης μεταφοράς και περιστροφής.

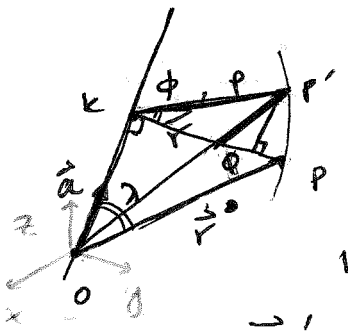


Κάθε σημείο διαγράφει τόξο κύκλου.
Κάθε σημείο μετατοπίζεται παράλληλα.
Είναι <u>μεταφορά</u>



Παράλληλες παραμένουν οι ευθείες παράλληλες στον άξονα περιστροφής <u>μόνο</u>.
Είναι <u>περιστροφή</u>!

<u>Πεπερασμένες Περιστροφές</u> (Δεν χρησιμοποιώ <u>κανένα</u> σύστημα αναφοράς)



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$$

$$\vec{r}' = \vec{OP'} = \vec{Ok} + \vec{kQ} + \vec{QP'}$$

$$\vec{Ok} = (\vec{r}\cdot\hat{a})\cdot\hat{a}$$

$|\vec{kP}| = |\vec{kP'}|$?

$$\vec{kQ} = (kP')\cos\phi\,\frac{\vec{kP}}{|\vec{kP}|} = \rho\cos\phi\,\frac{\vec{kP}}{\rho} = \cos\phi\,(\vec{r} - (\vec{r}\hat{a})\hat{a})$$

$$\vec{QP'} = (kP')\sin\phi\,\frac{\vec{QP'}}{|\vec{QP'}|} = \rho\sin\phi\,\frac{\hat{a}\times\vec{r}}{|\hat{a}\times\vec{r}|} = \rho\sin\phi\,\frac{\hat{a}\times\vec{r}}{r\sin\theta}$$

Τελικά $\boxed{\vec{r}' = \vec{r}\cos\phi + (1-\cos\phi)(\vec{r}\cdot\hat{a})\hat{a} + (\hat{a}\times\vec{r})\sin\phi}$ [illegible]

Χρησιμοποιώ $\vec{a}\times(\hat{a}\times\vec{r}) = (\hat{a}\cdot\vec{r})\hat{a} - (\hat{a}\cdot\hat{a})\vec{r} = (\hat{a}\vec{r})\hat{a} - \vec{r}$.

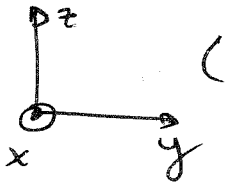
και $1-\cos\phi = 2\sin^2\frac{\phi}{2}$.

τότε: $$\boxed{\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}\,' - \vec{r} = (\hat{a}\times\vec{r})\sin\phi + 2\hat{a}\times(\hat{a}\times\vec{r})\sin^2\frac{\phi}{2}}$$

> Ορθογωνικές Περιστροφές: Είναι αντιμεταθέσιμες

> Περιστροφές γύρω από συνεπίπεδους άξονες (τεμνόμενους ή μη)

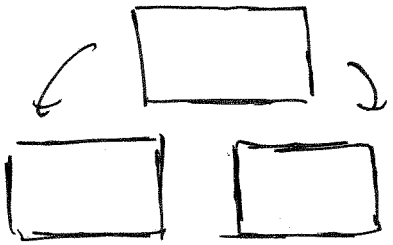
Μη αντιμεταθέσιμες, άρα δεν μπορώ να ορίσω περιστροφή ως διάνυσμα.



(παράδειγμα με σφαιρίδι στον πίνακα)

Τύπος περιστροφών ($\hat{a}_1\times\hat{a}_2 = 0$, $\phi_1 = -\phi_2 = \phi$)

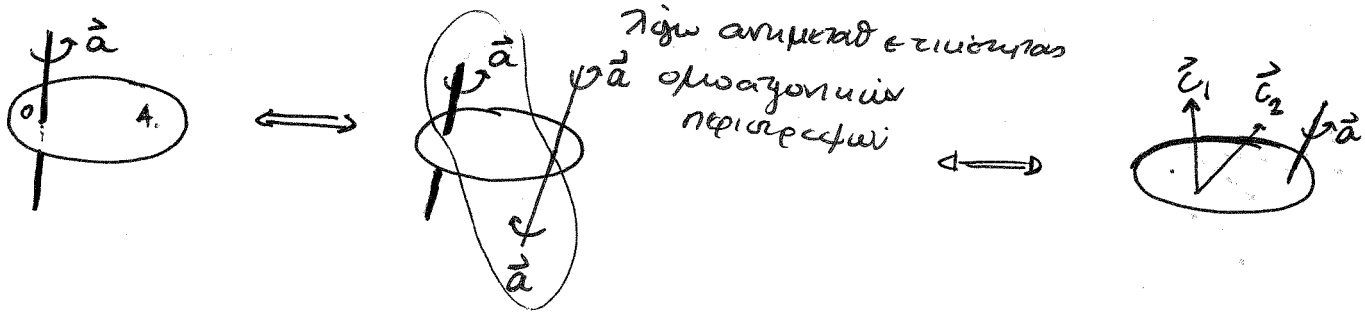
2 περιστροφές = 1 μετατόπιση. Μη αντιμεταθέσιμες



πιθανά ενδεχόμενα ανάλογα με την σειρά των περιστροφών.

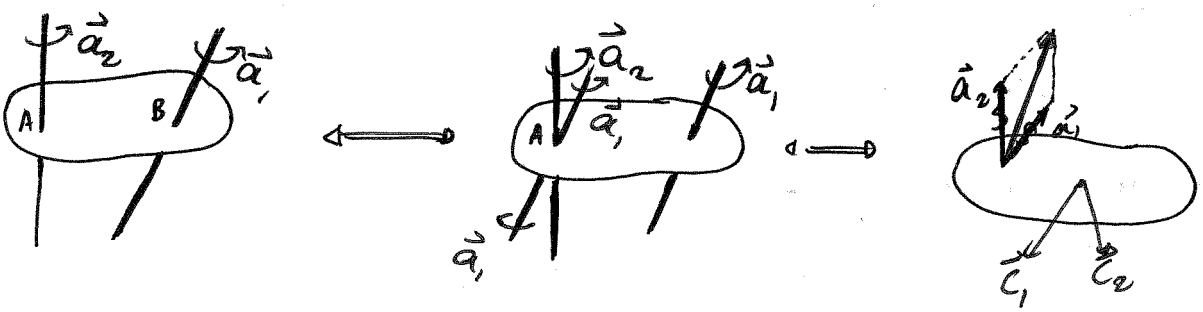
Όλες οι ακαριαίες περιστροφές μ πορεία γίνεται μοναδική!!

Ανάλυση Περιστροφής σε παράλληλο άξονα



Μια περιστροφή μπορώ να την αναλύσω σε μια περιστροφή και μια μεταφορά.

Περιστροφές περί ασύμμετρα άξονες



Δεν έχει σημασία να λάβω τα διανύσματα μετατόπισης. Δύο τίθενται αποτελέσματα

ΑΠΕΙΡΟΣΤΕΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΕΣ

Rodrigues: $\vec{r}' = \vec{r}\cos\phi + (1-\cos\phi)(\vec{r}\hat{a})\hat{a} + (\hat{a}\times\vec{r})\sin\phi$

Περιστροφή κατά $\Delta\phi \ll 1 \Rightarrow \cos\Delta\phi \simeq 1$, $\sin\Delta\phi \simeq \Delta\phi$

τότε $\Delta\vec{r} = (\hat{a}\times\vec{r})\Delta\phi = (\Delta\phi\,\hat{a})\times\vec{r}$.

Αντιμεταθετικότητα απειροστών περιστροφών

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} + (\Delta\phi_1\hat{a}_1)\times\vec{r}\\ \vec{r}'' &= \vec{r}' + (\Delta\phi_2\hat{a}_2)\times\vec{r}'\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\vec{r}'' &= \vec{r} + (\Delta\phi_1\hat{a}_1)\times\vec{r} + (\Delta\phi_2\hat{a}_2)\times[\vec{r} + (\Delta\phi_1\hat{a}_1)\times\vec{r}]\\ &= \vec{r} + \underbrace{[(\Delta\phi_1\hat{a}_1) + (\Delta\phi_2\hat{a}_2)]}_{\text{αντιμεταθετικότητα}}\times\vec{r} + O(\Delta\phi_1\Delta\phi_2)\end{aligned}$$

Διανυσματικός Χαρακτήρας απειροστών περιστροφών

$$d\vec{r} = \lim_{\Delta\phi\to 0}\Delta\vec{r} = \lim_{\Delta\phi\to 0}[(\Delta\phi\hat{a})\times\vec{r}] = d\vec{\phi}\times\vec{r} \Rightarrow \boxed{d\vec{r} = d\vec{\phi}\times\vec{r}}$$

όπου $d\vec{\phi} = \lim_{\Delta\phi\to 0}(\Delta\phi\hat{a})$.

Φυσική Έννοια της Εναλλαγής Περιστροφών

- Είναι αδύνατον ένα στερεό να συμμετέχει ταυτόχρονα σε δύο διαφορετικές περιστροφές με άξονες που αμείνονται.
- Ο ένας άξονας πρέπει να περιστρεφεται ως προς τον άλλον εκτός τον

• Μόνο ένας από τους άξονες μπορεί να τέμνει το στερεό.

Αν οι άξονες τέμνονται σε σημείο O, τότε ο δεύτερος θα έχει με το στερεό μόνο ένα κοινό σημείο (το O) ή καμένα.

<u>Γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση</u>

Ορίζουμε $\vec{\omega} = \omega\hat{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}\hat{a} = \frac{d\phi}{dt}\hat{a} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi(\hat{a}\times\vec{r})}{\Delta t} = \underline{\underline{\vec{\omega}\times\vec{r}}}$$

<u>Γενικά</u>: για κάθε διάνυσμα σταθ. μέτρου, $\vec{A}$, που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω: $\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{A}}$

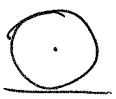
$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\omega\hat{a})}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\hat{a} + \omega\frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\hat{a} + \omega(\vec{\Phi}\times\hat{a})$$

$\vec{\Phi}$: η γωνιακή ταχύτητα με την οποία αλλάζει προσανατολισμό ο άξονας περιστροφής $\hat{a}$.

Δεν έχει την κατεύθυνση του άξονα περιστροφής.

Αν έχω δύο σταθ. γωνιακές περιστροφές μπορούν να μου δίσουν γωνιακή επιτάχυνση.

αν $\vec{\omega}_{ολ} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, $\dot{\vec{\omega}}_{ολ} = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 = \dot{\omega}_1\hat{a}_1 + \dot{\omega}_2\hat{a}_2 + \underbrace{\vec{\Phi}_2}_{\vec{\omega}_2}\times\hat{a}_1$



$\frac{d\phi}{dt} = \omega = σταθ.$

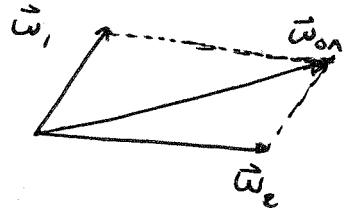
ο άξονας περιστροφής δε μετακινείται άρα το $\hat{a}$ έχει την κατεύθυνση του $\vec{\omega}$ ($\vec{\Phi} = \vec{0}$).

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΓΩΝΙΑΚΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

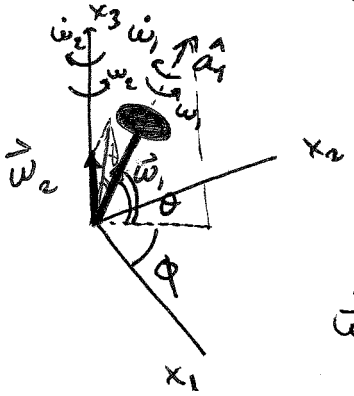
27/3/201

(9)

> Συνεπίπεδοι και εφαπτόμενοι άξονες περιστροφής



Παράδειγμα



$$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \hat{a}_1 = \omega_1 (\cos\phi\cos\theta\, \hat{x}_1 + \cos\theta\sin\phi\, \hat{x}_2 + \sin\theta\, \hat{x}_3)$$

$$\vec{\omega}_2 = \omega_2 \hat{x}_3$$

$$\vec{\omega}_{o\lambda} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \dots \qquad \cos\gamma = \frac{\vec{\omega}_{o\lambda}\cdot\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_{o\lambda}|\,|\vec{\omega}_1|}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 = \dot{\omega}_1 \hat{a}_1 + \omega_1 \frac{d\hat{a}_1}{dt} + \dot{\omega}_2 \hat{x}_3 + \omega_2 \cancel{\frac{d\hat{x}_3}{dt}}^{\,0} =$$

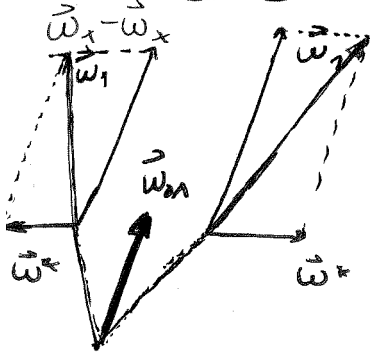
$$= \dot{\omega}_1 \hat{a}_1 + \omega_1 (\vec{\omega}_2 \times \hat{a}_1) + \dot{\omega}_2 \hat{x}_3 = \dot{\omega}_1 \hat{a}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 \hat{x}_3$$

Ακόμα και αν $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = 0$ η συνολική μου κίνηση θα ήταν επιταχυνόμενη.

$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$, $|\vec{A}| = \text{σταθ}$. Το $\hat{a}_1$ περιστρέφεται με συχνότητα $\vec{\omega}_2$:

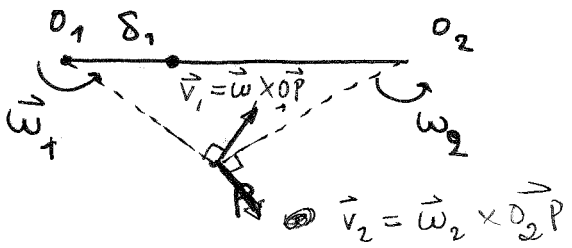
$$\frac{d\hat{a}_1}{dt} = \vec{\omega}_2 \times \hat{a}_1 .$$

> Συνεπίπεδοι και παράλληλοι άξονες περιστροφής



Προσθαφαιρώ την $\vec{\omega}_*$ ομοαξονική άρα αντιμεταθέτομη

$$\vec{\omega}_{o\lambda} \parallel \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$$

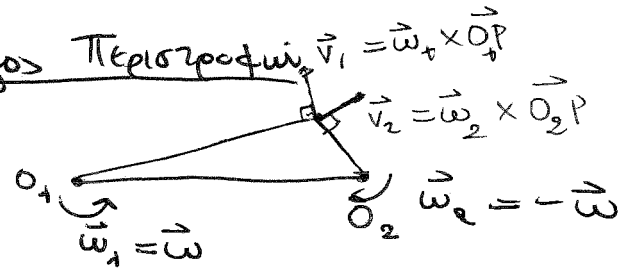


Για να βρω τα άξονα περιστροφής, ζητάω $\vec{V}_{o\lambda} = \vec{0} \rightarrow \omega_1\delta_1 = \omega_2\delta_2$

με $\delta_1 + \delta_2 = |O_1O_2|$

Λόγιον: Αν τα $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ αντίρροπα, προσθέτοιτε τον άξονα περιστροφής.

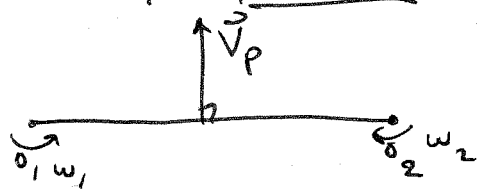
> Ζεύγος Περιστροφών



(Μόνο στην περίπτωση αντίρροπων περιστροφών η μεταλλάσσουσα ένας μοναδική).

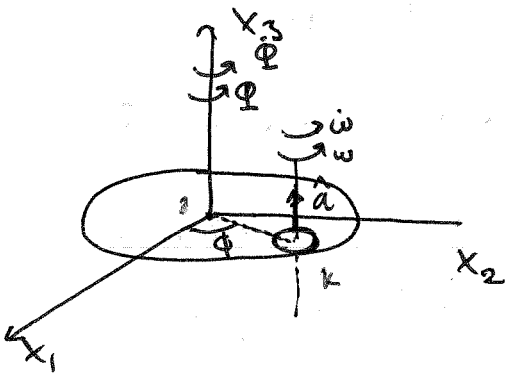
$$\vec{V}_P = \vec{\omega}_1 \times \vec{O_1P} + \vec{\omega}_2 \times \vec{O_2P} = \vec{\omega} \times \vec{O_1P} - \vec{\omega} \times \vec{O_2P} = \vec{\omega} \times (\vec{O_1P} - \vec{O_2P}) = \vec{\omega} \times \vec{O_1O_2}$$

άρα ταχύτητα μεταφοράς: $\vec{V}_P \perp \vec{O_1O_2}$, $\vec{V}_P \perp \vec{\omega}$.



Παράδειγμα με $\vec{\omega}_1 \parallel \vec{\omega}_2$ ($\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = \vec{0}$)

$$\vec{V}_M = \vec{V}_K + \vec{\omega}_{0A} \times \vec{KM} = \vec{\omega}_1 \times \vec{OK} + \vec{\omega}_{0A} \times \vec{KM}$$



$\phi = 30°$

$\Phi : \omega = 3 : 1$

$\dot{\Phi} : \dot{\omega} = 2 : 1$

$$\vec{\omega}_{0A} = \vec{\omega} + \vec{\Phi} = \omega\hat{a} + \Phi\hat{x}_3 = (\omega + \Phi)\hat{x}_3$$

Θέση του άξονα περιστροφής:

$$\Phi(OT) = \omega(TK) \rightarrow \frac{(TK)}{(OT)} = \frac{\Phi}{\omega} = \frac{3}{1}$$

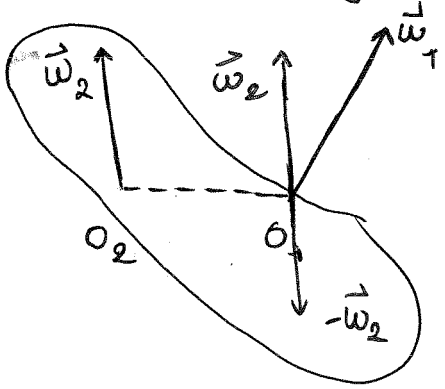
$$\dot{\vec{\omega}}_{0A} = \dot{\vec{\omega}} + \dot{\vec{\Phi}} = \dot{\omega}\hat{a} + \omega\cancel{\frac{d\hat{a}}{dt}}^{\,0} + \dot{\Phi}\hat{x}_3 = (\dot{\omega} + \dot{\Phi})\hat{x}_3$$

(ως $\hat{a}$ μεταλλάσσουσα ||)

(Σε κάθε περιστροφή, ένα ελ. τμήμα || στον άξονα περιστροφής δεν αλλάζει προσανατολισμό).

Για μεγάλες περιστροφές: $\vec{\Phi} = -\vec{\omega} \Rightarrow$ μεταφορά με $\vec{V}_P = \vec{\omega} \times \vec{KO}$ καμπυλόγραμμη μεταφορική κίνηση

> Ασύμβατοι άξονες



Μεταφορά : με $\vec{V}_{\mu\epsilon\tau\alpha\phi} = \vec{\omega}_2 \times \vec{O_2O_1}$

Περιστροφή με $\vec{\omega}_{01} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ περί άξονα διερχόμενο από το O_1

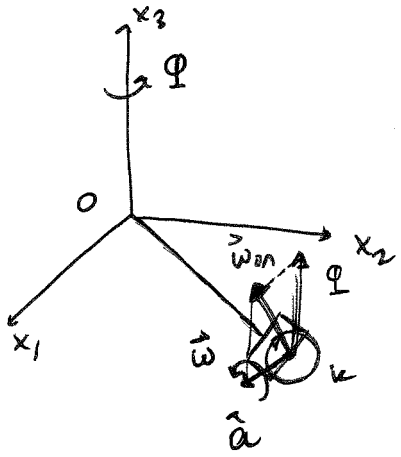
ομοίως αν μεταφέρω το $\vec{\omega}_1$ (περιστροφή περί O_2)

Συνολική ταχύτητα σημείου P : $\vec{V}_P = \underbrace{\vec{\omega}_2 \times \vec{O_2O_1}}_{\text{μεταφορά}} + \underbrace{\vec{\omega}_{01} \times \vec{O_1P}}_{\text{περιστροφή}} =$

$= \vec{\omega}_2 \times \vec{O_2O_1} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{O_1P} = \vec{\omega}_2 \times (\vec{O_2O_1} + \vec{O_1P}) + \vec{\omega}_1 \times \vec{O_1P} = \underline{\vec{\omega}_2 \times \vec{O_2P} + \vec{\omega}_1 \times \vec{O_1P}}$

ανεξάρτητη από τον τρόπο που έφτασα εδώ

Παράδειγμα



ασύμβατοι άξονες!

Κίνηση οποιαδήποτε σημείου P τα δύο

Μεταφορά : $\vec{V}_\mu = \vec{\Phi} \times \vec{Ok}$ (φορά από το θετικό στο αρνητικό)

Περιστροφή γύρω από άξονα που διέρχεται από το k με $\omega_{01} = \vec{\omega} + \vec{\Phi}$

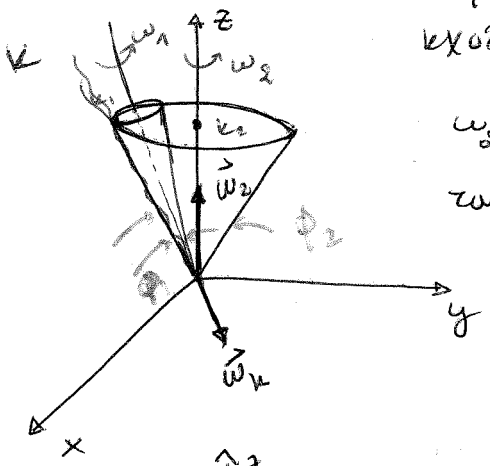
$$\dot{\vec{\omega}}_{01} = \dot{\vec{\omega}} + \dot{\vec{\Phi}} = \dot{\omega}\hat{a} + \omega\frac{d\hat{a}}{dt} + \dot{\Phi}\hat{x}_3 + \Phi\cancel{\frac{d\hat{x}_3}{dt}}^{\,0}$$

$$\| $$

$$\omega(\vec{\Phi} \times \hat{a}) = \vec{\Phi} \times \vec{\omega}.$$

1/4/2015

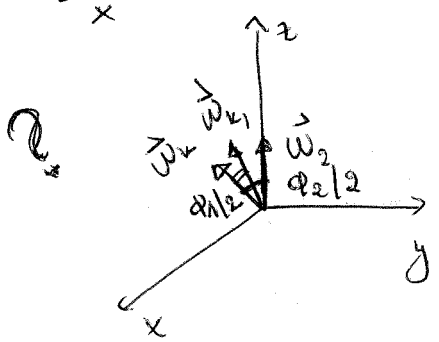
Παράδειγμα



Μικρός κώνος K_1 γωνίας $\varphi_1 = 30°$ κυλά σε μεγάλο κώνο K_2 γωνίας $\varphi_2 = 90°$.

$\omega_2 = 30$ rad/s η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του άξονα του K_1 γύρω από τον άξονα του K_2.

ω_k (ολική) = ;



Σχηματίζα το κατώτατο σημείο και το σημείο (κοινό) της περιφέρειας του K_1 & K_2 αλληλεπίδρων κχο)

⇓

άξονας περιστροφής η καταφή γραμμή

$$\vec{\omega}_2 = \omega_2 \hat{z}$$

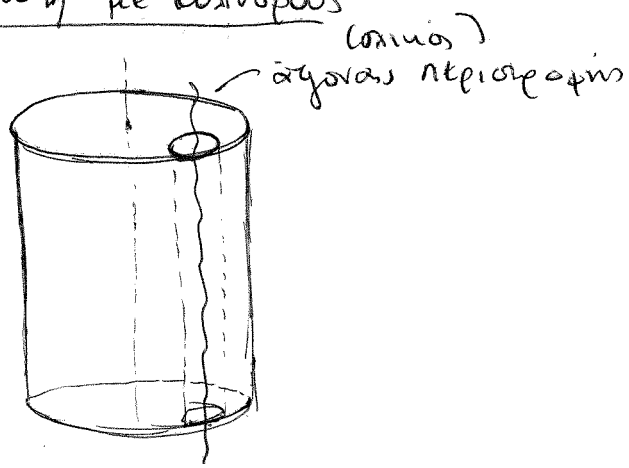
$$\vec{\omega}_k = -\omega_k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_1}{2}\right)\hat{y} + \omega_k \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_1}{2}\right)\hat{z} \quad \text{(ολική)}$$

$$\vec{\omega}_{k_1} = -\omega_{k_1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_2}{2}\right)\hat{y} + \omega_{k_1} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_2}{2}\right)\hat{z}$$

$$\vec{\omega}_{k_1} = \vec{\omega}_k + \vec{\omega}_2 \Rightarrow ..$$

Ο άξονας K περιστροφής αλλάζει ⇒ το K_1 έχει επιτάχυνση.

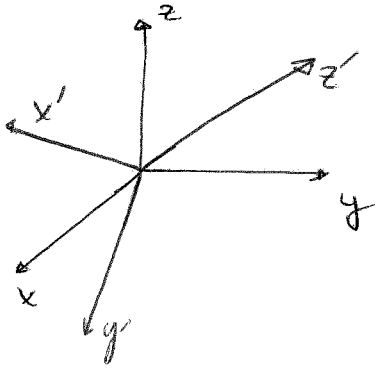
→ Γενίκευση με Κυλίνδρους



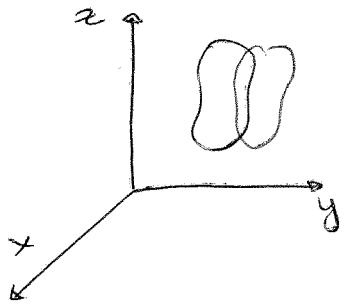
Θεώρημα Euler

Η μετατόπιση ενός στερεού με ένα σημείο ακίνητο ισοδυναμεί με μια περιστροφή.

> Παθητική Θεώρηση



> Ενεργητική Θεώρηση



<u>απόδειξη</u>

Θεωρούμε σύστημα αξόνων με αρχή το ακίνητο σημείο.

Πίνακας A που περιγράφει (ενεργητική θεώρηση) τη μετατόπιση του στερεού.

A ορθογώνιος

Η νέα θέση του τυχαίου σημείου P : $\vec{R}' = A\vec{R}$

Περιστροφή $\Leftrightarrow$ Υπάρχει διεύθυνση που δεν αλλάζει

$$A\vec{R} = \vec{R} \Leftrightarrow A\vec{R} = \underbrace{\lambda}_{\lambda=1}\vec{R}$$

<u>ισοδύναμο αλγεβρικό πρόβλημα</u>: Ο ορθογώνιος πίνακας A έχει μια ιδιοτιμή ίση με 1.

<u>απόδ</u>: Ορθογωνιότητα: $AA^T = I \rightarrow AA^T - A^T = I - A^T \rightarrow (A-I)A^T = I - A^T$

$|A| = |A|^T$ και $|A|\cdot|A^T| = 1 \rightarrow |A| = |A^T| = 1$

άρα $|A-I|\cancel{|A^T|} = |I-A^T| \rightarrow |A-I| = |I-A^T| = |(I-A^T)^T| = |I-A|$

γενικά ισχύει : $|-B| = (-1)^n|B|$ όταν η διάσταση του πίνακα.

άρα εδώ $|-B| = -|B| \rightsquigarrow |A-I| = -|I-A| \rightarrow |A-I| = 0$

$\rightarrow |A-\lambda_1 I| = 0$ δηλ. η $\lambda_1 = 1$ είναι ιδιοτιμή του A.

Αν X πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του A $\rightarrow |X^{-1}AX| = |\lambda|$, $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow |X^{-1}||A||X| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \rightarrow |A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ και επειδή $|A| = 1$

$\rightarrow \underline{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1}$

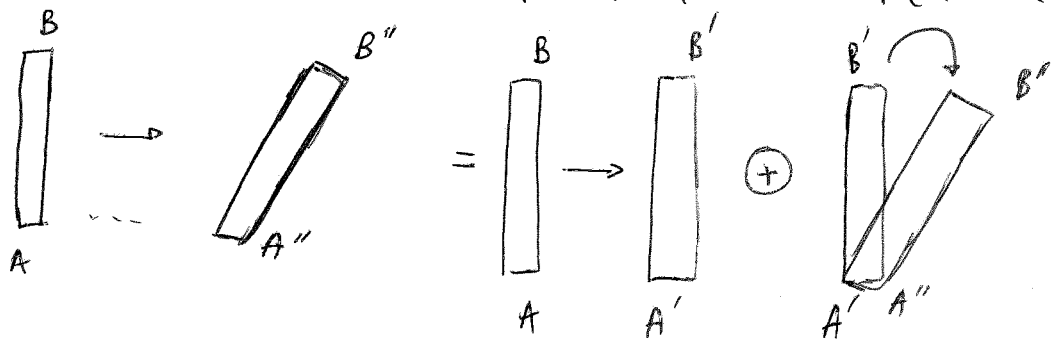
Έχουμε δείξει ότι $\lambda_3 = 1 \rightarrow \lambda_1\lambda_2 = 1$
Α πραγματικός $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda^*$ $\Big\}$ $\lambda\lambda^* = 1 \rightarrow |\lambda|^2 = 1$

$\Rightarrow \lambda = e^{i\phi}$, $\lambda^* = e^{-i\phi}$, όπου ϕ η γωνία στροφής.

Γενική Μετάθεση Σχέσεων – Θεώρημα Chasles

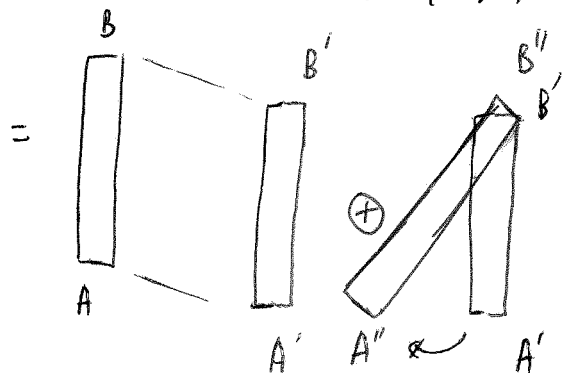
Η γενική μετάθεση σχέσεων ισοδυναμεί με μια μεταφορά και μια περιστροφή.

π.χ. 1)

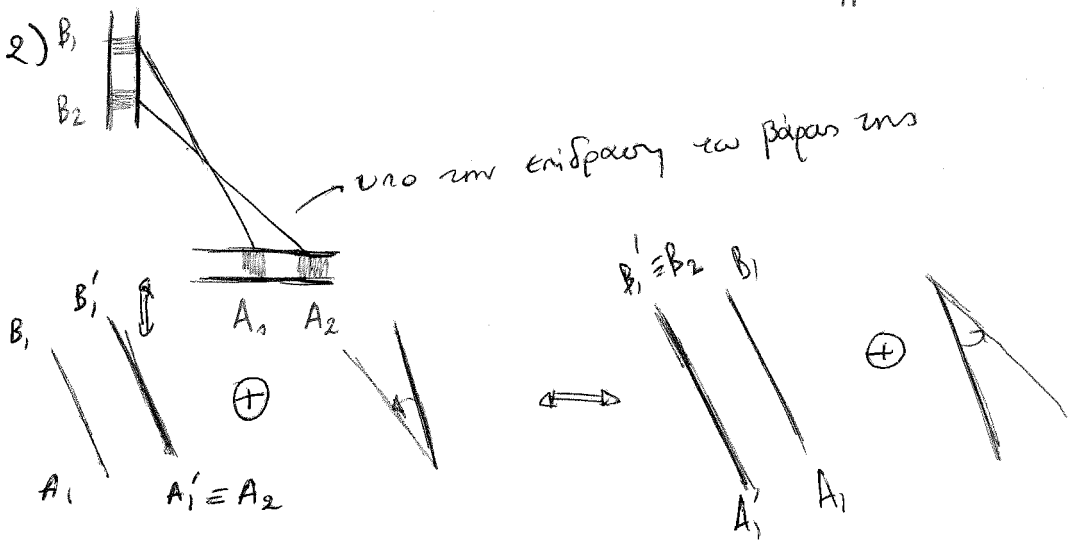


μεταφορά + περιστροφή.

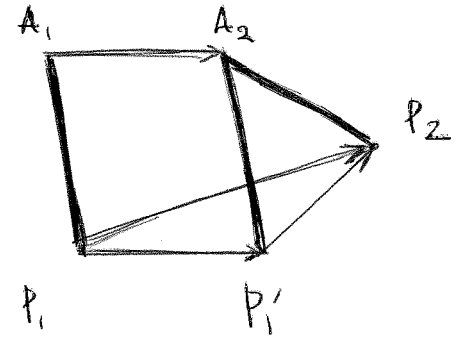
Το είδος της μετάθεσης και η διεύθυνσή της είναι διαφορετικά.



2)



Γενική Σχήματα Κίνησης Στερεού



$$\vec{P_1P_2} = \underbrace{\vec{P_1P_1'}} + \underbrace{\vec{P_1'P_2}} = \underbrace{\vec{A_1A_2}} + \underbrace{\vec{A_2P_2} - \vec{A_2P_1'}}$$

$$\frac{\Delta \vec{r}_P}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{r}_{P/A}}{\Delta t}$$

$\vec{r}_{P/A}$: η σχετική θέση του P ως προς το A.

$\frac{\Delta \vec{r}_{P/A}}{\Delta t}$ → πως μεταβλήθηκε το P κατά την περιστροφή σε σχέση με το A.

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \otimes \vec{r}_{P/A}}$$

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ (ισχύει για οποιοδήποτε σκληρό)

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{P/A}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A})}$$

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΕΩΝ

Ειδικές Περιπτώσεις

- **Μεταφορά** $(\vec{\omega} = \dot{\vec{\omega}} = 0)$

$\vec{a}_P = \vec{a}_A$ και $\vec{v}_P = \vec{v}_A$

- **Περιστροφή**

> Αν το A είναι σημείο του άξονα τότε $\vec{v}_A = \vec{a}_A = 0$

> Αν το A δεν είναι σημείο του άξονα, $\vec{v}_A = \cancel{\vec{v}_0}^{\,0} + \vec{\omega} \times \vec{OA}$

$\vec{a}_A = \cancel{\vec{a}_0}^{\,0} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OA})$, όπου O: σημείο του άξονα.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AP} = \vec{\omega} \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times \vec{AP} \rightarrow \underline{\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{OP}}$$

ίδιο σκέφτομαι κοινό για <u>όλα</u> τα σημεία

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_A &= \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OA}) \\ \vec{a}_P &= \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{AP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AP}) \end{aligned}\right\} \quad \vec{a}_P = \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP}}_{\text{εφαπτομενική (επιτρόχια)}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})}_{\text{κεντρομόλος}}.$$

3/4/2015

13

Αναλλοίωτες της συγχρόνου κίνησης

όχι σε σχέση με το χρόνο, όπως με άλλα φυσικά μεγέθη.

Στο χώρο (αναλλοίωτες για όλα τα σημεία του ίδιου στερεού)

1) Γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ (σαν διάνυσμα)

Είναι κοινή για όλο το στερεό.

2) Νόμος των ταχυτήτων: $\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AP}$

Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά με $\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$ (εσ. γινόμενο)

$$\vec{V}_P \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \vec{V}_A \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} + \cancel{(\vec{\omega} \times \vec{AP}) \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}} \rightarrow \boxed{\vec{V}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{V}_A \cdot \vec{\omega}}$$

οι προβολές των ταχυτήτων πάνω στον $\boxed{\text{συγχρόνου}}$ άξονα περιστροφής για όλα τα σημεία ενός στερεού είναι ίσες.

Αν $\vec{V}_P \cdot \vec{\omega} = 0$ τότε <u>όλες</u> οι ταχύτητες είναι κάθετες στον συγχρόνου άξονα και έχουμε μια (συγχρόνου) επίπεδη κίνηση (για να τα μελετήσουμε μπορώ να πάρω φέτα).

<u>Παρατηρήσεις</u> (για Ν. ταχυτήτων, Ν. επιταχύνσεων)

- Δύο σημεία σε διεύθυνση ίδια με τον άξονα περιστροφής έχουν ίδια ταχύτητα. (πχ. περιστροφή ενός κυλίνδρου: δύο σημεία στην ίδια απόσταση από τον άξονα)

<u>Απόδειξη</u>: $\vec{V}_{P_2} = \vec{V}_{P_1} + \cancel{\vec{\omega} \times \vec{P_1P_2}}^{\,0}$ όταν $\vec{P_1P_2} \parallel \vec{\omega}$.

<u>Δεν ισχύει</u> το ίδιο για τις επιταχύνσεις

$$\vec{a}_{P_2} = \vec{a}_{P_1} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{P_1P_2}} + \vec{\omega} \times \cancel{(\vec{\omega} \times \vec{P_1P_2})} \quad \text{άρα } \vec{a}_{P_2} \neq \vec{a}_{P_1}$$

για να μηδενιστεί αυτό πρέπει $\dot{\vec{\omega}} \parallel \vec{P_1P_2} \rightarrow \dot{\vec{\omega}} \parallel \vec{\omega}$

Επομένως $\vec{a}_{P_1} = \vec{a}_{P_2}$ <u>αν</u> $\dot{\vec{\omega}} \parallel \vec{\omega}$: έχουμε μεταβολή στο ω μόνο κατά μέτρο (με σταθερό άξονα περιστροφής)

Α' Νόμος Προβολών

ν. ταχυτήτων: $\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AP} \rightarrow \vec{V}_P \cdot \vec{AP} = \vec{V}_A \cdot \vec{AP} + \cancel{(\vec{\omega} \times \vec{AP}) \cdot \vec{AP}}^{\,0}$

$\rightarrow \underline{\vec{V}_P \cdot \vec{AP} = \vec{V}_A \cdot \vec{AP}}$ (νόμος προβολών)

Παράδειγμα

2)

A : $\vec{r}_A (10, 15, 20)$, $\vec{V}_A = (5, 20, 10)$

B : $\vec{r}_B (15, 20, 5)$, $\vec{V}_B = (10, 18, V_{Bz})$

Σταθερά της $\vec{\omega}$ στη AB = 1 rad/s

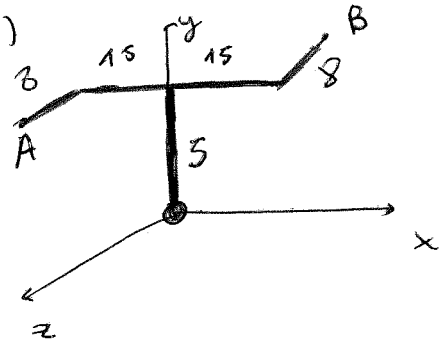
i) $V_{Bz} = ;$

i) $\vec{\omega} = ?$ σημαία

(1) $\boxed{\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}}$ ο νόμος των ταχυτήτων εμπεριέχει και τη σταθερότητας και τον νόμο προβολών.

2) $\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = 1 \text{ rad/s}$

(b)

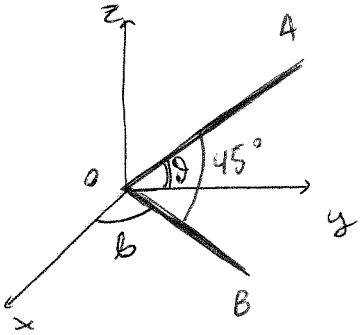


$\vec{V}_A = 250\,\hat{i} + 15\,\hat{j} + V_{Az}\,\hat{k}$

$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + 30\,\hat{j} + \omega_z \hat{k}$

Ζητούμενα: $\vec{\omega}, \vec{V}_A, \vec{V}_B$.

Παράδειγμα



$\beta = 60°$, $V_B = V$

$OA = l$ Το OA περιστρέφεται στο επίπεδο Oyz

$OB = 2l/3$ Το OB Oxy.

Ζητ.: $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{\omega}$ σα συνάρτηση των l, V, β.

Β $\vec{V}_B = \cancel{\vec{V}_O}^{\,0} + \vec{\omega} \times \vec{OB} \rightarrow \vec{V}_B = (\omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}) \times$

$\times \left[\frac{2l}{3} (\cos\beta\, \hat{x} + \sin\beta\, \hat{y}) \right]$

$\Rightarrow \vec{V}_B = \frac{2l}{3} \left(-\omega_z \sin\beta\, \hat{x} + \omega_z \cos\beta\, \hat{y} + (\omega_x \sin\beta - \omega_y \cos\beta)\, \hat{z} \right)$

$\vec{V}_B$ πάνω στο Oxy $\rightarrow V_{Bz}=0 \rightarrow \omega_y = \tan b\, \omega_x$

άρα $V = \frac{2l}{3}\omega_z \rightarrow \omega_z = \frac{3}{2}\frac{V}{l}$

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας σίγουρα περνά από το O.

A) $\vec{V}_A = \cancel{\vec{V}_O} + \vec{\omega}\times OA$

$$\vec{V}_A = l\left[(\omega_y \sin\theta - \omega_z\cos\theta)\,\hat{x} - \omega_x \sin\theta\,\hat{y} + \omega_x\cos\theta\,\hat{z}\right]$$

$$\vec{V}_A\cdot\hat{x} = 0 \rightsquigarrow \omega_y = \frac{\omega_z}{\tan\theta} = \frac{3}{2}\frac{V}{l\tan\theta},\quad \omega_x = \frac{3}{2}\frac{V}{l}\frac{1}{\tan\theta\tan\beta}$$

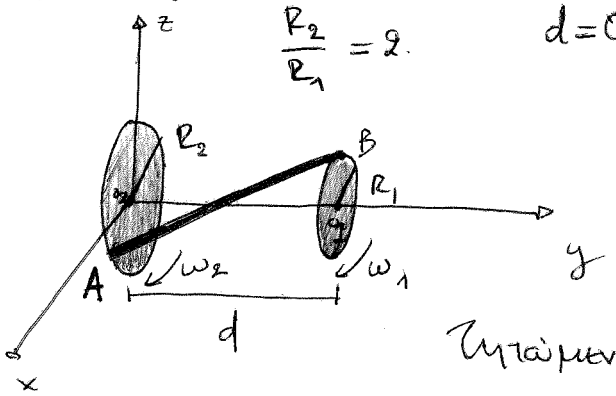
έχω τελείωνα ως προς το θ

Εύρεση του θ: $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = |\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|\cos 45^\circ = \frac{2l^2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sin b}$

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = \left[l(\cos\theta\,\hat{y} + \sin\theta\,\hat{z})\right]\cdot\left[\frac{2l}{3}(\cos\beta\,\hat{x} + \sin\beta\,\hat{y})\right]$$

αν το β είναι μικρό, δε θα αναφέρει άλλη αξονά σε τάξο.

Παράδειγμα



$\frac{R_2}{R_1} = 2$ $\qquad d = O_1O_2 = 2R_2,\ \omega_1 = 2\ \text{rad/s}$

O_1O_2 στον Oy

κίνηση τροχιών $\perp Oy$

Ζητούμενα $\omega_2, \vec{V}_A, \vec{\omega}_p$.

3 σχέσεις: κάθε σχέσι έχει εν δίει τα γωνιακή ταχύτητα.

$$\vec{V}_A = \cancel{\vec{V}_{O_2}}^{\,0} + \vec{\omega}_2\times\vec{O_2A} = \omega_2\hat{y}\times R_2\hat{x} = R_2\omega_2\hat{z}$$

$$\vec{V}_B = \cancel{\vec{V}_{O_1}}^{\,0} + \vec{\omega}_1\times\vec{O_1B} = -\omega_1\hat{y}\times R_1\hat{z} = -\omega_1R_1\hat{x}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_p\times\underbrace{\vec{AB}}_{\text{ράβδος}} \rightarrow -R_1\omega_1\hat{x} = R_2\omega_2\hat{z} + (\omega_{px}\hat{x} + \omega_{py}\hat{y} + \omega_z\hat{z})\times(-R_2\hat{x} + d\hat{y} + R_1\hat{z})$$

3 εξισώσεις $\qquad$ + 1 εξίσωση: $\vec{\omega}_p\cdot\vec{AB} = 0$ αυθαίρετο.

4 άγνωστοι $(\vec{\omega}_p, \omega_2)$

Περιγραφή της ράλδα γύρω από τον άξονά της είναι αδιάφορες γιατί
στην αλλήλων ύποπτα, επιμένω έχω ένα ανάλογο άγνωστο.

ω! ωραία γράφει... όχι πολύ ωραία όμως.

ΕΠΙΠΕΔΗ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Στιγμιαία Επίπεδη Κίνηση: $\forall$ σημείο P ισχύει ότι $\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0$

Συνεχώς Επίπεδη Κίνηση: $\forall$ σημείο P:

i) $\vec{a}_P(t) \cdot \vec{\omega}(t) = 0$ για $t \geq t_0$

ii) $\vec{v}_P(t_0) \cdot \vec{\omega}(t_0) = 0$

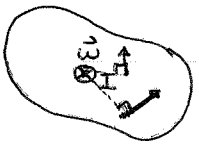
iii) $\vec{\omega}(t) \times \vec{\omega}(t_0) = 0$ (ο άξονας περιστροφής είναι σταθερός)

Μελέτη της κίνησης μέσω επιπέδων δίσκων.

Δεν χρειάζεται να παρακολουθώ την κίνηση έξω του σώματος, αρκεί να παρακολουθώ την κίνηση της "φέτας".

Στιγμιαίος Πόλος Περιστροφής: Το σημείο I του δίσκου ή μιας νοητής προέκτασής του, από το οποίο διέρχεται ο άξονας περιστροφής ονομάζεται Σ.Π.Π.

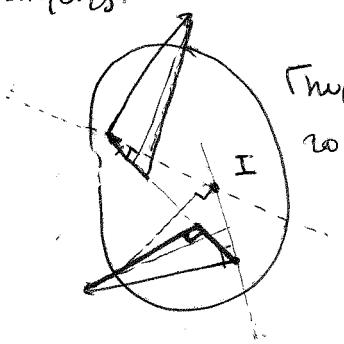
Έστω η επίπεδη κίνηση.



$\vec{v}_I = 0$ (ακίνητο σημείο άξονα περιστροφής)

$\vec{v}_P = \cancel{\vec{v}_I}^{\,0} + \vec{\omega} \times \vec{IP}$ (νόμος ταχυτήτων)

Δείχνει ότι η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα, και βρίσκεται πάνω στο επίπεδο της κίνησης.



Γνωρίζοντας δύο ταχύτητες του σώματος, φέροντας τις κάθετες αποστάσεις, το σημείο τομής είναι το I.

Όμως πρέπει να ισχύει ο νόμος των ρ ταχυτήτων.

Επίσης, αν και $\vec{v}_I = \vec{0}$, $\vec{a}_I \neq \vec{0}$.

Νόμος Ταχυτήτων: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$

Νόμος Επιταχύνσεων: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{AB} \boxed{-\omega^2 \vec{AB}}$ — μόνο στην επίπεδη κίνηση

Επί στην τριοδιάστατη κίνηση $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB})$

όμως $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) = \vec{\omega} \cdot \cancel{(\vec{\omega} \cdot \vec{AB})} - \vec{AB}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{AB}$.

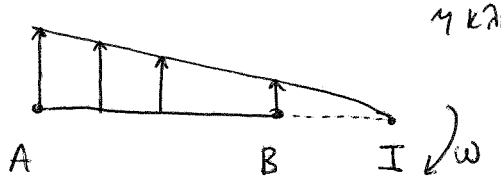
μηδέν αφού $\vec{\omega} \perp \vec{AB}$ στην επίπεδη κίνηση.

$(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}))$

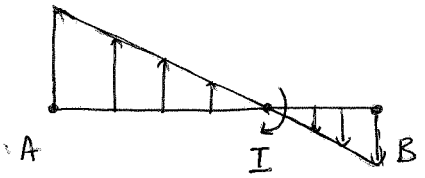
Αν έχω και μεταφορά, ο σπν αλλάζει θέση.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

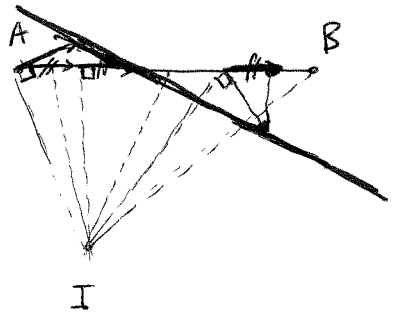
γραμμική,
η κλίση εξαρτάται από το $|\vec{\omega}|$.



(I εκτός του AB)



(I εντός του AB)



όλες οι ταχύτητες δημιουργούν μια ευθεία.

Για να βρω ακριβώς πού είναι

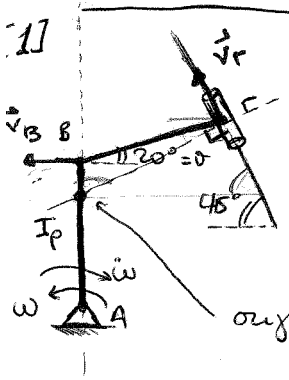
i) ταχύτητα κάθετες στις "ακτίνες"

ii) νόμος προβολών.

$$\frac{B\Gamma}{\sin 45} = \frac{BI_\rho}{\sin(180-110-45)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

[1]



$AB = l$

$B\Gamma = 2l$

$\omega, \dot{\omega}$

Ζητούνται: $\omega_\rho, \dot{\omega}_\rho, \vec{V}_\Gamma$ $\quad \rho = B\Gamma$.

Η $\vec{V}_\rho$ οπωσδήποτε είναι πάνω στη ευθεία-οδηγό.

στιγμιαίος πόλος περιστροφής της ΒΓ.

$$\left.\begin{aligned} V_B &= \omega l \\ V_B &= \omega_\rho (I_\rho B) \end{aligned}\right\} \quad \omega l = \omega_\rho (I_\rho B) \rightarrow \omega_\rho = \frac{\omega \cdot l}{(I_\rho B)}$$

το I_ρ προσδιορίζεται με γεωμετρία.

$V_\Gamma = \omega_\rho (I_\rho \Gamma)$

2ος τρόπος: χρησιμοποιώντας τον νόμο των προβολών: $\vec{V}_\Gamma \cos 45^\circ = V_B \cos 20^\circ$

(πιο απλό το νόμο προβολών κρύβεται ο νόμος ταχυτήτων: $\vec{V}_\Gamma = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{B\Gamma}$.

και πολ/ντας με $\vec{B\Gamma}$: $\underbrace{\vec{V}_\Gamma \cdot \vec{B\Gamma} = \vec{V}_B \cdot \vec{B\Gamma}}_{\text{ίδιο ν. προβολών}} + \cancel{(\vec{\omega} \times \vec{B\Gamma}) \cdot \vec{B\Gamma}}^{\,0}$

Η

Με νόμο ταχυτήτων: $AB: \vec{v}_B = \cancel{\vec{v}_A}^{\,0} + \vec{\omega} \times \vec{AB} = \omega \hat{z} \times l\hat{y} = -l\omega\hat{x}$.

ν. επιταχύνσεων: $\vec{a}_B = \cancel{\vec{\alpha}_A}^{\,0} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{AB} - \omega^2 \vec{AB} = -\dot{\omega}\hat{z} \times l\hat{y} - \omega^2 l\hat{y} = \dot{\omega} l\hat{x} - \omega^2 l\hat{y}$.

$\vec{v}_\Gamma = \vec{v}_B + \vec{\omega}_\rho \times \vec{B\Gamma} \Rightarrow v_\Gamma(-\cos 45\,\hat{x} + \sin 45\,\hat{y}) = -l\omega\hat{x} + \omega_\rho \hat{k} \times 2l(\cos\vartheta\,\hat{x} + \sin\vartheta\,\hat{y})$

(16)

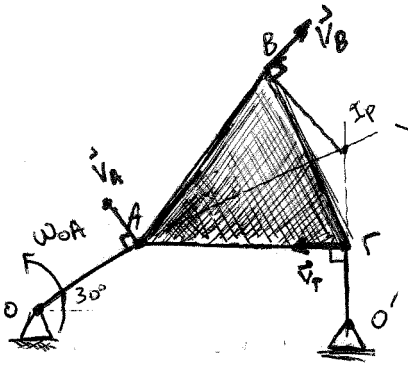
$$\Rightarrow \begin{cases} -\cos 45^\circ v_\Gamma = -l\omega - 2l\omega_\rho \sin\vartheta \\ v_\Gamma \sin 45^\circ = 2l\omega_\rho \cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow \omega_\rho, v_\Gamma = \text{γνωστά.}$$

$$\vec{a}_\Gamma = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_\rho \times \vec{B\Gamma} - \omega_\rho^2 \vec{B\Gamma} \Rightarrow a_\Gamma(-\cos 45\,\hat{x} + \sin 45\,\hat{y}) = \underbrace{l\dot{\omega}\hat{x} - l\omega^2\hat{y}}_{\vec{a}_B} + \dots$$

και έτσι υπολογίζω την a_Γ και την $\dot{\omega}_\rho$.

Οι διευθύνσεις και κατευθύνσεις καθορίζονται από τις γωνίες.

[2]



Δίνονται $OA = l$, $AB = B\Gamma = \Gamma A = 2l$, ω_{OA} (ακαριαίο πόλο του ABΓ).

Ζητούνται v_A, v_B, v_Γ, $\underline{\omega}_{\pi\lambda}$

$|\vec{v}_A| = \omega_{OA}\, l$

Νόμος των προβολών για το ABΓ: $v_\Gamma = v_A \cos 60^\circ$

Για το $\vec{v}_B$, βρίσκω τον I_ρ και από εκεί $\vec{v}_B = \cancel{\vec{\omega}_{\pi\lambda} \times \vec{I_\rho B}}$. $\vec{\omega} \times \vec{I_\rho B}$

$v_A = \underline{\omega}(I_\rho A) = \underline{\omega}\,\dfrac{2l}{\sin 60^\circ}$

Ομ.

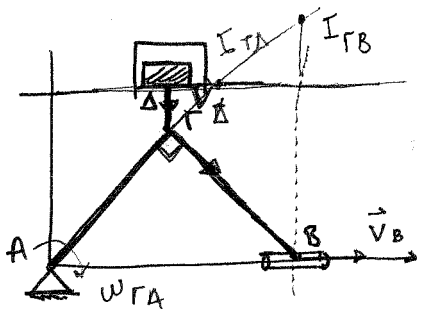
$v_B = \underline{\omega}(I_\rho B)$

<u>εναλλακτικά</u>: <u>OA</u> $\vec{v}_A = \cancel{\vec{v}_O}^{\,0} + \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA}$

<u>O'Γ</u>: $\vec{v}_\Gamma = \cancel{\vec{v}_{O'}} + \vec{\omega}_{O'\Gamma} \times \vec{O'\Gamma}$

$$\left.\begin{aligned} \underline{ABΓ}:\ \vec{v}_A &= \vec{v}_\Gamma + \vec{\omega} \times \vec{\Gamma A} \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} \end{aligned}\right\} \text{νόμοι ταχυτήτων}$$

24/5/2015



Δίνονται: $\Gamma A = 2l$, $\Gamma B = 2l$, $\Gamma\Delta = l$, $v_\Delta = v \downarrow$

Ζητούνται: ΣΠΠ, $\omega_{\Gamma A}$, $\omega_{\Gamma B}$, $\omega_{\Gamma\Delta}$, v_B

1ος νόμος προβολών: ΓΔ: $v_\Gamma \cos 45^\circ = v \rightarrow \boxed{v_\Gamma = v\sqrt{2}}$

$$\omega_{\Gamma\Delta} = \frac{v}{(I_{\Gamma\Delta}\Delta)} = \frac{v_\Gamma}{(I_{\Gamma\Delta}\Gamma)} = \frac{v}{l}$$

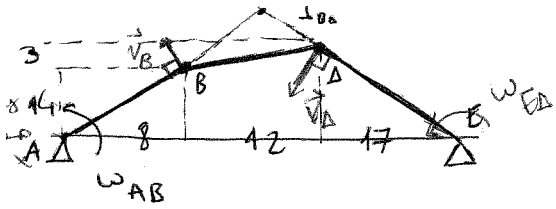
ΑΓ: $\omega_{\Gamma A} = \frac{v_\Gamma}{A\Gamma} = \frac{v\sqrt{2}}{2l}$

ΓΒ: $\omega_{\Gamma B} = \frac{v_\Gamma}{(I_{\Gamma B}\Gamma)} = \frac{v\sqrt{2}}{2l}$

$v_B \cos 45^\circ = v_\Gamma$ ή $v_B = \omega_{\Gamma B} \cdot (I_{\Gamma B}B)$

εναλλακτικά χρησιμοποιώ ν. καταστάσεων από σημείο σε σημείο.

> $\vec{a}_\Delta \neq \vec{0}$, πχ. $\vec{a}_\Delta = -a\hat{y}$ τότε βρίσκω τις επιταχύνσεις με νόμους επιταχύνσεων (η γραφ. λύση δεν παίρνει εδώ)



$\omega_{AB} = 20$ rad/s – σταθ.

ζητούμενα: $\dot{\omega}_{B\Delta}$, $\dot{\omega}_{\Delta E}$

ΣΠΠ(ΒΔ), $I_{B\Delta}$, $\vec{a}_{I_{B\Delta}}$

$\vec{\omega}_{AB} = 20\hat{z}$

$\vec{\omega}_{B\Delta} = \omega_{B\Delta}\hat{z}$

$\vec{\omega}_{\Delta E} = \omega_{\Delta E}\hat{z}$

Νόμος Ταχυτήτων

$AB: \vec{v}_B = \cancel{\vec{v}_A}^{\,0} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB} = 20\hat{z} \times (8\hat{x} + 14\hat{y}) = 160\hat{y} - 280\hat{x}$

$E\Delta: \vec{v}_\Delta = \cancel{\vec{v}_E}^{\,0} + \vec{\omega}_{E\Delta} \times \vec{E\Delta} = \dots = 17\omega_{\Delta E}(\hat{y} - \hat{x})$

$B\Delta: \vec{v}_\Delta = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{B\Delta} \times \vec{B\Delta} \Rightarrow 17\omega_{\Delta E}\hat{y} - 17\omega_{\Delta E}\hat{x} = 160\hat{y} - 180\hat{x} + \omega_{B\Delta}\hat{z} \times (12\hat{x} + 3\hat{y})$

$$\Rightarrow \begin{cases} 17\omega_{\Delta E} = 160 + 12\omega_{B\Delta} \\ -17\omega_{\Delta E} = -280 - 3\omega_{B\Delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega_{B\Delta} = -29{,}3 \text{ rad/s} \\ \omega_{\Delta E} = 11{,}29 \text{ rad/s} \end{array}$$

Νόμος Επιταχύνσεων (παρόλο που η γωνιακή ράβδος δεν έχει γωνιακή επιτ., οι άλλες έχουν)

$\dot{\vec{\omega}}_{AB} = 0$

$\vec{\omega}_{B\Delta} = \dot{\omega}_{B\Delta}\hat{z}$ (επίπεδη κίνηση)

$\dot{\vec{\omega}}_{\Delta E} = \dot{\omega}_{\Delta E}\hat{z}$

$\vec{a}_B = \cancel{\vec{a}_A}^{\,0} + \cancel{\dot{\vec{\omega}}_{AB}}^{\,0} \times \vec{AB} - \omega_{AB}^2 \vec{AB} = -\omega_{AB}^2(8\hat{x} + 14\hat{y})$

$\vec{a}_\Delta = \cancel{\vec{a}_E}^{\,0} + \dot{\vec{\omega}}_{\Delta E} \times \vec{E\Delta} - \omega_{\Delta E}^2 \vec{E\Delta}$

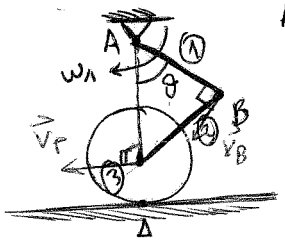
$\vec{a}_\Delta = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_{B\Delta} \times \vec{B\Delta} - \omega_{B\Delta}^2 \vec{B\Delta}$

Φυσικά το $I_{B\Delta}$ συχνά δεν έχει μηδενική ταχύτητα, αλλά μπορεί κάποιανα επιταχύνεται, αφού ο ΣΠΠ αλλάζει.

$\vec{a}_{I_{B\Delta}} = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_{B\Delta} \times \vec{BI} - \omega_{B\Delta}^2 \vec{BI}$

$\vec{v}_B = \cancel{\vec{v}_I}^{\,0} + \vec{\omega}_{B\Delta} \times \vec{IB} \rightarrow \vec{\omega}_{B\Delta} \times \vec{v}_B = \vec{\omega}_{B\Delta} \times (\vec{\omega}_{B\Delta} \times \vec{IB}) = -\omega_{B\Delta}^2 \vec{IB}$

άρα $\vec{IB} = \dfrac{\vec{\omega}_{B\Delta} \times \vec{v}_B}{\omega_{B\Delta}^2}$



$AB = B\Gamma = l$

R

$\omega_1 = \text{σταθ}$

Ζητούμενα: $\omega_2, \omega_3, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$

$\vec{V}_\Delta, \vec{a}_\Delta$, Δ σημείο επαφής

Δ ο ΣΠΠ του δίσκου

A ο ΣΠΠ των ① και ②

$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \hat{z}, \ \dot{\vec{\omega}}_1 = 0$

$\vec{\omega}_2 = \omega_2 \hat{z}, \ \dot{\vec{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2 \hat{z}$

$\vec{\omega}_3 = \omega_3 \hat{z}, \ \dot{\vec{\omega}}_3 = \dot{\omega}_3 \hat{z}$

Νόμος Ταχυτήτων

① $\vec{v}_B = \vec{\omega}_1 \times \vec{AB} = \omega_1 \hat{z} \times [l(\sin\theta \hat{x} - \cos\theta \hat{y})]$

$\Rightarrow \vec{v}_B = l\omega_1(\sin\theta \hat{y} + \cos\theta \hat{x})$

③ $\vec{v}_\Gamma = \cancel{\vec{v}_\Delta} + \vec{\omega}_3 \times \vec{\Delta\Gamma} = \omega_3 \hat{z} \times R\hat{y} \rightarrow \vec{v}_\Gamma = -R\omega_3 \hat{x}$

② $\vec{v}_B = \vec{v}_\Gamma + \vec{\omega}_2 \times \vec{\Gamma B} \Rightarrow l\omega_1 \sin\theta \hat{y} + l\omega_1 \cos\theta \hat{x} = -v_\Gamma \hat{x} + \omega_2 \hat{z} \times [l(\sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{y})]$

$l\omega_1 \sin\theta = l\omega_2 \sin\theta \rightarrow \omega_1 = \omega_2$

$l\omega_1 \cos\theta = -v_\Gamma - l\omega_2 \cos\theta \rightarrow v_\Gamma = 2l\omega_1 \cos\theta$

Επειδή οι ΣΠΠ ταυτίζονται και οι 1, 2 έχουν κοινό σημείο, το B, η κατεύθυνση του $\vec{v}_\Gamma$ καθόριζε τον ΣΠΠ (αν το επίπεδο ήταν κεκλιμένο, το A δε θα ήταν ΣΠΠ

Νόμος Επιταχύνσεων

(1) $\vec{a}_B = \cancel{\vec{a}_A}^{\,0} + \cancel{\dot{\vec{\omega}}_1}^{\,0} \times \vec{AB} - \omega_1^2 \vec{AB} = -\omega_1^2 l(\sin\theta \hat{x} - \cos\theta \hat{y})$

(2) $\vec{a}_\Gamma = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_2 \times \vec{B\Gamma} - \omega_2^2 \vec{B\Gamma}$

$a_\Gamma \hat{x} = -\omega_1^2 l(\sin\theta \hat{x} - \cos\theta \hat{y}) + \dot{\omega}_2 \hat{z} \times [-l(\sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{y})] - \omega_2^2(-l)(\sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{y})$

για να μη χάσει επαφή! $\Rightarrow \dot{\omega}_2 = 2\omega_1^2 \cos\theta$

$a_\Gamma = 2l\omega_1^2 \cos\theta \cot\theta$

$\vec{a}_\Delta = \vec{a}_\Gamma + \dot{\vec{\omega}}_3 \times \vec{\Gamma\Delta} - \omega_3^2 \vec{\Gamma\Delta} = a_\Gamma \hat{x} + \dot{\omega}_3 \hat{z} \times (-R\hat{y}) + \omega_3^2 R \hat{y}$

$\vec{a}_\Delta = (a_\Gamma + \dot{\omega}_3 R)\hat{x} + \omega_3^2 R \hat{y}$

$v_\Gamma = -\omega_3 R$ (συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση)

$\downarrow$

$a_\Gamma = -\dot{\omega}_3 R$ άρα $\vec{a}_\Delta = \omega_3^2 R \hat{y}$

ΚΥΛΙΣΗ ΧΩΡΙΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗ

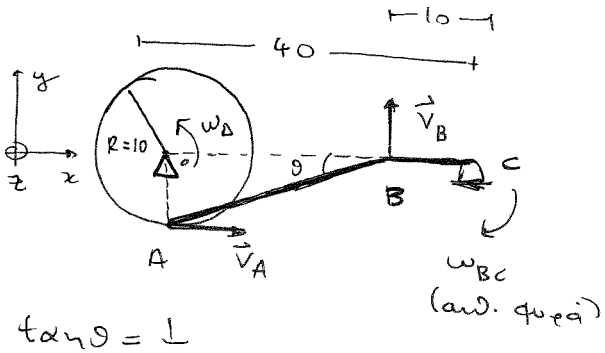
$x = R\phi$

$v = R\omega$

$a = R\dot{\omega}$

29/5/15

(18)



$\omega_\Delta = 2\ rad/s$ (σταθερή)

Ζητούμενα: $\omega_{AB}, \omega_{BC}, \dot{\omega}_{AB}, \dot{\omega}_{BC}$

$V_{A/B}, a_{A/B}$

$\tan\theta = \frac{1}{3}$

ΣΠΠ του AB το O'.

$V_A = \omega_\Delta R$ (σα σημείο του δίσκου)

$V_A = \omega_{AB} \cdot R$ (σα σημείο της AB)

$\omega_\Delta = \omega_{AB}$

V_A = γνωστό

$V_B = \omega_{AB}(OB)$ $\qquad \omega_{BC} = \frac{V_B}{BC}$

$\vec{a}_A = \cancel{\vec{a}_O} + \cancel{\dot{\vec{\omega}}_\Delta \times \vec{OA}} - \omega_\Delta^2 \vec{OA} = -\omega_\Delta^2 \vec{OA} = +\omega_\Delta^2 R\hat{y}$

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_{AB} \times \vec{AB} - \omega_{AB}^2 \vec{AB} = -(\dot{\omega}_{AB} R + \omega_\Delta^2 3R)\hat{x} + \dot{\omega}_{AB} 3R\hat{y}$ (*)

$\vec{AB} = 3R\hat{x} + R\hat{y}$

$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}}_{BC} \times \vec{CB} - \omega_{BC}^2 \vec{CB} = -R\dot{\omega}_{BC}\hat{y} + \omega_{BC}^2 R\hat{x}$ (**)

$\vec{CB} = -R\hat{x}$

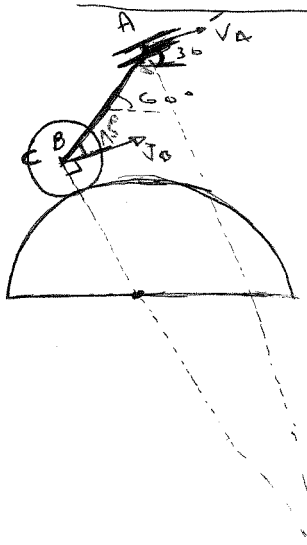
από τις δυο σχέσεις προσδιορίζω $\dot{\omega}_{AB}, \dot{\omega}_{BC}$

$$\boxed{\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B \qquad \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B}$$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

γ. ταχύτητων: $\vec{V}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{BA}$

γ. επιταχύνσεων: $\vec{a}_{A/B} = \dot{\vec{\omega}}_{AB} \times \vec{BA} - \omega_{AB}^2 \vec{BA}$



$r = 1.2\,m$

$R = 3\,m$

$AB = 6\,m = l$

$V_A = 3\,m/s$

Ζητούμενα: ω_C, V_B.

Νόμος Ημιτόνων: $V_B \cos 15 = V_A \cos 30 \Rightarrow V_B \simeq 2.69\ m/s$

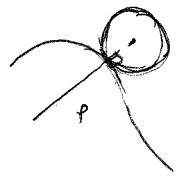
$\omega_C = \frac{V_B}{r} \simeq 2.24\ rad/s$

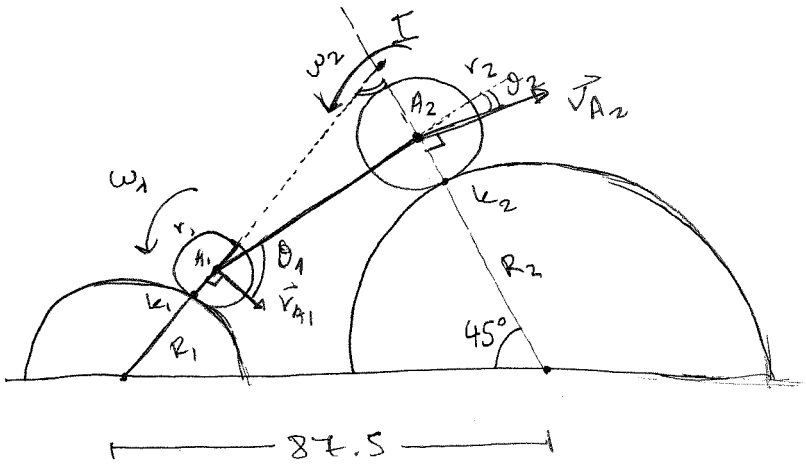
ή εναλλακτικά

$V_A = V_A(\cos 30\hat{x} + \sin 30\hat{y})$, $\vec{V}_B = V_B(\cos 45\hat{x} + \sin 45\hat{y})$

$\vec{BA} = l(\cos 60\hat{x} - \sin 60\hat{y})$

$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{BA}$





$r_1 = 10\,cm$ $r_2 = 15\,cm$

$R_1 = 20\,cm$ $R_2 = 30\,cm$

$\omega_1 = 5\ rad/s$

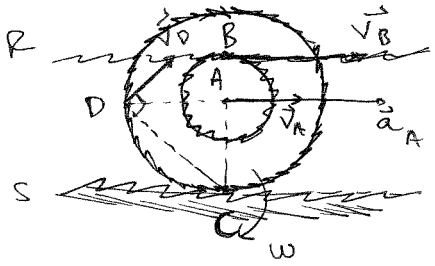
$V_{A_1} = \omega_1 r_1$ νόμος πρόλοξιν: $V_{A_1}\cos\theta_1 = V_{A_2}\cos\theta_2 \rightsquigarrow V_{A_2} =$ γνωστό $\rightsquigarrow \omega_2 = \dfrac{V_{A_2}}{r_2}$

$$\omega_{A_1A_2} = \frac{V_{A_1}}{IA_1} = \frac{V_{A_2}}{IA_2}$$

$\vec{r}_{A_1} = 30(\cos 60\hat{x} + \sin 60\hat{y})$ $\vec{r}_{A_2} = (87{,}5 - 45\cos 45)\hat{x} + 45\sin 45\hat{y}$.

$\vec{A_1A_2} = \vec{r}_{A_2} - \vec{r}_{A_1}$ $\vec{k_1A_1} = r_1(\cos 60\hat{x} + \sin 60\hat{y})$ $\vec{k_2A_2} = r_2(-\cos 45\hat{x} + \sin 45\hat{y})$

$\vec{V}_{A_1} = \vec{\omega}_1 \times \vec{k_1A_1}$, $\vec{V}_{A_2} = \vec{\omega}_2 \times \vec{k_2A_2}$, $\vec{V}_{A_1} = \vec{V}_{A_2} + \vec{\omega}_{A_1A_2} \times \vec{A_2A_1}$



$V_A = 36$ cm/s $\qquad R_1 = 9$ cm, $R_2 = 6$ cm

$\vec{a}_A = 45$ cm/s^2

<u>ζητούμενα</u>: $\omega_A, \dot{\omega}_A, V_R, a_R, \vec{V}_C, \vec{V}_D, \vec{a}_C, \vec{a}_D$

$$\vec{\omega} = -\frac{V_A}{R_1}\hat{z}$$

$$\vec{V}_R = \vec{V}_B = (R_1+R_2)\omega\hat{x}, \quad \vec{V}_C = 0, \quad \vec{V}_D = \omega|CD|(\cos 45\hat{x} - \sin 45\hat{y})$$

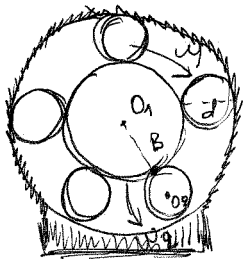
$$\dot{\omega} = -\frac{a_A}{R_1} \rightsquigarrow \boxed{\dot{\vec{\omega}} = -\frac{a_A}{R_1}\hat{z}}$$

Σωστός τα εξασφαλίζει ότι $\vec{a}_C \parallel \hat{y}$ μόνο κεντρομόλος!

$$\vec{a}_R = \vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{AB} - \omega^2 \vec{AB} = a_A\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\hat{x} - \frac{V_A^2}{R_1^2}R_2\hat{y} = 135\hat{x} - 96\hat{y}$$

C: μηδ. ταχύτητα, αλλά επιτάχυνση.

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\omega} \times \vec{AC} - \omega^2\vec{AC} = \cancel{a_A\hat{x}} - \cancel{\frac{a_A}{R_1}\hat{z} \times (R_1\hat{y})} + \omega^2 R_1\hat{y} = \underline{\underline{\omega^2 R_1\hat{y}}}$$



ω_1 γνωστό

<u>ζητούμενα</u>: ω_2 (γωνιακή ταχ. εγωστρόφου κυλίνδρου)

ω_3 (" " περιστροφής αγώνα O_2)

το B είναι σημείο και των δύο κυλίνδρων.

$$\omega_1\frac{D}{2} = \omega_2 d \rightsquigarrow \boxed{\omega_2 = \omega_1\frac{D}{2d}}$$

$$O_2: \quad V_{O_2} = \omega_2\frac{d}{2}$$

$$V_{O_2} = \omega_3\frac{(D+d)}{2}$$

$$\boxed{\omega_3 = \frac{\omega_2 D}{2(D+d)}}$$

$$\left.\frac{d\vec{H}_u}{dt}\right|_{\Sigma} = \vec{M}_u$$

κύριο σύστημα: $\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\,\omega_y \omega_z = M_x \\ \vdots \end{cases}$

$$\left.\frac{d\vec{H}_u}{dt}\right|_{Oxyz} = \left.\frac{d\vec{H}_u}{dt}\right|_{Cxyz} + \vec{\omega} \times \vec{H}_u$$

πολικές $\vec{r} = r\hat{i}_r$, $\vec{v} = \dot{r}\hat{i}_r + r\dot{\theta}\hat{i}_\theta$, $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{i}_\theta$

$d\vec{s} = (r, r\,d\theta)$

κυκλικές $\vec{v} = v\hat{i}_t$, $\vec{a} = \dot{v}\hat{i}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{i}_\theta$

σφαιρικά $d\vec{s} = (r, r\,d\theta, r\sin\theta\, d\varphi)$

Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0.$

jacobi: $h := \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}.$

$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ αν $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$ τότε h διαμερίζεται

ΚΙΝΟΥΜΕΝΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ - ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

6/5/2015

(30)

* Απόλυτος και Σχετικός Ρυθμός Μεταβολής Διανύσματος

Σταθερό πλαίσιο (Σ): $OXYZ$ $(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_3)$

Κινούμενο πλαίσιο (k): $Kxyz$ $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$\vec{A} = a_1' \hat{\varepsilon}_1 + a_2' \hat{\varepsilon}_2$

εκφρασμένο ως προς το κινούμενο: $\vec{A} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3$

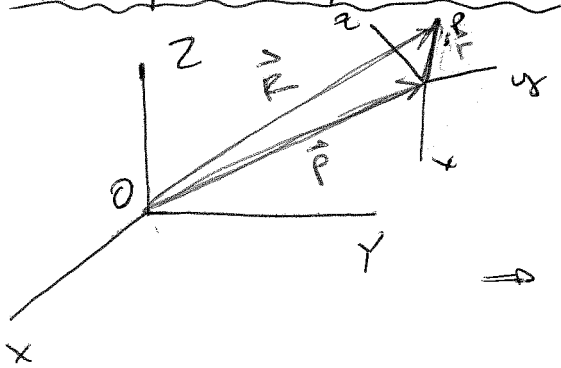
$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{\Pi_\Sigma} = \underbrace{\dot{a}_1 \hat{e}_1 + \dot{a}_2 \hat{e}_2 + \dot{a}_3 \hat{e}_3}_{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{\Pi_k}} + \underbrace{a_1 \frac{d\hat{e}_1}{dt} + a_2 \frac{d\hat{e}_2}{dt} + a_3 \frac{d\hat{e}_3}{dt}}_{\text{αν το } \Pi_k \text{ δεν είναι προσανατολισμό}}$$

Αν η γωνιακή ταχύτητα του Π_k, μετρημένη στο Π_Σ είναι $\vec{\omega}$, $\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i$, ισχ.

άρα τελικά $$\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{\Pi_\Sigma} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{\Pi_k} + \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

Απόλυτη και Σχετική Ταχύτητα

$\vec{R} = \vec{\rho} + \vec{r}$



$$\left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_\Sigma = \left.\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right|_\Sigma + \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_\Sigma = \vec{v}_{k|\Sigma} + \left(\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_k + \vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{P|\Sigma} = \underbrace{\vec{v}_{k|\Sigma} + \vec{\omega} \times \vec{r}}_{\text{μεταφορική ταχύτητα (π.χ. μεταλλάκι)}} + \underbrace{\vec{v}_{P|k}}_{\text{σχετική (ή τοπική) ταχύτητα (π.χ. μυρμήγκι)}}$$

Απόλυτη και Σχετική Γωνιακή Ταχύτητα και Γωνιακή Επιτάχυνση

$\vec{\omega}$: σχετική γωνιακή ταχύτητα στο Π_k

$\vec{\Phi}$: γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του Π_k ως προς το Π_Σ

$$\vec{\omega}_{\Sigma\Upsilon\Lambda} = \underbrace{\vec{\Phi}}_{\text{μεταφορική}} + \underbrace{\vec{\omega}}_{\text{τοπική - σχετική}}$$

Γωνιακή Επιτάχυνση

$$\dot{\vec{\omega}}_{\Sigma/N} = \left.\frac{d\vec{\omega}_{\Sigma/N}}{dt}\right|_{\pi_\Sigma} = \left.\frac{d\vec{\Phi}}{dt}\right|_{\pi_\Sigma} + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_{\pi_\Sigma} = \left.\frac{d\vec{\Phi}}{dt}\right|_{\pi_\Sigma} + \left(\left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_{\pi_k} + \vec{\Phi}\times\vec{\omega}\right)$$

άρα
$$\dot{\vec{\omega}}_{\Sigma/N} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{\Phi}}{dt}\right|_{\pi_\Sigma} + \vec{\Phi}\times\vec{\omega}}_{\text{μεταφορικής γωνιακής επιτάχυνσης}} + \underbrace{\left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_{\pi_k}}_{\text{τοπική-σχετική γωνιακή επιτάχυνση}}$$

Απόλυτη και Σχετική Επιτάχυνση

$$\vec{a}_{P/\Sigma} = \left.\frac{d\vec{v}_{P/\Sigma}}{dt}\right|_{\pi_\Sigma} = \left.\frac{d\vec{v}_{k/\Sigma}}{dt}\right|_{\pi_\Sigma} + \left.\frac{d\vec{v}_{P/k}}{dt}\right|_{\pi_\Sigma} + \left.\frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt}\right|_{\pi_\Sigma}$$

$$\left.\frac{d\vec{v}_{k/\Sigma}}{dt}\right|_{\pi_\Sigma} = \vec{a}_{k/\Sigma}$$

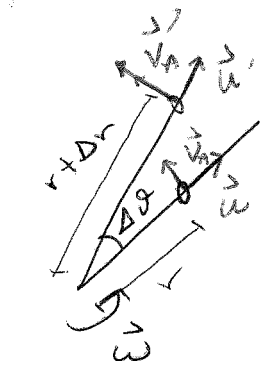
$$\left.\frac{d\vec{v}_{P/k}}{dt}\right|_{\pi_\Sigma} = \left.\frac{d\vec{v}_{P/k}}{dt}\right|_{\pi_k} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{P/k} = \vec{a}_{P/k} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{P/k}$$

$$\left.\frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt}\right|_{\pi_\Sigma} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_{\pi_\Sigma}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\pi_\Sigma} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\left[\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\pi_k} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right] =$$

$$= \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{P/k} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

<u>άρα</u>
$$\vec{a}_{P/\Sigma} = \underbrace{\vec{a}_{k/\Sigma} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{μεταφορική επιτάχυνση}} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}_{P/k}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{a}_{P/k}}_{\text{τοπική}}$$

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ CORIOLIS ΣΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΗ ΚΙΝΗΣΗ



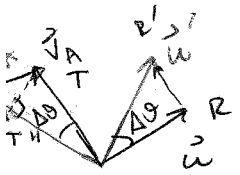
$\vec{v}_A$: μεταφορική , $\vec{u}$: σχετική - τοπική

$v_A' > v_A$ αφού $r+\Delta r > r$

$u = u'$ (σταθερή σχετική ταχύτητα)

$v_A = r\omega$, $v_A' = (r+\Delta r)\omega$

$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{u}$, $\vec{v}' = \vec{v}_A' + \vec{u}'$



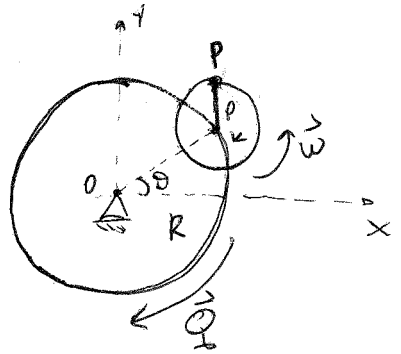
$$\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v} = (\vec{v}_A' - \vec{v}_A) + (\vec{u}' - \vec{u}) =$$

$$= (\vec{TT''} + \vec{T''T'}) + \vec{RR'}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{TT''}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_A \Delta\vartheta}{\Delta t} = r\omega \cdot \omega = r\omega^2 = a_{\mu\varepsilon\tau}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{RR'}{\Delta t} + \frac{T''T'}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{u\Delta\vartheta}{\Delta t} + \frac{v_A' - v_A}{\Delta t}\right) = u\omega + \lim \frac{\Delta r\,\omega}{\Delta t} = u\omega + u\omega = 2u\omega$$



$\vec{\omega}$: ο μικρός ως προς το μεγάλο

$\vec{v}_{P/\Sigma}$, $\vec{a}_{P/\Sigma} = ;$

$$\vec{v}_{P/\Sigma} = \underbrace{\vec{v}_{K/\Sigma} + \vec{\Omega} \times \vec{KP}}_{\text{μεταφορική}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{KP}}_{\text{τοπική}}$$

· Εκφραση με σύνθετη γωνιακή ταχύτητα (περιστροφή)

Νόμος των χωρίων: $\vec{v}_P = \vec{v}_K + \vec{\omega}_{\Sigma\Delta} \times \vec{KP} = \vec{v}_K + (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \times \vec{KP}$

$\vec{v}_K = -\Omega\hat{z} \times \vec{OK} = -\Omega\hat{z} \times R(\cos\vartheta\,\hat{x} + \sin\vartheta\,\hat{y}) = \Omega R(\sin\vartheta\,\hat{x} - \cos\vartheta\,\hat{y})$

$\vec{\Omega} \times \vec{KP} = -\Omega\hat{z} \times \rho\hat{y} = \Omega\rho\hat{x}$

$$\vec{\omega}\times\vec{KP} = \omega\hat{z}\times\rho\hat{Y} = -\omega\rho\hat{X}$$

$$\vec{V}_{PI\Sigma} = [\Omega(R\sin\vartheta+\rho)-\omega\rho]\hat{X} - \Omega R\cos\vartheta\,\hat{y}$$

$$\underline{\vec{a}_{PI\Sigma} = \vec{a}_{\mu\epsilon\tau}+\vec{a}_{cor}+\vec{a}_{\tau o\pi}} \qquad \dot{\vec{\Omega}}=0,\ \dot{\vec{\omega}}=0$$

$$\vec{a}_{\mu\epsilon\tau} = \vec{a}_{KI\Sigma} + \cancel{\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{KP}} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{KP}) = \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{OK}) + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{KP}) = -\Omega^2\vec{\ }$$

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\Omega}\times\vec{V}_{PIK} = -2\Omega\hat{z}\times(-\omega\rho\hat{x}) = 2\Omega\omega\rho\hat{Y}$$

$$\vec{a}_{o\chi\epsilon\tau} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{KP}) = -\omega^2\vec{KP}$$

<u>Σύνθεση</u>: $\vec{a}_{PI\Sigma} = \vec{a}_{KI\Sigma} + \dot{\vec{\omega}}_{\Sigma I}\times\vec{KP} + \vec{\omega}_{\Sigma I}\times(\vec{\omega}_{\Sigma I}\times\vec{KP})$

$$\vec{\omega}_{\Sigma I} = \vec{\omega}+\vec{\Omega}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_{\Sigma I} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\Big|_{\Sigma} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_{K} + \underbrace{\vec{\Omega}\times\vec{\omega}} = 0$$

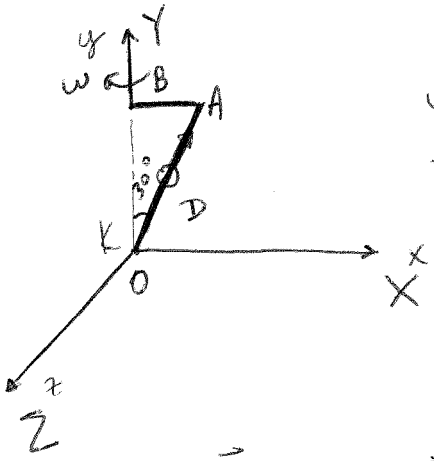
αν οι περιστροφές ήταν γύρω από μη παράλληλους άξονες, $\dot{\vec{\omega}}_{\Sigma I}\neq 0$ λόγω $\vec{\Omega}\times\vec{\omega}$

$$\vec{v}_{P/\Sigma} = \underbrace{\vec{v}_{K/\Sigma} + \vec{\omega}\times\vec{r}}_{\text{μεταφορική}} + \underbrace{\vec{v}_{P/K}}_{\text{τοπική}}$$

αποστάσεις στο κινούμενο-τοπικό σ.α.

$$\vec{a}_{P/\Sigma} = \underbrace{\vec{a}_{K/\Sigma} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{μεταφορική}} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}_{P/K}}_{\text{coriolis}} + \underbrace{\vec{a}_{P/K}}_{\text{τοπική}}$$

Παράδειγμα



$\omega = -20$ rad/s

$\dot{\omega} = -200$ rad/s^2

$v_D = 50$ cm/s

$a_D = 600$ cm/s^2

$d = 8$ cm από το O.

ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Συμπεριστροφής ως προς τη ράβδο η οποία δεν τοποθετείται αλλά είναι περιορισμένο ως προς το σύνολο.

$$\vec{v}_D = \vec{v}_{\mu\varepsilon\tau} + \vec{v}_{\tau o\pi}$$

$$\vec{v}_{\mu\varepsilon\tau} = \vec{v}_{K/O} + \vec{\omega}\times\underbrace{\vec{OD}}_{\vec{KD}\ \text{αλλά Klein}} = \omega\hat{Y}\times[d(\sin 30\,\hat{x} + \cos 30\,\hat{y})] = 80\,\hat{Z}$$

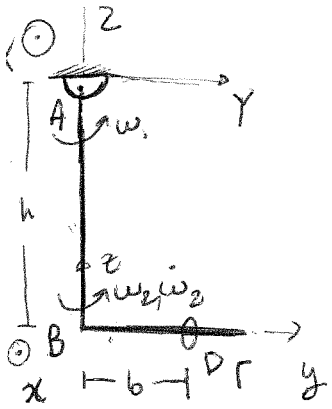
$$\vec{v}_{\tau o\pi} = v_D(\sin 30\,\hat{x} + \cos 30\,\hat{y}) = 25(\hat{X} + \sqrt{3}\,\hat{Y})$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_{\mu\varepsilon\tau} + \vec{a}_{cor} + \vec{a}_{\tau o\pi}$$

$$\vec{a}_{\tau o\pi} = a_D(\sin 30\,\hat{x} + \cos 30\,\hat{y})$$

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{D_{\tau o\pi}} = 2\omega\hat{Y}\times[25(\hat{X} + \sqrt{3}\,\hat{y})] = 1000\,\hat{Z}$$

$$\vec{a}_{\mu\varepsilon\tau} = \vec{a}_K + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{OD} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{OD})}_{\neq -\omega^2\vec{OD}} = \dot{\omega}Y\times[d(\sin 30\,\hat{x} + \cos 30\,\hat{y})]$$



$\dot{b}, \ddot{b}$ τοπική ταχύτητα-επιτάχυνση

$\vec{v}_D, \vec{a}_D$ απόλυτες (στο AXYZ)

<u>1ος τρόπος</u>: κινούμενο σύστημα Bxyz συμπαγούς στη ΒΓ.

$\vec{\omega}_{0\Lambda} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ (η ΒΓ μετέχει σε 2 περιστροφές)

$= \omega_1 \hat{X} + \omega_2 \hat{z}$

$$\dot{\vec{\omega}}_{0\Lambda} = \cancel{\dot{\omega}_1} \hat{X} + \omega_1 \cancel{\frac{d\hat{X}}{dt}}^{\,0} + \dot{\omega}_2 \hat{z} + \omega_2 \frac{d\hat{z}}{dt}$$

το $\hat{z}$, αν και συμπαίνει ταυτίζεται με το $\hat{Z}$, περιστρέφεται με $\vec{\omega}_1$.

$$\dot{\vec{\omega}}_{0\Lambda} = \dot{\omega}_2 \hat{z} + \omega_2 (\omega_1 \hat{X} \times \hat{z}) = \dot{\omega}_2 \hat{Z} - \omega_1 \omega_2 \hat{Y}$$

$$\left(\dot{\vec{\omega}}_{0\Lambda} = \frac{d\omega_2}{dt} \hat{Z} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \text{ προσηγ. φορά} \right)$$

$\vec{v}_{DIA} = \vec{v}_{\text{σον}} + \vec{v}_{\text{μετ.}}$

$$\vec{v}_{\text{μετ}} = (\omega_1 \hat{X} + \omega_2 \hat{Z}) \times (-h \hat{Z} + b \hat{Y}) \quad (= (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{AD})$$

$\vec{a}_D = \vec{a}_{\text{μετ}} + \vec{a}_{\text{cor}} + \vec{a}_{\text{σον}}$

$\vec{a}_{\text{μετ}} = \dot{\vec{\omega}}_{0\Lambda} \times \vec{AD} + \vec{\omega}_{0\Lambda} \times (\vec{\omega}_{0\Lambda} \times \vec{AD})$

$\vec{a}_{\text{cor}} = 2 \vec{\omega}_{0\Lambda} \times \dot{b} Y$

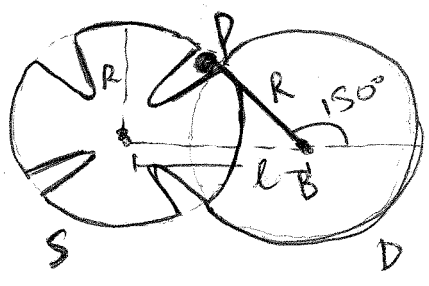
$\vec{a}_{\text{σον}} = \ddot{b} \hat{Y}$

2ος τρόπος: Bxyz περιστρεφόμενο με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_1$

$\vec{V}_D = \vec{V}_{μετ} + \vec{V}_{τοπ}$, $\vec{V}_{μετ} = \vec{\omega}_1 \times \vec{AD}$ $\vec{V}_{D τοπ} = ?$

Θεωρώ το Bxyz ακίνητο και ένα άλλο Bx'y'z' περιστρεφόμενο ως προς το Bxyz με $\vec{\omega}_2$

$\vec{V}_{Dτοπ} = \vec{V}'_{Dμετ} + \vec{V}'_{Dτοπ}$, $V'_{Dτοπ} = \dot{b}\hat{Y}$, $\vec{V}'_{Dμετ} = \vec{\omega}_2 \times \vec{BΔ} = \omega_2 \hat{Z} \times b\hat{Y}$.

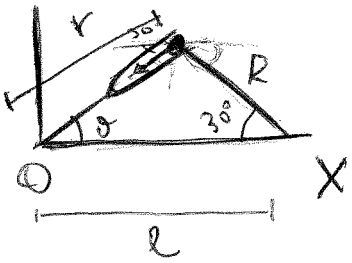


ο S κάνει διαλλειπόμενη κίνηση.

Η γωνιακή ταχύτητα του S είναι μηδενική καθώς ο πείρος εισέρχεται στην εγκοπή.

Περίπτωση 4 εγκοπών → $\underline{\ell = \sqrt{2}R}$

$\omega_S, \dot{\omega}_S, V_{P/Σ} = ;$



$$\left.\begin{array}{l} R^2 + \ell^2 - 2R\ell\cos30 = r^2 \\ \dfrac{\sin\theta}{R} = \dfrac{\sin30}{r} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} r = 37.1 \text{ mm} \\ \theta = 42{,}4° \end{array}$$

Παρατήρηση: για 45° $\xrightarrow[\ell = R\sqrt{2}]{}$ r = R

το P ως σημείο του D: $\vec{V}_P = \omega_D \hat{Z} \times [R(\cos30\hat{X} + \sin30\hat{Y})] =$

$= -\omega_D R(\sin30\hat{X} + \cos30\hat{Y})$ Ⓐ

το P ως σημείο σχετικά κινούμενο ως προς τον S:

$\vec{V}_P = \vec{V}_{μετ} + \vec{V}_{τοπ}$

$\vec{V}_{μετ} = \vec{\omega}_S \times \vec{OP} = \omega_S r(-\sin\theta\hat{X} + \cos\theta\hat{Y})$

$\vec{V}_{τοπ} = -\dot{r}(\cos\theta\hat{X} + \sin\theta\hat{Y})$

Έτσι, $v_{P/S} = 477,6$ mm/s, $\omega_S = -41$ rad/s.

Το P ως σημείο του D: $\vec{a}_P = -\omega_D^2 \vec{BP}$

Το P ως σημείο κινούμενο ως προς τον S:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{μετ} + \vec{a}_{cor} + \vec{a}_{con}$$

$$\vec{a}_{con} = a(\cos\vartheta\,\hat{x} + \sin\vartheta\,\hat{y})$$

$$\vec{a}_{cor} = 2\omega_S\,\hat{z} \times (-v_{P/S}(\cos\vartheta\,\hat{x} + \sin\vartheta\,\hat{y}))$$

$$\vec{a}_{μετ} = \dot{\omega}_S\,\hat{z} \times \vec{OP} - \omega_S^2\,\vec{OP}$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\omega}_S = 234.02 \text{ rad/s}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

15/5/2015

(24)

Κέντρο Μάζας:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\underbrace{\sum_i m_i}_{=m_{ολ}}} \quad \text{(διακριτό)}$$

$$\vec{r}_c = \frac{\int_m \vec{r}\, dm}{\underbrace{\int_m dm}_{=m_{ολ}}} = \frac{\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})\, dV}{\int \rho(\vec{r})\, dV} \qquad \rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$$

πυκνότητα μάζας

- Στα ομογενή σώματα, κέντρο μάζας ≡ γεωμετρικό κέντρο
- Η θέση του Κ.Μ. είναι ανεξάρτητη από το σύστημα αναφοράς
- $\vec{r}_c = \dfrac{\int_{m_1} \vec{r}\, dm_1 + \int_{m_2} \vec{r}\, dm_2}{\int dm_1 + \int dm_2} = \dfrac{m_1 \vec{r}_{c_1} + m_2 \vec{r}_{c_2}}{m_1 + m_2}$

Κίνηση του Κέντρου Μάζας

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_i}_{\text{εξωτερικές}} + \underbrace{\vec{f}_i}_{\text{εσωτερικές}}, \quad i = 1, \dots, N$$

αθροίζοντας,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i + \cancel{\sum_i \vec{f}_i} \to 0 \text{ (ως δράση-αντίδραση)}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right)^{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{N} F_i \to \boxed{m \ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}}$$

(σαν να θεωρούν όλη τη μάζα συγκεντρωμένη στο κ.μ.)

ΘΕΩΡΗΜΑ ΩΘΗΣΗΣ-ΟΡΜΗΣ

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ολ}\, dt = \Delta \vec{p}_c}$$

ΟΡΜΗ ΚΑΙ ΩΘΗΣΗ ΣΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

OXYZ σταθερό, Kxyz κινούμενο με $\vec{v}_K, \vec{a}_K$ (ως προς το αρχικό)

$$\underbrace{\vec{R}_i}_{\text{στο OXYZ}} = \vec{R}_K + \underbrace{\vec{r}_i}_{\text{στο Kxyz}}$$

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{R}_i}{m} = \frac{\sum m_i \vec{R}_k + \sum m_i \vec{r}_i}{m} = \vec{R}_k + \vec{r}_c$$

$\vec{R}_c$: κ.μ. στο OXYZ

$\vec{r}_c$: κ.μ. στο Kxyz

$$\vec{R}_c = \vec{R}_k + \vec{r}_c \xrightarrow{\frac{d^2}{dt^2}} m\ddot{\vec{R}}_c = m\underbrace{\ddot{\vec{R}}_k}_{\vec{a}_k} + m\ddot{\vec{r}}_c$$

όμως $m\ddot{\vec{R}}_c = \vec{F}_{\text{ολ}}$ (αδρανειακό σύστημα)

άρα $\vec{F}_{\text{ολ}} = m\vec{a}_k + m\ddot{\vec{r}}_c \rightsquigarrow \boxed{m\ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}_{\text{ολ}} - \underbrace{m\vec{a}_k}_{\text{αδρανειακές δυνάμεις}}}$

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΟΛΟ

OXYZ $\quad \vec{H}_o = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

(ως προς άλλο σημείο A: $\vec{H}_A = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{p}_i$)

$$\dot{\vec{H}}_o = \cancel{\sum_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i} + \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{f}_i) =$$

$\vec{p}_i = m\dot{\vec{r}}_i \parallel \dot{\vec{r}}_i$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i}_{\substack{\parallel \\ M_o = \sum M_o^{(i)}}} + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i$$

συνολική ροπή εξωτερικών δυνάμεων

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum_i \sum_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ji} = \vec{M}_o^{\text{εσ}}$$

Αν $\vec{f}_{ji}$ κεντρικές τότε $\vec{M}_o^{\text{εσ}} = 0$ και άρα $\dot{\vec{H}}_o = \vec{M}_o$

ίσες λοιπόν συνθήκη από δράση-αντίδραση

Οι κεντρικές είναι οι μαγνητικές δυνάμεις.

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΠΟΛΟ

Σημείο k κινούμενο ως προς το $OXYZ$ με $\vec{v}_k, \vec{a}_k$

$$\vec{H}_k = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i \quad \left(\vec{r}_i : \text{θέση ως προς } k\right)$$

$$\dot{\vec{H}}_k = \cancel{\sum_i \dot{\vec{r}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i} + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i (\ddot{\vec{R}}_i - \ddot{\vec{R}}_k) =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{f}_i) - \sum \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{R}}_k$$

∘ $\sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i = 0$ λόγω νευτρισμάτων των δυνάμεων

$$= \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i}_{\vec{M}_k} - \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i}_{m\vec{r}_c} \times \underbrace{\ddot{\vec{R}}_k}_{\vec{a}_k} \rightsquigarrow \boxed{\dot{\vec{H}}_k = \vec{M}_k - m\vec{r}_c \times \vec{a}_k}$$

$\vec{r}_c \times \vec{a}_k = 0$ ΑΝ

i) $k \equiv C$ τότε $\vec{r}_c = \vec{0}$

ii) $\vec{a}_k = \vec{0}$

iii) $\vec{r}_c \parallel \vec{a}_k$ για κάθε στιγμή

$\vec{r}_i$: διανυσμα θεσης στο $Kxyz$

$\vec{\rho}_i$: διανυσμα θεσης στο $Cxyz$ (κεντρο μαζας)

$$\boxed{\vec{H}_k = \vec{H}_c + \vec{r}_c \times m\dot{\vec{r}}_c}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \dot{\vec{H}}_k = \underbrace{\dot{\vec{H}}_c}_{\vec{M}_c} + \cancel{\dot{\vec{r}}_c \times m\dot{\vec{r}}_c} + \vec{r}_c \times m\ddot{\vec{r}}_c \rightsquigarrow \boxed{\dot{\vec{H}}_k = \vec{M}_c + \vec{r}_c \times m\ddot{\vec{r}}_c}$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

$$m\ddot{\vec{R}}_c = \vec{F}_{o\lambda} \quad (1)$$

$$\cancel{\dot{\vec{H}}_k = \vec{M}_k - m\vec{r}_c \times \vec{a}_k} \quad (2a)$$

$$\cancel{\dot{\vec{H}}_k = \vec{M}_c + \vec{r}_c \times m\ddot{\vec{r}}_c} \quad (2b)$$

$$\dot{\vec{H}}_o = \vec{M}_o \quad (\text{O ακίνητο}) \quad (2c)$$

$$\dot{\vec{H}}_c = \vec{M}_c \quad (\text{c ΚΜ}) \quad (2d)$$

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (Θεώρημα Koenigs)

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{R}}_i \dot{\vec{R}}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{R}}_k + \dot{\vec{r}}_i)(\dot{\vec{R}}_k + \dot{\vec{r}}_i) =$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\vec{R}}_k \dot{\vec{R}}_k + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \dot{\vec{R}}_k m_i \dot{\vec{r}}_i =$$

$$= \frac{1}{2} m |\dot{\vec{R}}_k|^2 + \frac{1}{2} \sum m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2 + \vec{v}_k m \dot{\vec{r}}_c$$

$$= \underbrace{T_k}_{\text{κινητική ως προς } k} + \underbrace{T_{\Sigma\chi\varepsilon\tau/k}}_{\text{κινητική "γύρω" από το } k} + \underbrace{\vec{v}_k m \dot{\vec{r}}_c}$$

$\vec{v}_k m \dot{\vec{r}}_c = 0$ αν το σημείο είναι το ΚΜ
αν το σημείο είναι ακίνητο

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΤΟ ΧΩΡΟ (3D)

Ορμή Στερεού: $\vec{p} = \int_m \dot{\vec{r}}\, dm$

Κίνηση του ΚΜ: $\dot{\vec{p}}_c = \vec{F}$

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

Θεωρούμε σημείο κ του στερεού (ή μιας τυχαίας προέκτασής του)

Για τυχόν σημείο Ρ: $\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_K + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/K}}$ (ανθίκεν στερεόμορφος)

$\Pi_\Sigma : OXYZ \qquad \Pi_K : Kxyz$

> Θεωρώ μεταφορική κίνηση του Π_K ως προς το Π_Σ με παράλληλους άξονες.

$$\vec{H}_K = \int_m \vec{r}_{P/K} \times \vec{v}_{P/K}\, dm = \int_m \vec{r}_{P/K} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/K})\, dm =$$

(ν. ταχύτητων)

$$\vec{H}_K = H_{Kx}\hat{x} + H_{Ky}\hat{y} + H_{Kz}\hat{z} = \left[\omega_x \int_m (y^2+z^2)dm - \omega_y \int_m xy\, dm - \omega_z \int_m xz\, dm\right]\hat{x}$$

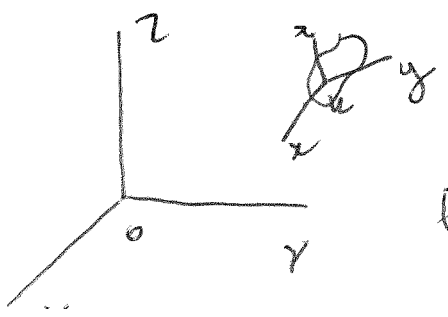
$$+\left[-\omega_x \int_m yx\, dm + \omega_y \int (x^2+z^2)dm - \omega_z \int yz\, dm\right]\hat{y}$$

$$+\left[-\omega_x \int zx\, dm - \omega_y \int zy\, dm + \omega_z \int (x^2+y^2)dm\right]\hat{z}$$

$$\left(\vec{r}_{P/K} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\right)$$

$\vec{H}_K = \mathbf{I}_{Kxyz}\,\vec{\omega}$, όπου $\mathbf{I}_{Kxyz} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$ $\qquad I_{xx} = \int_m (y^2+z^2)dm$, $\quad I_{xy} = \int_m xy\, dm$

I_{ii} ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ, I_{ij} ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ



Αν το στερεό κινείται ως προς το Π_K τότε τα στοιχεία του $\mathbf{I}$ μεταβάλλονται.

Επομένως θεωρώ το Kxyz συμμετρικής ΠΑΝΤΑ.

Οι εκφράσεις απλοποιούνται στο σύστημα ΚΥΡΙΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

$$J_{C_{xyz}} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{H}_c = H_{cx}\hat{i} + H_{cy}\hat{j} + H_{cz}\hat{k} = J_x\omega_x\hat{i} + J_y\omega_y\hat{j} + J_z\omega_z\hat{k}$$

Γενικά, $\vec{H}_c \nparallel \vec{\omega}$ (ακόμα και στο C_{xyz})

Αν η περιστροφή είναι γύρω από έναν κύριο άξονα, τότε $\vec{H}_c = \lambda\vec{\omega}$

τότε $\mathbb{I}_{C_{xyz}}\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega}$ πρόβλημα ιδιοτιμών.

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥ Κ

20/5/15

(29)

$$\vec{H}_K = \mathbb{I}_{K_{xyz}}\,\vec{\omega} \quad \text{όπου} \quad \mathbb{I}_{K_{xyz}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

οπωσδήποτε ως αναφορικές K_{xyz}

Διαγωνοποίηση → κύριοι άξονες

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

$$\left.\frac{d\vec{H}_K}{dt}\right|_{\Pi_\Sigma} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{H}_K}{dt}\right|_{\Pi_K}}_{\frac{d}{dt}(I\vec{\omega})} + \vec{\omega}\times\vec{H}_K$$

ταυτίζεται με το $\vec{\omega}$ του στερεού αφού Π_K αναφορικές

$$= \left[I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz}-I_{yy})\omega_y\omega_z + I_{xy}(\dot{\omega}_y - \omega_x\omega_z) + I_{xz}(\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y) + I_{yz}(\omega_y^2-\omega_z^2)\right]\hat{x}$$

$$+\left[I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx}-I_{zz})\omega_x\omega_z + I_{yz}(\dot{\omega}_z - \omega_y\omega_x) + I_{yx}(\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z) + I_{xz}(\omega_z^2-\omega_x^2)\right]\hat{y}$$

$$+\left[I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy}-I_{xx})\omega_x\omega_y + I_{zx}(\dot{\omega}_x - \omega_z\omega_y) + I_{zy}(\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x) + I_{xy}(\omega_z^2-\omega_y^2)\right]\hat{z}$$

$$\left.\frac{d\vec{H}_K}{dt}\right|_{\Pi_\Sigma} = \vec{M}_K - \vec{r}_C \times m\vec{a}_C$$

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} J_\xi\omega_x \\ J_\eta\omega_\eta \\ J_\zeta\omega_\zeta\end{bmatrix}$$

απλοποίηση:

- $K \equiv C \qquad \dot{\vec{H}}_C = \vec{M}_C$
- $\vec{a}_K = 0 \qquad \dot{\vec{H}}_K = \vec{M}_K$

$$\left.\frac{d\vec{H}_K}{dt}\right|_K = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \frac{d}{dt}(J_\xi\dot{\omega}_x + J_\eta\dot{\omega}_\eta + J_\zeta\dot{\omega}_\zeta) =$$

ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΥΡΙΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

$C_{\xi\eta\zeta}$

$$\left.\begin{aligned} J_\xi\dot{\omega}_\xi - (J_\eta - J_\zeta)\omega_\eta\omega_\zeta &= M_\xi \\ J_\eta\dot{\omega}_\eta - (J_\zeta - J_\xi)\omega_\zeta\omega_\xi &= M_\eta \\ J_\zeta\dot{\omega}_\zeta - (J_\xi - J_\eta)\omega_\xi\omega_\eta &= M_\zeta \end{aligned}\right\}$$

εξισώσεις Euler

Εξ. κίνησης Σώματος

$$\dot{\vec{p}}_c = \vec{F} \quad \text{και} \quad \dot{\vec{H}}_k = \vec{M}_k - m\vec{r}_c \times \vec{a}_k$$

$$\dot{\vec{H}}_k = \vec{M}_k \ (\vec{a}_k = \vec{0})$$

$$\dot{\vec{H}}_c = \vec{M}_c$$

εξ. Euler

Κινητική Ενέργεια Δύο Γενικής Κίνησης Σώματος

$$T = \frac{1}{2}\int_m \vec{v}_p \cdot \vec{v}_p \, dm \overset{\text{σταθερό}}{=} \frac{1}{2}\int_m (\vec{v}_k + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/k})(\vec{v}_k + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/k}) \, dm =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_m \vec{v}_k \vec{v}_k \, dm}_{T_k^{\mu\epsilon\tau}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/k})(\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/k}) \, dm}_{T^{\pi\epsilon\rho/k}} + \int_m \vec{v}_k \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/k}) \, dm$$

$$T_k^{\mu\epsilon\tau} = \frac{1}{2} m |v_k|^2 \qquad T^{\pi\epsilon\rho/k} = \frac{1}{2}\int_m \vec{\omega}\,[\vec{r}_{P/k} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/k})] \, dm =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}\int_m \vec{r}_{P/k} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/k})}_{\vec{v}_{P/k}} \, dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}\,\vec{H}_k = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \mathbb{I}_{k\,xyz}\,\vec{\omega}$$

όπου $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{C} \times \vec{A})$

$\vec{A} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \ \vec{B} = \vec{\omega}, \ \vec{C} = \vec{r}_{P/k}$

$$= \frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{yz}\omega_y\omega_z + 2I_{zx}\omega_x\omega_z\right)$$

$$\int_m \vec{v}_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/k}) \, dm = \int \vec{v}_k \vec{v}_{P/k} \, dm = \vec{v}_k \int \vec{v}_{P/k} \, dm = \vec{v}_k m \vec{v}_{c/k}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ KOENINGS

$$T = T_k^{\mu\varepsilon\varepsilon} + T^{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa} + \vec{v}_c m \vec{v}_{c\iota\kappa}$$

$\dot{\vec{r}}_c$

απλοποιήσεις

- $\vec{v}_k = 0 \rightsquigarrow T = T^{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa}$
- $C \equiv K \rightsquigarrow T = T_c^{\mu\varepsilon\varepsilon} + T^{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa}$

ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

- Διακριτό δίσκημα $I_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k (\vec{r}_k \vec{r}_k \delta_{ij} - x_i^{(k)} x_j^{(k)}) \quad i,j = 1,2,3$
- Συνεχές δίσκημα : $I_{ij} = \int_m (\vec{r} \cdot \vec{r} \delta_{ij} - x_i x_j) dm$

Οι ροπές αδρανείας μετράνε την εγγύτητα της κατανομής μάζας ως προς τον αντίστοιχο άξονα.

> Ακτίνα Αδρανείας (ή περιφοράς) : $I_{ii} \equiv m k_i^2$ | το σημείο στο οποίο αν ήταν συγκεντρωμένη όλη η μάζα θα είχε την ίδια ροπή αδράνειας

ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟ A

$$I_A = \int_m (\vec{r} - \vec{r}_A)(\vec{r} - \vec{r}_A) dm = \int_m [(x_1 - x_1^A)^2 + (x_2 - x_2^A)^2 + (x_3 - x_3^A)^2] dm$$

Αν το A είναι η αρχή των αξόνων O : $I_o = \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22} + I_{33})$

ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟ $x_i = 0$, $i = 1,2,3$

$$I_i = \int_m x_i^2 dm$$

$I_{11} = I_2 + I_3$ $\qquad I_o = I_1 + I_2 + I_3$

$I_{22} = I_1 + I_3$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΘΕΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ (επίπεδες κατανομές μάζας στο x_1x_2)

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} \quad , \quad I_{i3} = I_{3i} = 0 \quad , i = 1,2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΑΞΟΝΩΝ (STEINER)

- Κεντρικό σύστημα $C_{x_1x_2x_3}$ με τανυστή $\mathbb{I}_c$
- Σύστημα $O_{x_1'x_2'x_3'}$

$\vec{R}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ διάνυσμα θέσης του O στο $C_{x_1x_2x_3}$

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$ $\qquad \mathbb{I}_o = ?$

$$I_{ij}' = \int_m (\vec{r}'\vec{r}'\delta_{ij} - x_i' x_j')\,dm = \int_m [(\vec{r}-\vec{R})(\vec{r}-\vec{R})\delta_{ij} - (x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)]\,dm$$

$$= \int_m \vec{r}\cdot\vec{r}\,\delta_{ij}\,dm + \underbrace{\int_m \vec{R}\vec{R}\delta_{ij}\,dm}_{C} - \underbrace{2\int_m \vec{r}\vec{R}\delta_{ij}\,dm}_{A} - \int_m x_i x_j\,dm +$$

$$+ \underbrace{\int_m \xi_i x_j\,dm}_{B_1} + \underbrace{\int_m x_i \xi_j\,dm}_{B_2} - \int_m \xi_i \xi_j\,dm$$

$$A: \delta_{ij}\vec{R}\int_m \vec{r}\,dm = \delta_{ij}\vec{R}\,m\,\vec{r}_{c/c} = 0$$

$$B_1: \xi_i \int_m x_j\,dm = \xi_i m x_c = 0 \quad \text{ομοίως} \quad B_2 = 0$$

$$C \quad \vec{R}\vec{R}\,m\delta_{ij}$$

άρα $$I_{ij}' = \int_m (\vec{r}\vec{r}\delta_{ij} - x_i x_j)\,dm + m(\vec{R}\cdot\vec{R}\delta_{ij} - \xi_i\xi_j)$$

$$\rightarrow \underline{I'_{ij} = I^c_{ij} + m(\vec{R}\cdot\vec{R}\,\delta_{ij} - \xi_i \xi_j)}$$

$$\mathbb{I}' = \mathbb{I}_c + m \begin{bmatrix} \xi_2^2+\xi_3^2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_1 & \xi_1^2+\xi_3^2 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \xi_1^2+\xi_2^2 \end{bmatrix}$$

Πάντα στο C τα διαγώνια στοιχεία είναι ελάχιστα ακόμα και αν δεν έχω κύριο άξονα αδράνειας.

$$I^c_{ii} = \min I'_{ii}, \quad i = 1,2,3$$

- $I_{ij} = 0$ όταν η κατανομή είναι συμμετρική ως προς το επίπεδο x_i (ή) x_j.

$$\left(I_{ij} = \int_m x_i x_j \, dm = \int_V \underbrace{\rho(\vec{r})}_{\text{άρτια ως προς } x_i} \underbrace{x_i}_{\text{περιττή}} x_j \, dV = 0 \right)$$

ΕΥΡΕΣΗ ΚΥΡΙΩΝ ΑΞΟΝΩΝ

- Διαγωνοποίηση (κατάλληλη στροφή)
- Όλοι κύριοι άξονες $\vec{H}_0 = \lambda\vec{\omega}$

$$\mathbb{I}_0 \vec{\omega} = \lambda \vec{\omega} \quad \text{(πρόβλημα ιδιοτιμών)}$$

$$(\mathbb{I}_0 - \lambda I)\vec{\omega} = 0$$

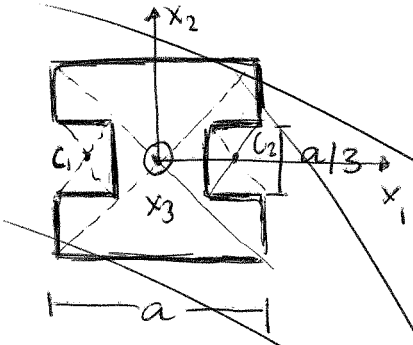
- $I_{ij} = I_{ji}$ συμμετρικός $\rightsquigarrow$ πραγματικές ιδιοτιμές

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ $\equiv$ Κύριες Ροπές Αδράνειας

ΙΔΙΟΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ $\equiv$ Κύριοι Άξονες

22/5/15

Παράδειγμα 1)



Για το ολόκληρο $I_{11}^c = I_{22}^c = \frac{ma^2}{12}$

$$I_{33}^c = \frac{ma^2}{6}$$

Θ παραλλήλων αξόνων (Steiner)

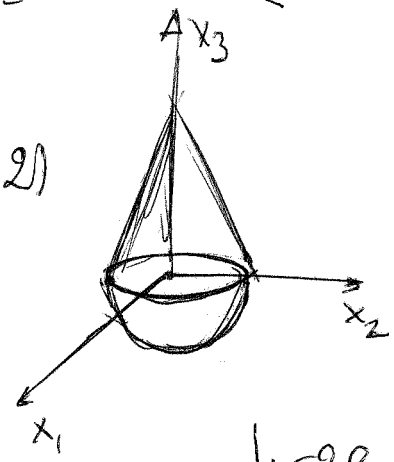
$$\mathbb{I}_{1,2}^c = \mathbb{I}_{1,2}^{c_1,c_2} + \frac{m}{9}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mp a/3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\mp a/3)^2 \end{bmatrix} =$$

$(\xi_1^2+\xi_3^2)$

$(\xi_1^2+\xi_2^2)$

=

2)



$h=2R$

$m_1 = m_2$ $\quad \vec{r}_I^{\,c} = (0,0,h/4)$ $\quad \vec{r}_{II}^{\,c} = (0,0,-3R/8)$

$$J_1^{cI} = J_2^{cI} = \frac{3m}{80}(4R^2+h^2)$$

$$J_3^{cI} = \frac{3m}{10}R^2$$

$$J_1^{II} = J_2^{II} = \frac{83m}{320}R^2 \qquad J_3^{III} = \frac{2m}{5}R^2.$$

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_I^{\,c} + m_2\vec{r}_{II}^{\,c}}{m_1+m_2} = \frac{m_1\left(0,0,\frac{h}{4}-\frac{3R}{8}\right)}{2m_1} = \frac{R}{16}\hat{x}_3.$$

$$\mathbb{I}_{\Phi}^{I,c} = \mathbb{I}^{I} + m_I \Big[$$

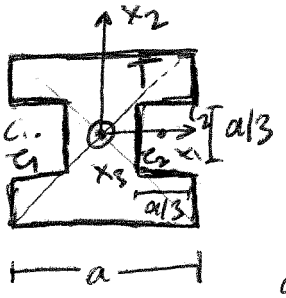
$$J_c^{II} = J_c + m_2\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{83mR^2}{320} & & \\ & \frac{83mR^2}{320} & \\ & & \frac{2m}{5}R^2 \end{bmatrix} + m_2$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_c = (0,0,-3R/8) - (0,0,R/16) = (0,0,-3R/8 - R/16)$$

Παράδειγμα (1)

22/5/15

30.



για τον ολόσωμο

$$I^c_{11} = I^c_{22} = \frac{ma^2}{12}$$

$$I^c_{33} = \frac{ma^2}{6}$$

Θεώρημα παραλλήλων αξόνων (Steiner)

$$\mathbb{I}^c_{1,2} = \mathbb{I}^{c_1,c_2}_{1,2} + \frac{m}{9}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mp a/3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\mp a/3)^2 \end{bmatrix} =$$

$(y_1^2+y_2^2)$

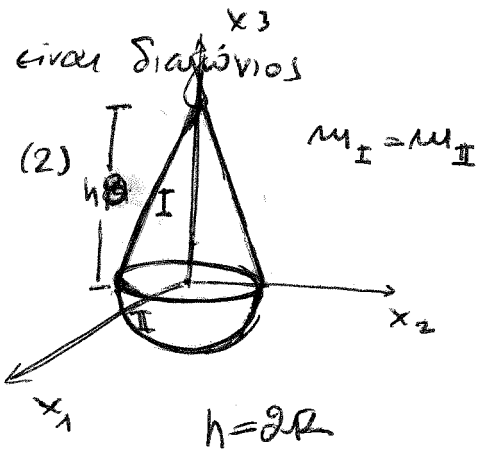
$(y_1^2+y_2^2)$

$$= \frac{ma^2}{12\cdot 9^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}_c = \mathbb{I}^c_T - (\mathbb{I}^c_1 + \mathbb{I}^c_2) = \frac{ma^2}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{2ma^2}{12\cdot 9^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

η κατεύθυνση των κύριων αξόνων δεν άλλαξε άρα πάλι ο πίνακας είναι διαγώνιος

(2)



$m_I = m_{II}$

$h = 2R$

$$\vec{r}^{\,c}_I = (0,0,h/4) \qquad \vec{r}^{\,c}_{II} = (0,0,-3R/8)$$

$$J^{cI}_1 = J^{cI}_2 = \frac{3m}{80}(4R^2+h^2) = \frac{3m}{80}(4R^2+4R^2) = \frac{3mR^2}{10}$$

$$J^{cI}_3 = \frac{3m}{10}R^2$$

$$J^{II}_1 = J^{II}_2 = \frac{83m}{320}R^2 \qquad J^{II}_3 = \frac{2m}{5}R^2$$

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_I + m_2\vec{r}_{II}}{m_1+m_2} = \frac{R}{16}\hat{x}_3$$

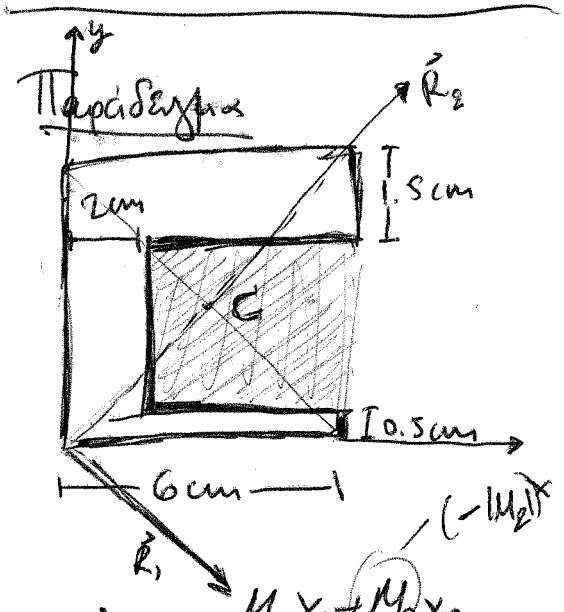
Θ. Steiner: $$J^I_c = \frac{3mR^2}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + mR^2\begin{bmatrix} (7/10)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (7/10)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_c - \vec{r}_I = \left(\frac{R}{10} - \frac{R}{2}\right)\hat{x}_3 = -\frac{7}{10}R\hat{x}_3$$

$\mathrm{II}: J_c^{\mathrm{II}} = \dots$

$$J_c = J_c^{\mathrm{I}} + J_c^{\mathrm{II}}$$

Παράδειγμα



Για τετράγωνο πλευράς a

$$I_{xx}^c = I_{yy}^c = \frac{Ma^2}{12}$$

α) $\vec{r}_{CM} = ?$ β) κύριες ροπές και κύριοι άξονες

1: το όλο τετράγωνο

2: αυτό του αφαιρώ

$$a)\ x_c = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \dots = 2.2\ cm$$

$$y_c = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2} = \dots = 3.4\ cm$$

$$b)\ I_{xx} = \left[I_{xx}^{(1)} + m_1 (y_1 - y_c)^2\right] - \left[I_{xx}^{(2)} + m_2 (y_2 - y_c)^2\right] = 79.5$$

$$I_{yy} = \left[I_{yy}^{(1)} + m_1 (x_1 - x_c)^2\right] - \left[I_{yy}^{(2)} + m_2 (x_2 - x_c)^2\right] = 57.9$$

$$I_{xy} = \left[\cancel{I_{xy}^{(1)}} - m_1 (x_1 - x_c)(y_1 - y_c)\right] - \left[\cancel{I_{xy}^{(2)}} - m_2 (x_2 - x_c)(y_2 - y_c)\right]$$

ως προς CM του δίσκου του
συμπίπτει στον κύριο άξονα

$$= -14.4.$$

$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = 137.4$ (Θ. Κάθετων αξόνων)

$I_{xz} = I_{yz} = 0.$

$$\text{άρα}\quad I = \begin{bmatrix} 79.5 & -14.4 & 0 \\ -14.4 & 57.9 & 0 \\ 0 & 0 & 137.4 \end{bmatrix}$$

ΟΧΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ

Πρόβλημα Ιδιοτιμών $|\mathbb{I}-\lambda I|=0 \rightsquigarrow (I_{zz}-\lambda)\begin{vmatrix} I_{xx}-\lambda & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy}-\lambda \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \lambda_0 = I_{zz}$, $\lambda_1 = I_1 = 86.7$, $\lambda_2 = I_2 = 50.7$

πρόταξης ο z δεν θα αλλάξει

Το νέο σύστημα αξόνων : $\vec{R}_0=(0,0,1)$, $\vec{R}_1=(-2,1,0)$, $\vec{R}_3=(-1,2,0)$

(ιδιοδιανύσματα)

• γωνία του $\vec{R}_2$ ως προς x : $\phi=\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

• Υπολογισμός της ροπής αδρανείας ως προς έναν οποιαδήποτε άξονα $\hat{e}=(e_1,e_2,e_3)$ ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων $Ox_1x_2x_3$.

• Θεωρώ ένα δεύτερο σύστημα αξόνων $Ox_1'x_2'x_3'$ με τον ένα άξονα να ταυτίζεται με τον $\hat{e}$ (π.χ. Ox_1').

$\mathbb{I}' = C\mathbb{I}C^T$, όπου C ο ορθογώνιος πίνακας μετασχηματισμού

$I_{ij}' = c_{ia}\, c_{jb}\, I_{ab}$ (σύμβαση αθροίσεως σε επαναλαμβανόμενους δείκτες)

$(c_{11}, c_{12}, c_{13}) = (e_1, e_2, e_3)$

$$I_e = I_{11}' = I_{11}e_1^2 + I_{22}e_2^2 + I_{33}e_3^2 + 2I_{12}e_1e_2 + 2I_{23}e_2e_3 + 2I_{13}e_1e_3$$

Ορίζουμε πάνω στον άξονα $\hat{e}$ ένα διάνυσμα θέσης σημείου P

$\vec{\rho} = \rho\hat{e}$, με $\rho = \frac{1}{\sqrt{I_e}}$

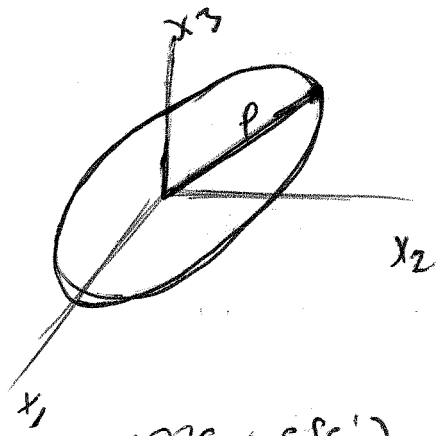
οι συντεταγμένες του P είναι $\boxed{x_k = \rho e_k = \frac{e_k}{\sqrt{I_e}},\ k=1,2,3}$

$$I_{11}x_1^2 + I_{22}x_2^2 + I_{33}x_3^2 + 2I_{12}x_1x_2 + 2I_{23}x_2x_3 + 2I_{13}x_1x_3 = 1$$

ελλειψοειδές αδρανείας

ή

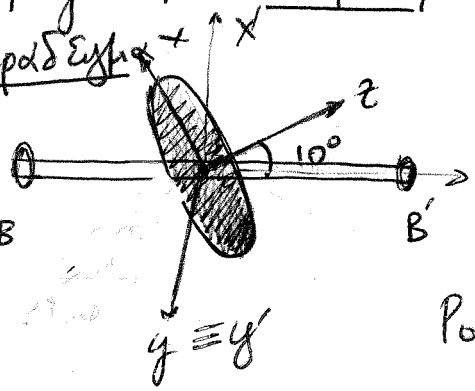
Cauchy



• Ακτίνα περιφοράς (αδρανείας) $K_e^2 \equiv \frac{I_e}{m} \rightsquigarrow \rho = \frac{1}{K_e\sqrt{m}}$

Δύο οποιαδήποτε σωμάτια μείδιο μάζα, κεντρικό ταυτοί αδρανείας (άρα και ~~[illegible]~~ ελλειψοειδές) ονομάζονται ισοαδρανή ή δυναμικώς ισοδύναμα

Παράδειγμα



$d = 60\,cm$

$m = 50\,kg$ αμελητέο πάχος

Ροπή αδράνειας ως προς τον BB'

$$I'_{33} = C_{31}^2 I_{11} + C_{32}^3 I_{22} + C_{33}^2 I_{33} + 2C_{31}C_{32}I_{12} + \cancel{2C_{32}C_{33}I_{23}} + 2C_{31}C_{33}I_{13}$$

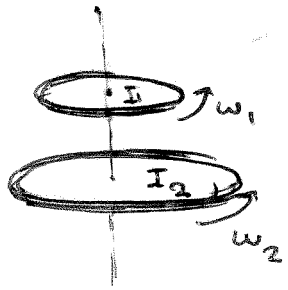
δίνεται $I_{11} = I_{22} = \frac{mr^2}{4}$ $I_{33} = \frac{mr^2}{2}$

$C_{31} = \cos 100°$

$C_{32} = \cos 90 = 0$

$C_{33} = \cos 10°$

Παράδειγμα (Διατήρηση Στροφορμής)



α) κοινή $\omega_0 = ;$

β) $\Delta T = ;$

Διατήρηση Στροφορμής:

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega_0$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}(I_1+I_2)\omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2\right)$$

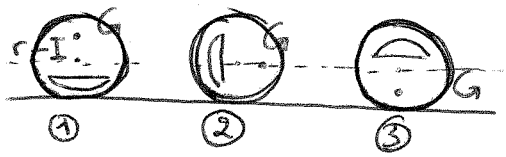
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \rightarrow \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \vec{F}\delta t$$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M} \rightarrow \vec{H}(t_2) - \vec{H}(t_1) = \vec{M}\delta t$$

$m = 1\ Kg$

$R = 150\ mm$

$r = 50\ mm$



$v = 0$

κύλιση χωρίς ολίσθηση

ακτίνα περιφοράς $k = 75\ mm \rightarrow I = mk^2$

, $\omega_1 = 1\ rad/s$, $\omega_2, \omega_3 = ;$

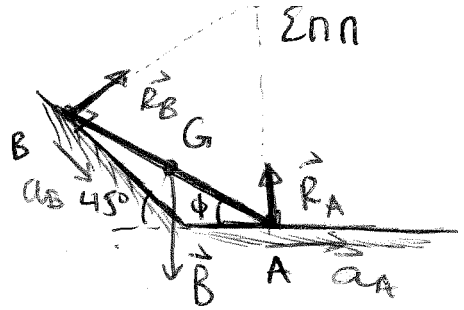
Κινητική ενέργεια $\quad T = \frac{1}{2}mV_{G_i}^2 + \frac{1}{2}(mk^2)\omega_i^2$

Δυναμική ενέργεια: $V_1 = mgr$, $V_2 = 0$, $V_3 = -mgr$

λόγω διατήρησης της μηχανικής ενέργειας: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = T_3 + V_3$

Κινηματική ανάλυση: $\vec{V}_{G_i} = \vec{V}_A + \vec{\omega}_i \times \vec{AG} \longrightarrow \begin{cases} V_{G_1} = \omega_1(R+r) \\ V_{G_2} = \omega_2\sqrt{R^2+r^2} \\ V_{G_3} = \omega_3(R-r) \end{cases}$

αλλιώς λύνεται με τον τύπο της κίνησης χωρίς ολίσθηση



λείες επιφάνειες $\phi = 30°$, $l = 4m$

εκκίνηση από ηρεμία

i) γωνιακή επιτάχυνση

ii) αντιδράσεις στα σημεία επαφής

Κίνηση ΚΜ

$\Sigma F_x = m a_{Gx}$

$\Sigma F_y = m a_{Gy}$

Περιστροφή

$\Sigma \vec{M}_G = I\dot{\omega}$

$(\Sigma \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G)$

Κινηματική

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{AB} - \cancel{\omega^2 \vec{AB}}$ (1)

$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{AG} - \cancel{\omega^2 \vec{AG}}$ (2)

└ η στιγμή πριν γίνει το σύστημα από ηρεμία $\omega = 0$

$$(1) \Rightarrow a_B \cos 45\, \hat{x} - a_B \sin 45\, \hat{y} = a_A \hat{x} + \dot{\omega}\hat{z} \otimes [-l\cos\phi\, \hat{x} + l\sin\phi\, \hat{y}]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_B \cos 45 = a_A - \dot{\omega} l \sin\phi \\ -a_B \sin 45 = -l\sin\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_A = 5.46\,\dot{\omega} \\ a_B = 4.90\,\dot{\omega} \end{matrix}$$

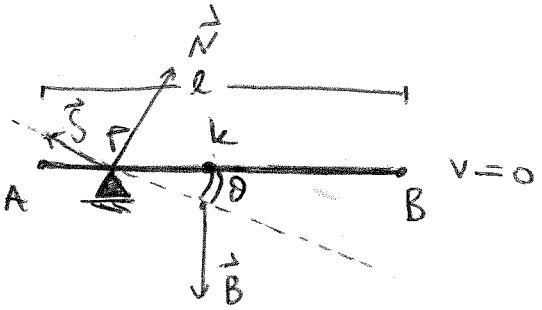
$$(2) \Rightarrow \vec{a}_G = a_A \hat{x} + \dot{\omega}\hat{z} \otimes \left[-l\cos\phi\, \hat{x} + \frac{l}{2}\sin\phi\, \hat{y}\right]$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \vec{a}_G = \underbrace{\left(a_A - \frac{\dot{\omega}}{2} l \sin\phi\right)}_{a_{Gx}} \hat{x} - \underbrace{\frac{l\dot{\omega}}{2}\cos\phi}_{a_{Gy}} \hat{y}$$

$$R_B \cos 45 = m\left(a_A - \frac{\dot{\omega} l}{2}\sin\phi\right)$$

$$R_B \sin 45 + R_A - mg = -m\frac{l}{2}\dot{\omega}\cos\phi$$

$$R_A \cos\phi \frac{l}{2} - \frac{l}{2} R_B \cos 15 = \left(\frac{1}{12} m l^2\right)\dot{\omega}$$



$l, a = (rk)$

Σε ποια γωνία θ θα αρχίσει η ολίσθηση της ράβδου πάνω στην έδραση Γ;

Συντελεστής στατικής τριβής μ

<u>Διατήρηση Ενέργειας</u> : $T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \rightarrow 0 + 0 = \frac{1}{2} I_\Gamma \omega^2 + (-mga\sin\theta)$

(παίρνω ενέργειες ως προς το σημείο Γ που είναι ακίνητο)

$$\rightarrow \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{12}ml^2 + ma^2\right)}_{\text{Steiner}}\omega^2 = mga\sin\theta$$

<u>Πριν αρχίσει η ολίσθηση</u> $\quad S \leq \mu N$ (<u>οριακά</u> $S = \mu N$)

<u>Εξισώσεις κίνησης</u>

$$\vec{a}_{KM} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r}\hat{i}_r + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}_{a_\theta}\hat{i}_\theta \quad , \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0, \; r = a$$

$$\Sigma F_r = ma_r \rightarrow -S + mg\sin\theta = -m\omega^2 a \quad (2)$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta \rightarrow -N + mg\cos\theta = ma\dot{\omega} \quad (3)$$

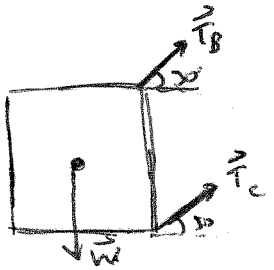
$\Sigma M = I\dot{\omega}$ (είτε για το ΚΜ είτε για ακίνητο σημείο)

$$\Sigma M_\Gamma = I_\Gamma\dot{\omega} \rightarrow \cancel{m}g\sin\theta a = \left(\frac{1}{12}\cancel{m}l^2 + \cancel{m}a^2\right)\dot{\omega} \quad (4)$$

$$(4) \longrightarrow \dot{\omega} = \frac{12ga\sin\theta}{l^2 + 12a^2}$$

$$(3) \rightarrow N = mg\cos\theta\left(1 - \frac{12a^2}{l^2 + 12a^2}\right)$$

$$(1),(2) \rightarrow S = mg\sin\theta\,\frac{l^2 + 36a^2}{l^2 + 12a^2} \qquad \tan\theta \leq \frac{\mu}{1 + 36a^2/l^2}$$



$$\Sigma F_x = (T_B + T_c)\cos 30 = m a_x$$

$$\Sigma F_y = (T_B + T_c)\sin 30 - W = m a_y$$

$$\Sigma M = I\dot{\omega} \rightsquigarrow T_B \cos 30 \cdot 1 + T_c \sin 30 \times 0{,}75 - T_B \cos 30 \cdot 0{,}75 - T_B \sin 30 = 0.$$

$$T_c\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{8}\right) - T_B\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \text{Lagrangian.}$$

$$h := \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \quad \text{Jacobi}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$$

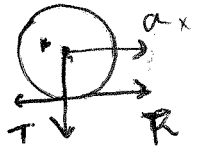
$$h = \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}. \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$f = f(x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\cancel{\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \dots$$



$$\boxed{B - R = ma}$$

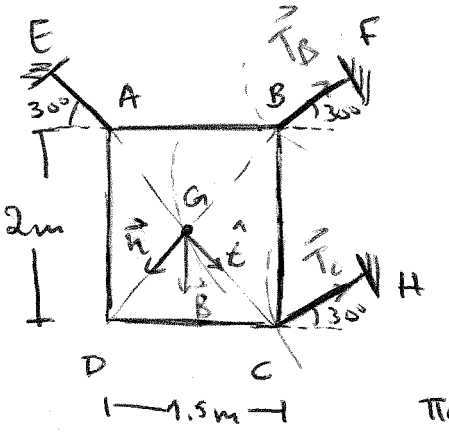
$$\cancel{\Sigma M = T \cdot R = I\dot{\omega}}$$

$$\cancel{\Sigma F_x = m a_x \rightsquigarrow T = M a_x = M\dot{\omega}R} \qquad a_x = \dot{\omega}R$$

$$\boxed{R - T = M a_x = M\dot{\omega}r}$$

$$\boxed{R \cdot r - T \cdot r = I\dot{\omega}}$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_K + \vec{\omega} \times \vec{KM} - \omega^2 \vec{KM}$$



Κόβεται το AE. $m = 50$ kg

$AE = BF = CH = 1m$

29/5/15

34

a) $\vec{a}_G = ;$ b) $\vec{T}_B, \vec{T}_C = ?$

Έχω καμπυλόγραμμη μεταφορική κίνηση.

Δεν αλλάζει ο προσανατολισμός: το σώμα δε θα στραφεί

ΠΟΤΕ, επομένως δεν έχω γωνιακή ταχύτητα-επιτάχυνση

Το κμ G κάνει κυκλική κίνηση με γραμμική αρχική ταχύτητα.

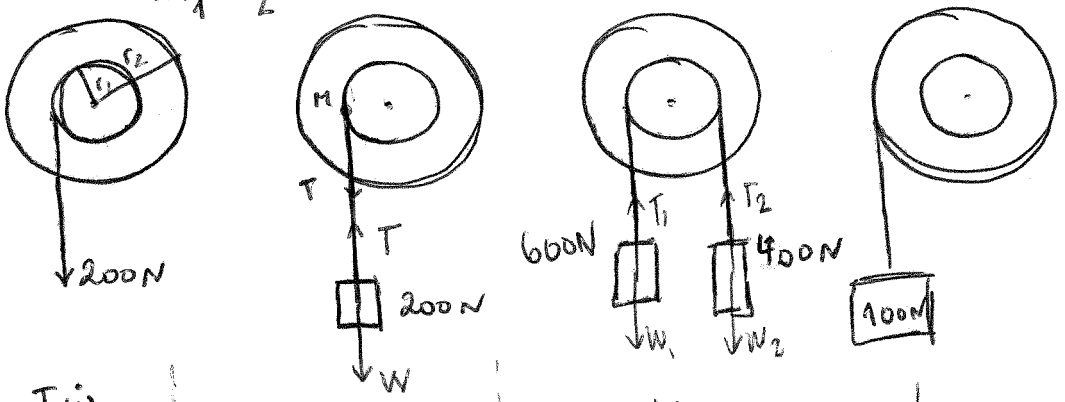
$$\Sigma F_n = \frac{m v^2}{r} = 0 \rightarrow \underbrace{T_B + T_C}_{\text{αγνώστοι}} - mg\sin 30 = 0$$

$$\Sigma F_t = m a_G \rightarrow mg\cos 30 = m a_G \rightarrow \underline{a_G = g\cos 30}$$

$$\Sigma \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G \quad \text{όμως} \quad \dot{\omega} = 0 \rightarrow \dot{\vec{H}}_G = 0.$$

$$\text{άρα} \quad \Sigma M_G = T_B \sin 30 \times 0{,}75 - T_B \cos 30 \times 1 + T_C \sin 30 \times 0{,}75 + T_C \cos 30 \times 1 = 0$$

$2r_1 = r_2$



$r_1 = I\dot{\omega}_I$

$\dot{\omega}_1 = \frac{F r_1}{I}$

$W - T = \frac{W}{g}\alpha$

όμως $a = a_M = \dot{\omega}_M r$

$T r_1 = I\dot{\omega}_{II}$

$\dot{\omega}_{II} = \frac{W r_1}{\frac{W}{g} r_1^2 + I}$

$W_1 - T_1 = \frac{W_1}{g}\alpha$

$T_2 - W_2 = \frac{W_2}{g}\alpha$

$T_1 r_1 - T_2 r_2 = I\dot{\omega}$

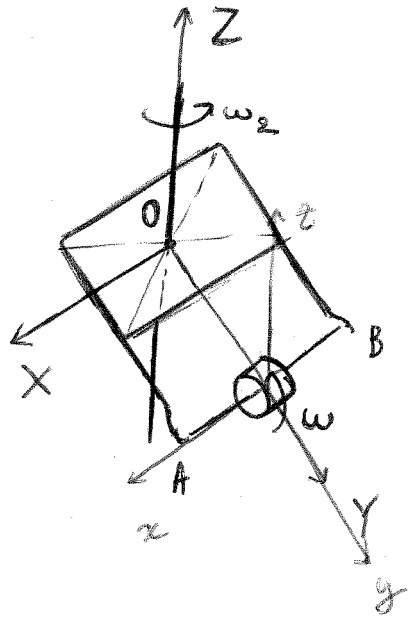
$a = r_1 \dot{\omega}$

$\dot{\omega}_{III} = \frac{(W_1 - W_2) r_1}{\left(\frac{W_1}{g} + \frac{W_2}{g}\right) r_1^2 + I}$

$\dot{\omega}_{IV} = \frac{W r_2}{\frac{W}{g} r_2^2 + I}$

> Η δύναμη τριβής στην τρίτη περίπτωση χρησιμοποιείται μόνο για να περιστρέψει τον τροχό, εκτός από τις ράβδες και τις μάζες.

Είναι πιο πρόχειρες



$r = 0.1\,m$ $\quad \omega_1 = 8\ rad/s$

$l = 0.1\,m$ $\quad \dot{\omega}_1 = 4\ rad/s$

$m = 6\,kg$ $\quad \omega_2 = 10\ rad/s = \text{σταθ.}$

OXYZ αδρανειακό

Cxyz συμπαγής στον κύλινδρο

α) $\dot{\vec{\omega}}_{OA} = ?$ κυλίνδρου β) $\dot{\vec{H}}_G = ?$ γ) $T_{KIN} = ?$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_1 \hat{x} + \omega_2 \hat{Z}$$

το $\hat{x}$ αλλάζει προσανατολισμό. Μόνο στη δεδομένη χρονική στιγμή $\hat{x} = \hat{X}$

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt}\hat{x}_1 + \omega_1 \frac{d\hat{x}_1}{dt} + \cancel{\dot{\omega}_2}\hat{Z} + \cancel{\omega_2 \frac{d\hat{Z}}{dt}}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_1 \hat{x} + \omega_1 (\omega_2 \underbrace{\hat{Z}}_{\equiv \hat{z}\ \text{τώρα}} \otimes \hat{x}) = \dot{\omega}_1 \hat{x} + \omega_1 \omega_2 \hat{y}$$

$$\vec{H}_c \Big|_{Cxyz} = I_{xx}\omega_x \hat{x} + \cancel{I_{yy}\omega_y \hat{y}} + I_{zz}\omega_z \hat{z} \qquad \left(\vec{H}_c = \underbrace{\mathbb{I}_{Cxyz}}_{\text{διαγώνιος αφού έχω κύριες άξονες}} \vec{\omega} \right.$$

$$= I_{xx}\omega_1 \hat{x} + I_{zz}\omega_2 \left(\hat{z} \equiv \hat{Z}\right)$$

<u>1ος τρόπος</u> $\quad \dfrac{d\vec{H}_c}{dt}\Big|_{OXYZ} = \dfrac{d\vec{H}_c}{dt}\Big|_{Cxyz} + \vec{\omega} \times \vec{H}_c$

$$\frac{d\vec{H}_c}{dt}\Big|_{Cxyz} = I_{xx}\dot{\omega}_1 \hat{x} + I_{zz}\omega_2 \frac{d\hat{Z}}{dt} = I_{xx}\dot{\omega}_1 \hat{x} + I_{zz}\omega_2 \left(-\omega_1 \hat{x} \otimes \hat{Z}\right)$$

πώς το βλέπει το Cxyz

$$= I_{xx}\dot{\omega}_1 \hat{x} + I_{zz}\omega_1\omega_2 \hat{y}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{H}_c = (\omega_1 \hat{x} + \omega_2 \hat{Z}) \times (I_{xx}\omega_1 \hat{x} + I_{zz}\omega_2 \hat{Z}) = I_{xx}\omega_1\omega_2 \hat{y} - I_{zz}\omega_1\omega_2 \hat{y}$$

<u>άρα</u> $\quad \dfrac{d\vec{H}_c}{dt}\Big|_{OXYZ} = I_{xx}\dot{\omega}_1 \hat{x} + \cancel{I_{zz}\omega_1\omega_2 \hat{y}} + I_{xx}\omega_1\omega_2 \hat{y} - \cancel{I_{zz}\omega_2\omega_1 \hat{y}}$

Εξισώσεις Euler

$$\left.\begin{aligned} I_{xx}\dot{\omega}_x - \cancel{(I_{yy}-I_{zz})\omega_y\omega_z} &= M_x \\ I_{yy}\dot{\omega}_y - \cancel{(I_{zz}-I_{xx})\omega_z\omega_x} &= M_y \\ \cancel{I_{zz}\dot{\omega}_z} - \cancel{(I_{xx}-I_{yy})\omega_x\omega_y} &= M_z \end{aligned}\right\}$$

λόγω συμμ.

$$\left.\frac{d\vec{H}_c}{dt}\right|_{Oxyz} = \vec{M}_c$$

$\vec{\omega} = \omega_1\hat{x} + \omega_2\hat{z}$ — όχι άλλες παραγωγίσεις

$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_1\hat{x} + \omega_1\omega_2\hat{y}$

λόγω συμμετρίας $I_{xx} = I_{zz}$

$I_{xx}\dot{\omega}_x - \underset{\omega_y=0}{0} = M_x$ $\qquad$ $I_{yy}\omega_1\omega_2 - \cancel{(I_{zz}-I_{xx})}\omega_1\omega_2 = M_y$

$M_z = 0$

2ος τρόπος: το Oxyz περιστρέφεται μαζί με το τραπέζι

$$\left.\frac{d\vec{H}_c}{dt}\right|_{Oxyz} = \frac{d}{dt}\left(I_{xx}\omega_1\hat{x} + I_{zz}\omega_2\hat{z}\right) = I_{xx}\dot{\omega}_1\hat{x} + I_{xx}\omega_1\frac{d\hat{x}}{dt} + I_{zz}\cancel{\dot{\omega}_2}\hat{z} + I_{zz}\omega_2\cancel{\frac{d\hat{z}}{dt}}$$

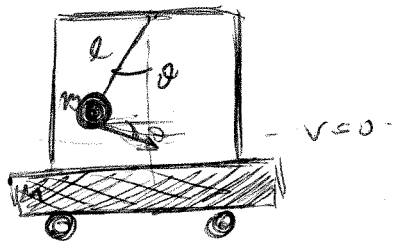
$$= I_{xx}\dot{\omega}_1\hat{x} + I_{zz}\omega_1(\omega_2\hat{z}\otimes\hat{x}) = I_{xx}\dot{\omega}_1\hat{x} + I_{xz}\omega_1\omega_2\hat{y}$$

γ) $T_{OA} = T_{KM} + T_{\text{περιστρ. ως προς KM}} = \frac{1}{2}m(\underbrace{\omega_2 d}_{V_c})^2 + \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_2^2 + \cancel{I_{yy}\omega_y^2} + I_{zz}\omega_z^2)$

στη γενική περίπτωση $\frac{1}{2}\vec{\omega}^T \mathbb{I}_{Oxyz}\vec{\omega}$

εν γένει μη διαγώνιος

$$\vec{V}_m = (\dot{x} + \dot{\theta} l \cos\theta, \dot{\theta} l \sin\theta).$$



$$T_m = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left((\dot{x} + \dot{\theta} l \cos\theta)^2 + (\dot{\theta} l \sin\theta)^2 \right)$$

$$V = mgl(1 - \cos\theta).$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left((\dot{x} + \dot{\theta} l \cos\theta)^2 + (\dot{\theta} l \sin\theta)^2 \right) + mgl(-1 + \cos\theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta). \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \rightsquigarrow p_x = \text{cst}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \boxed{M\ddot{x} + m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\sin\theta\,\dot{\theta}^2) = 0}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{x} + \dot{\theta} l \cos\theta) l \cos\theta + \dot{\theta} l^2 \sin^2\theta) = m(\dot{x} + \dot{\theta} l^2 \cos^2\theta + \dot{\theta} l^2 \sin^2\theta)$$
$$= m(\dot{x} + \dot{\theta} l^2)$$

$$\cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta) \cdot \dot{\theta} l(-\sin\theta) + \dot{\theta}^2 l^2 \sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m(\dot{x} + \dot{\theta} l \cos\theta)(-\dot{\theta} l \sin\theta) + \dot{\theta} l \sin\theta \cdot \dot{\theta} l \cos\theta) - mgl\sin\theta$$
$$= m(-\dot{\theta} l \sin\theta\,\dot{x} - \cancel{l^2\dot{\theta}^2 \sin\theta\cos\theta} + \cancel{\dot{\theta}^2 l^2 \sin\theta\cos\theta}) - mgl\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \cancel{m(\ddot{x} + \ddot{\theta} l \cos\theta - \dot{\theta}^2 l \sin\theta)}\ m(\ddot{x} + \ddot{\theta} l^2).$$

$$\boxed{\cancel{m}(\ddot{x} + \ddot{\theta} l^2) + \cancel{m}\dot{\theta} l \sin\theta\,\dot{x} + \cancel{m}g\, l \sin\theta = 0}$$

$$\ddot{x} + \ddot{\theta} l^2 + \dot{\theta} l \sin\theta\,\dot{x} + g l \sin\theta = 0$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

- Εξ. Νεύτωνα για σύστημα N σωματιδίων: $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \vec{F}_{j,i}$, $i=1,\dots,N$

  external — από τα joroi

- Περιορισμοί ΙΔεσμοί

ΟΛΟΝΟΜΟΙ $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$

> π.χ. απόλυτες σκληρές : $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$.

> κίνηση σε επιφάνεια ή καμπύλη

οι (x_1, x_2, x_3) δεν είναι ανεξάρτητες

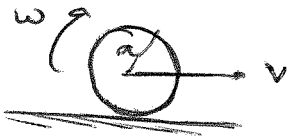
$x_3 = g(x_1, x_2)$

ΜΗ ΟΛΟΝΟΜΟΙ

> π.χ. κίνηση στο εξωτερικό σφαίρας

$r^2 - a^2 \geq 0$.

κίνηση χωρίς ολίσθηση



$\dot{x} = \dot{\phi} a$

ολοκληρώνεται σε $x = \phi a$

ΡΕΟΝΟΜΟΙ (εξαρτώνται από το χρόνο)

ΣΚΛΗΡΟΝΟΜΟΙ (ανεξάρτητοι του χρόνου)

→ **"ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ" ΤΗΣ ΥΠΑΡΞΗΣ ΔΕΣΜΩΝ**

i) Τα διανύσματα $\vec{r}_i$ ή/και οι συντεταγμένες τους δεν είναι ανεξάρτητα.

i) Εμφάνιση άγνωστων (προς προσδιορισμό) δυνάμεων.

ii) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η κατάσταση (κίνηση) των N σωματιδίων περιγράφεται από 3N ανεξάρτητες μεταβλητές (όταν δεν υπάρχουν δεσμοί)

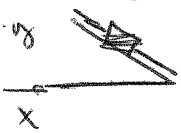
Βαθμοί ελευθερίας 3N το πλήθος

ΟΛΟΝΟΜΟΙ ΔΕΣΜΟΙ $f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$, $i = 1, \dots, k$

Λύνουμε τις εξισώσεις δεσμών και απαλοίφουμε k από τις 3N μεταβλητές

(3N−k) βαθμοί ελευθερίας

Παράδειγμα



(x,y) συνιστώσες όμως $y = ax$ (ολόμορφος)

→ 1 ΒΑΘΜΟΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

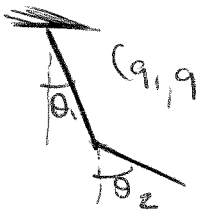
ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ (ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ)

$q_1, \dots, q_{3N-k}$ εξ. μετασχηματισμοί $q \to \vec{r}$ (επιστρέφω στο καρτεσιανό)

$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)$

Παρατηρήσεις

- Οι γενικευμένες μεταβλητές δε σχηματίζουν υποχρεωτικά διανύσματα (ανά τρεις



$(q_1, q_2) = (\theta_1, \theta_2)$

$(q_1, q_2) = (\phi, \theta)$

- Οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι υποχρεωτικά θέσεις.

ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ / ΑΡΧΗ D'ALEMBERT

> Πραγματικές και δυνατές μετατοπίσεις συστήματος:

- Πραγματική: η μετατόπιση ενός συστήματος από μια θέση τη στιγμή t_1 σε μια άλλη t_2 (αφήνοντας το να εξελιχθεί φυσικά)
- Δυνατή: μια υποθετική μετατόπιση που συμβαίνει μια χρονική στιγμή και είναι συμβατή με τους περιορισμούς του συστήματος.

Σύστημα Σε Ισορροπία

Η ολική δύναμη σε κάθε σωματίδιο είναι $\vec{F}_i = \vec{0}$.

$\rightsquigarrow \underbrace{\vec{F}_i \delta \vec{r}_i}_{\text{δυνατή μετατόπιση}} = 0 \longrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta r_i = 0}$

όμως $\vec{F}_i = \underbrace{\vec{F}_i^{(a)}}_{\text{αποκλίνοντας}} + \underbrace{\vec{f}_i}_{\text{δεσμών}} \longrightarrow \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \delta \vec{r}_i + \sum_i f_i \delta \vec{r}_i = 0$

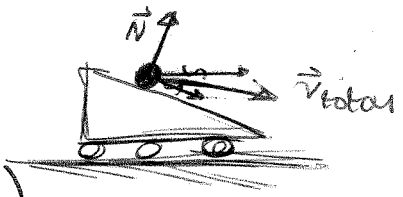
$\sum_i \vec{f}_i \delta \vec{r}_i = 0$ το συνολικό έργο των δυνάμεων των δεσμών είναι μηδενικό

π.χ. κίνηση σε λείο επίπεδο (χωρίς τριβή)

(κάθετη - δυνατότα τριβών)

τότε $\boxed{\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \delta \vec{r}_i = 0}$ ΑΡΧΗ ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ

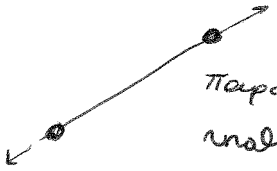
> Κίνηση σε κινούμενη επιφάνεια



Στην πραγματική μετατόπιση $W \neq 0$ ($\vec{N} \not\perp \delta\vec{r}$)

Στη δυνατή $W = 0$ ($\vec{N} \perp \delta\vec{r}$)

> Σκληρό σώμα



παράγουν δυνατό παθητικό έργο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Δε συνεπάγεται $\vec{F}_i^{(a)} = 0$ επειδή τα $\delta\vec{r}_i$ δεν είναι ανεξάρτητα.

Για ανεξαρτησία των δυνατών μετατοπίσεων αναγκάζομαι μετάβαση σε περιγραφή $(q_1, \dots, q_{3N-k})$

ΣΤΑΤΙΚΗ → ΔΥΝΑΜΙΚΗ

εξ. κίνησης: $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i \to \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \to \sum_i (F_i - \dot{\vec{p}}_i)\delta\vec{r}_i = 0$

"ενεργός δύναμη"

$$\sim \sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i)\delta\vec{r}_i + \sum \vec{f}_i \delta\vec{r}_i = 0 \to$$

$$\sim \boxed{\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i)\delta\vec{r}_i = 0}$$ ΑΡΧΗ D'ALEMBERT

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE

Μετασχηματισμός από καρτεσιανές σε γενικευμένες

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

| συμβάσεις άθροισης k επαναλαμβανόμενος δείκτης

Δυνατές Μετατοπίσεις: $\delta\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$ — επαναλαμβανόμενος

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$ γενικευμένη δύναμη

άρα $$\sum_i \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$$

Τα Q δεν είναι υποχρεωτικά δυνάμεις, όμως $Q\delta q$ έργο.

$$\sum_i \vec{p}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i,j} m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i,j} \Big[\underbrace{\frac{d}{dt}\Big(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\Big)}_{A} - m_i \dot{\vec{r}}_i \underbrace{\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\Big)}_{B} \Big] \delta q_j$$

Ⓐ $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \overset{?}{=} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ Ⓑ $\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\Big) = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\Big(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\Big)\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\Big) =$

$$= \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j}\Big(\sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\Big) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

<u>άρα</u> $$\sum_i \vec{p}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i,j} \Big[\frac{d}{dt}\Big(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\Big) - m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \Big] \delta q_j$$

$$\sum_j \Big\{ \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\Big(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Big)\Big] - \frac{\partial}{\partial q_j}\Big(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Big) - Q_j \Big\} \delta q_j = 0$$

όμως $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

άρα $$\sum_j \Big\{ \Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\Big) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \Big] - Q_j \Big\} \delta q_j = 0 .$$

Ανεξαρτησία δq_j : $$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\Big) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \quad \forall \; j = 1, .., 3N-k$$

Αν οι δυνάμεις δίνονται από συνάρτηση δυναμικού: $\vec{F}_i = -\nabla_i V$ (παραγωγ. ως προς συντεταγμένες του i

$$Q_j := \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i V \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \overset{?}{=} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Η συνάρτηση δυναμικού <u>δεν</u> εξαρτάται από τα $\dot{q}$ (εκτός π.χ. μαγνητικά πεδία)

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - V)\Big) = 0 \quad , j = 1, .., 3N-k$$

αυθάιρετο

$\mathcal{L} = T - V$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ τότε $$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\Big) = 0 \quad \forall \; j = 1, .., 3N$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, 3N-k \text{ βαθμοί ελευθερίας}$$

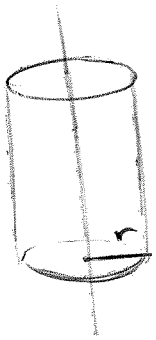
$\mathcal{L} = T - V$ λαγκρανζιανή μη μοναδική (υπάρχει για κάθε σύστημα οικογένεια συναρτήσεων που δίνουν ίδιες εξισώσεις)

Γενική έκφραση της T: $T = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$, $|\vec{v}|^2 = \frac{(ds)^2}{(dt)^2}$

$\boxed{\text{καρτεσιανό}}$ $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \rightarrow \frac{(ds)^2}{(dt)^2} = \frac{(dx)^2}{(dt)^2} + \frac{(dy)^2}{(dt)^2} + \frac{(dz)^2}{(dt)^2}$

άρα $T = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2]$

$\boxed{\text{κυλινδρικό Πολικό}}$ $(ds)^2 = (dr)^2 + (r\,d\phi)^2 + (dz)^2$



$$T = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2]$$

$\boxed{\text{Σφαιρικό}}$ $(ds)^2 = (dr)^2 + (r\,d\theta)^2 + (r \sin\theta\, d\phi)^2$

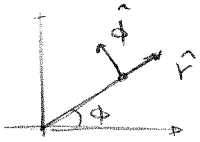
$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2)$$

Παρατήρηση
- Γνώση του $(ds)^2 \rightarrow T$
- Το δυναμικό "υπαγορεύει" το κατάλληλο σύστημα.

Πολικό Σύστημα

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2], \quad d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\phi\,\hat{\phi}.$$

Γενικευμένες Δυνάμεις $Q_r = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{F}\hat{r} = F_r$ δυναμη



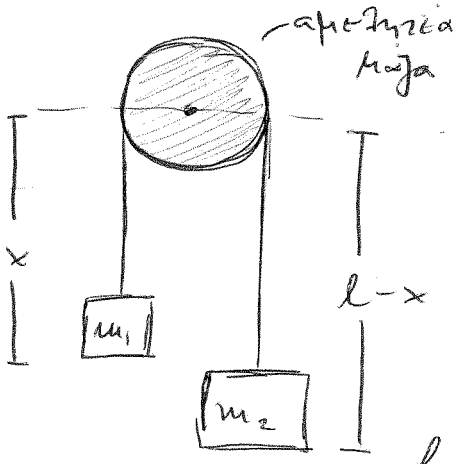
$Q_\phi = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \vec{F} r \hat{\phi} = r F_\phi$

Euler: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0.$

$q_1 = r$: $m\ddot{r} - m r \dot{\phi}^2 = F_r$ $\qquad$ $q_2 = \phi$: $m r^2 \ddot{\phi} + 2 m r \dot{r} \dot{\phi} = r F_\phi$

$\frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\phi}) = r F_\phi$

ΜΗΧΑΝΗ ΤΟΥ ATWOOD



(άρα δε λαμβάνω υπόψην το $\frac{1}{2} I\dot{\omega}$)

Ένας βαθμός ελευθερίας

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2$$

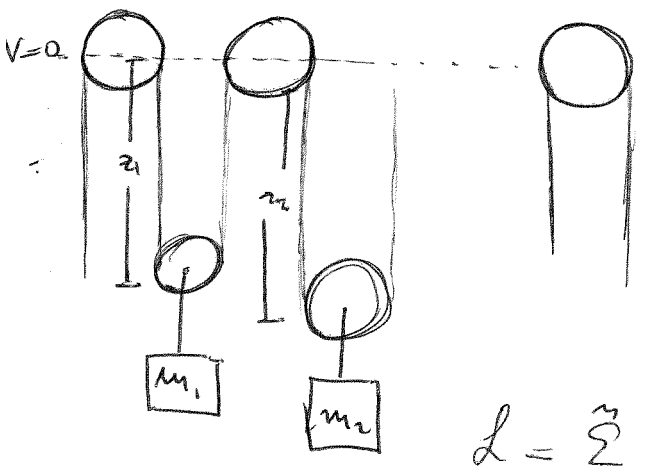
$$V = -m_1 g x - m_2 g (l - x)$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_1 g x + m_2 g (l - x)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)\dot{x}\right] - m_1 g + m_2 g = 0$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g}$$

Γενίκευση



n+1 σταθερές τροχαλίες

n κινήσεις

$$2z_1 + 2z_2 + \dots + 2z_n = c'$$

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = c$$

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{z}_i^2 + g \sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

περιορισμός : $z_n = c - (z_1 + \dots + z_{n-1})$

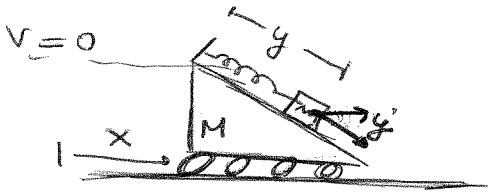
$$\dot{z}_n = -(\dot{z}_1 + \dots + \dot{z}_n)$$

άρα $$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{z}_i^2 + \frac{1}{2} m_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \dot{z}_i\right)^2 + g \sum_{i=1}^{n-1} (m_i - m_n) z_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} = 0$$

Συμμετρία ως προς $q_i \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(p_i) = 0$

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ $\longrightarrow$ ΔΙΑΤΗΡΗΣΙΜΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ



2 βαθμοί ελευθερίας

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} + \dot{y}\cos\phi)^2 + (\dot{y}\sin\phi)^2 \right]$$

$$+ mgy\sin\phi - \frac{1}{2} k y^2 \quad (1)$$

Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \rightarrow (M+m)\ddot{x} + m\ddot{y}\cos\phi = 0 \quad (2)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \rightarrow m(\ddot{x}\cos\phi + \ddot{y}) - mg\sin\phi + ky = 0 \quad (3)$$

Διατήρηση ορμής: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(p_x) = 0 \rightarrow p_x = \text{σταθ}$

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\dot{y}\cos\phi$$

Λύνουμε (2) ως προς $\ddot{x}$ $\rightarrow$ (3)

$$\left(\frac{m\cos^2\phi}{M+m} + 1\right) m\ddot{y} = -k\left(y - \frac{mg\sin\phi}{k}\right)$$

αρμονική ταλάντωση με Θ.Ι: $y_0 = \frac{mg\sin\phi}{k}$

συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{M+m}{M + m(1+\cos^2\phi)}}$

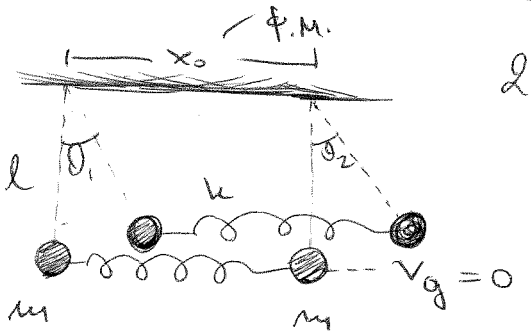
• $M \gg m$ (2) $\rightarrow \ddot{x} = 0$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

• $M \ll m$ (2) $\rightarrow \ddot{x} + \ddot{y}\cos\phi = 0$. Θα φανεί ότι το m είναι σταθερό (η μεταβαλλόμενη με σταθερή ταχύτητα).

καταλήγουμε ταλάντωση με $\omega = \sqrt{\frac{k}{\ }\ \frac{1}{\ }}$

$$\begin{pmatrix} m_1+m_n & m_n & \cdots & m_n \\ m_n & m_2+m_n & \cdots & m_n \\ \vdots & & \vdots & \\ m_n & m_n & \cdots & m_{n-1}+m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \vdots \\ \ddot{z}_{n-1} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} m_1-m_n \\ m_2-m_n \\ \vdots \\ m_{n-1}-m_n \end{pmatrix}$$

ΣΥΖΕΥΜΕΝΟΙ ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ



2 βαθμοί ελευθερίας (θ_1, θ_2)

$x_i = l\sin\theta_i \quad i=1,2$

$y_i = l(1-\cos\theta_i) \quad i=1,2$

Ως προς τη θέση ισορροπίας το καθετίως

$\dot{x}_i = l\cos\theta_i \cdot \dot{\theta}_1$

$\dot{y}_i = -l\sin\theta \cdot \dot{\theta}_i$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) =$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$V_g = \sum_{i=1}^{2} m g y_i = \sum_{i=1}^{2} m g l (1-\cos\theta_i)$$

$$V_k = \frac{1}{2} k \left\{ \left[(x_0 + x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right]^{1/2} - x_0 \right\}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} k \left\{ \left[(x_0 + l(\sin\theta_1 - \sin\theta_2))^2 + l^2(-\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 \right]^{1/2} - x_0 \right\}^2$$

$$\mathcal{L} = T - (V_g + V_k)$$

<u>Προσέγγιση μικρών ταλαντώσεων</u> $\sin\theta_i \simeq \theta_i$, $\cos\theta_i \simeq 1 - \frac{\theta_i^2}{2}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - m g l \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2} - \frac{1}{2} k l^2 \underbrace{(\theta_1 - \theta_2)^2}_{\text{αλληλεπιδρ. όροι}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Γενικευμένη ορμή: $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$

πολλ.

Εξισ. κιν.

10/6/15

(40)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad \mathcal{L}(q, \dot q, t)$$

όταν $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \rightsquigarrow \frac{d}{dt} p_i = 0$ όπου $p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}$ γενικευμένη ορμή

<u>Ολοκλήρωμα Jacobi</u>

$$h \equiv \dot q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} - \mathcal{L} \left(= \sum_i \dot q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i} - \mathcal{L} \right)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \cancel{\ddot q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}} + \dot q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot q_i + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\ddot q_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right)$$

$= 0$ (Euler-Lagrange)

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

όταν $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot q)$ (όχι και t (άμεση + έμμεση)) τότε το ολοκλήρωμα Jacobi είναι σταθερή διατηρήσιμη ποσότητα της κίνησης

<u>Καρτεσιανό δίσημα</u>

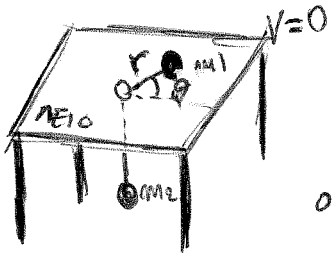
1 σωματίδιο : $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - V(x, y, z)$

$$h = \dot x m \dot x + \dot y m \dot y + \dot z m \dot z - \frac{1}{2} m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) + V(x, y, z) =$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) + V(x, y, z) \equiv E$$

$h \equiv E$ όταν η κινητική ενέργεια είναι ομογενής συνάρτηση των ταχυτήτων και η δυναμική ενέργεια συνάρτηση μόνο των θέσεων

↳ όχι αυτόνομο όπως π.χ. μαγνητικές δυνάμεις (εξάρτηση από v)



Θεωρούμε ότι η μάζα m_2 κινείται μόνο κατακόρυφα

l μήκος νήματος

οι γενικευμένες συντεταγμένες r, θ (2 βαθμοί ελευθερίας)

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m_2 \overset{(l-r)^{\cdot 2}}{\dot{r}^2} - (-m_2 g (l-r))$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\theta}^2 + m_2 g (l-r)$$

$\mathcal{L}$ ανεξάρτητη του χρόνου άρα η διατηρούμενη ποσότητα και είναι και η μηχανική ενέργεια.

δεν εξαρτάται από το θ άρα η γενικευμένη ορμή του θ διατηρείται (στροφορμή)

Euler - Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \rightarrow \underline{(m_1+m_2)\ddot{r} - m_1 r \dot{\theta}^2 + m_2 g = 0} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(m_1 r^2 \dot{\theta}\right) = 0.$$

$$\rightarrow m_1 (2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0 \quad (2) \quad \underline{m_1 r^2 \dot{\theta} = \text{σταθ.}} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{c}{m_1 r^2}$$

λύνοντας ως προς $\dot{\theta}$ οδηγούμαστε σε 1 Δt : αποσύζευξη βαθμών ελευθερίας

$$(1) \rightarrow (m_1+m_2)\ddot{r} - \frac{c^2}{m_1 r^3} + m_2 g = 0 \xrightarrow{\dot{r}} (m_1+m_2)\ddot{r}\dot{r} - \frac{c^2}{m_1 r^3}\dot{r} + m_2 g \dot{r} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{r}^2 - \frac{c^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r\right]}_{\equiv\ h\ \text{ενέργεια}} = 0$$

συνέχεια Lagrangian

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \rightsquigarrow p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = m_i r^2 \dot\theta = \text{σταθ.} \quad \text{στροφορμή}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \rightsquigarrow h = \dot r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot r} + \dot\theta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} - \mathcal{L} = T + V = E = \text{σταθερή}$$

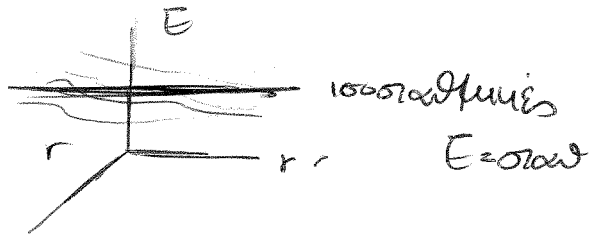
στη συγκεκριμένη περίπτωση

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot r^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 \dot\theta^2 + m_2 g r = E = \text{σταθ.}$$

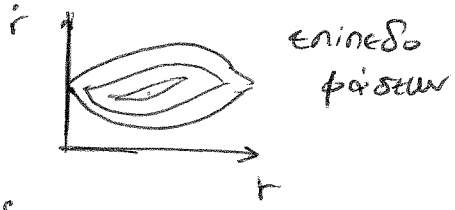
$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot r^2 + \frac{c^2}{2 m_1 r^2} + m_2 g r = E$$

$p_\theta = c$ άρα το c προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες!

Για δοσμένο c η $E = E(r, \dot r; c)$

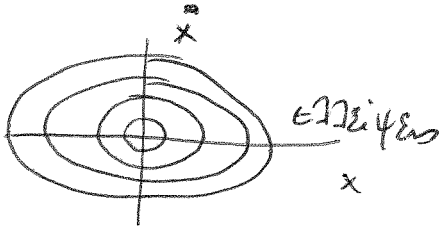


τα r και $\dot r$ μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο ώστε το E να παραμένει σταθερό

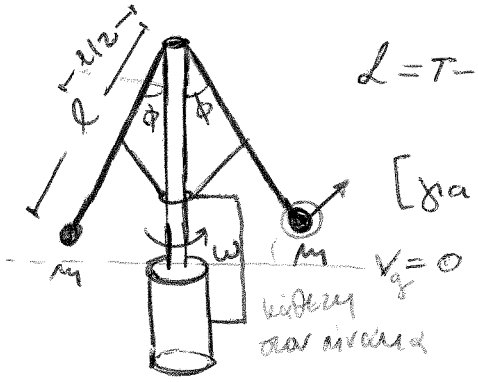


Αρμονικός Ταλαντωτής

$$E = \frac{1}{2} m \dot x^2 + \frac{1}{2} k x^2$$



Ρυθμιστής Μηχανής του Watt



1 B.E : ϕ

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(2m)\left[(l\dot\phi)^2 + (l\omega\sin\phi)^2\right] - (2m) g l (1-\cos\phi)$$

[για $t = 0$ $v = 0$]

Euler-Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$

$\rightsquigarrow \ddot{\phi} = \sin\phi(\omega^2\cos\phi - g/l)$. μη γραμμική ΔΕ.

Δεν διατηρείται η ορμή αφού η λαγκρανζιανή εξαρτάται από το ϕ.
Όμως δεν εξαρτάται από το χρόνο άμεσα, επομένως $\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$\rightsquigarrow h = \text{const.}$ (το h δεν είναι η ενέργεια αφού η L δεν είναι ομογενής του $\dot{\phi}^2$)

$$h \overset{\text{Δ.Ε.}}{=} \dot{\phi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L = \dot{\phi}\,[2ml^2\dot{\phi}] - \frac{1}{2}(2m)\left[(l\dot{\phi})^2 + (l\omega\sin\phi)^2\right]$$

$$+ 2mgl(1-\cos\phi) = \frac{1}{2}(2m)[(l\dot{\phi})^2 - (l\omega\sin\phi)^2] + 2mgl(1-\cos\phi) \neq E_{total}$$

αφού είναι το h διατηρήσιμη ποσότητα (ακόμα και αν δεν είναι το E) μπορώ να κάνω ανάλυση σε ισοδυναμικές επιφάνειες κ.λ.π.

Θέσεις Ισορροπίας $\sin\phi(\omega^2\cos\phi - g/l) = 0$.

α) $\phi = 0$

β) $\phi = \cos^{-1}(g/l\omega^2)$ — ευσταθής

Ευστάθεια

Α) $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, $\phi_0 = 0$ $\rightsquigarrow \delta\ddot{\phi} = \delta\phi\underbrace{(\omega^2 - g/l)}_{\text{ανάλογα με το πρόσημο}}$ $\begin{pmatrix}\sin\delta\phi \simeq \delta\phi \\ \cos\delta\phi \simeq 1\end{pmatrix}$

Αν $\omega^2 < g/l \rightsquigarrow \delta\phi$ ημιτονοειδής $\rightsquigarrow$ ευστάθεια έχω εκθετικές ή αρμονικές λύσεις

$\omega^2 > g/l \rightsquigarrow \delta\phi$ εκθετικές $\rightsquigarrow$ αστάθεια

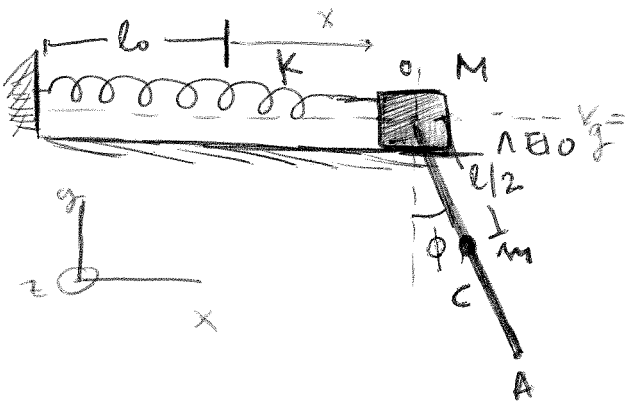
Επομένως η ευστάθεια εξαρτάται από το ω! Γιαμικρά ω το 0 είναι ευσταθές μόνο.
Μάλιστα στην κρίσιμη τιμή του $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ αλλάζει και το δεύτερο [illegible] αστάθεια [illegible].

γραμμικοποίηση γύρω από ΘΙ

(42)

B) $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ $\qquad \ddot{\phi} = f(\phi) \rightsquigarrow \ddot{\phi}_0 + \delta\ddot{\phi} = f(\phi_0 + \delta\phi)$

$$\ddot{\phi}_0 + \delta\ddot{\phi} = f(\phi_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial \phi}\right|_{\phi_0} \delta\phi \rightsquigarrow \boxed{\delta\ddot{\phi} = \left.\frac{\partial f}{\partial \phi}\right|_{\phi_0} \delta\phi}$$



$V_g = 0 \quad \mathcal{L} = T - V$

$$V_k = \frac{1}{2} k x^2$$

$$V_g = -mg\frac{l}{2}\cos\phi$$

$$T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}^2, \quad T_\rho = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\phi}^2$$ (κίνηση και περιστροφή)

$$I_c = \frac{1}{12} m l^2$$

την v_c την υπολογίζουμε με νόμο ταχυτήτων!

(Με κινητικές ενέργειες είναι λίγο πιο δύσκολο γιατί από Θ. Koenings πρέπει να λάβω υπόψιν και την κίνηση του O)

<u>Κινηματική</u> : $\vec{v}_c = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{OC} = \dot{x}\hat{x} + \dot{\phi}\frac{l}{2}\cos\phi\,\hat{x} + \dot{\phi}\frac{l}{2}\sin\phi\,\hat{y} =$

$$= \left(\dot{x} + \dot{\phi}\frac{l}{2}\cos\phi\right)\hat{x} + \dot{\phi}\frac{l}{2}\sin\phi\,\hat{y}.$$

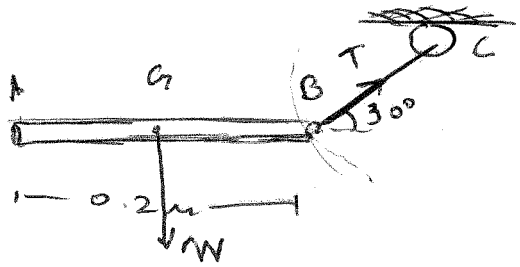
$$T_\rho = \frac{1}{2} m \left[\left(\dot{x} + \dot{\phi}\frac{l}{2}\cos\phi\right)^2 + \left(\dot{\phi}\frac{l}{2}\sin\phi\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{12} m l^2 \dot{\phi}^2$$

$$\mathcal{L} = T_M + T_\rho - V_k - V_g \equiv \mathcal{L}(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi})$$ $\rightsquigarrow$ η Διατηρήσιμη ποσότητα

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0.$$

$m = 1\,Kg$

$\dot{\omega}, T = ?$



$\cancel{\vec{a}_B = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{CB}}$

$$\vec{a}_B = \lambda\,\hat{z} \times \left(-\overset{\cos 30}{\sin 30}\,\hat{x} + \overset{\sin 30}{\cos 30}\,\hat{y}\right) =$$

$$\boxed{\hat{a}_B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} - \frac{1}{2}\hat{x}\right)}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{BG} = -\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\hat{y} - \frac{\lambda}{2}\hat{x} + \dot{\omega}\,\hat{z} \times (-0{,}1\hat{x}) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\hat{y} - \frac{\lambda}{2}\hat{x} - 0{,}1\dot{\omega}\,\hat{y}.$$

$$\Sigma F_x = m a_x \rightsquigarrow -\frac{\lambda\sqrt{3}}{2} = T\cos 30$$

$$\rightsquigarrow T\cdot\cos 30 = m\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \longrightarrow T\frac{\sqrt{3}}{2} = -\lambda \longrightarrow \lambda = -T\sqrt{3}$$

$$T\sin 30 - W = -\frac{\lambda}{2} - 0{,}1\dot{\omega}$$

$$\Sigma M = I\dot{\omega} \rightsquigarrow T\sin 30\cdot 0{,}1 = \frac{m l^2}{12}\cdot\dot{\omega} \rightsquigarrow \frac{T}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{10} = \frac{(2\times 10^{-2})^2}{\cancel{12}\,6}\dot{\omega}$$

$$\frac{T}{10} = \frac{4\cdot 10^{-4}}{6}\dot{\omega} \rightsquigarrow T = \frac{4\cdot 10^{-3}}{6}\dot{\omega} = \frac{2\cdot 10^{-3}}{3}\dot{\omega}$$

$$\dot{x} = \dot{\theta} l$$

$$\frac{10^{-3}}{3}\dot{\omega} - g = +\frac{T\sqrt{3}}{2} - 0.1\dot{\omega}$$

$$= \frac{10\sqrt{3}}{3}\cdot 10^{-3}\dot{\omega} - 0.1\dot{\omega}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\Big(\overset{p}{\cancel{\frac{\partial L}{\partial q}}}\Big) = 0 \rightsquigarrow p_{q_i} = \text{const}.$$

Η $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{dF(q,t)}{dt}$ δίνει τις ίδιες εξισώσεις κίνησης με την $\mathcal{L}$.

Απόδειξη

Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_a}\left(\mathcal{L} + \frac{dF}{dt}\right)$

$a = 1, \dots, N$

$$= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_a}\left(\frac{\partial F}{\partial q_b}\dot{q}_b + \frac{\partial F}{\partial t}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_a}\left(\frac{\partial F}{\partial q_b}\dot{q}_b + \frac{\partial F}{\partial t}\right) =$$

$$= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a}\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_a}\right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_a \partial q_b}\dot{q}_b + \frac{\partial^2 F}{\partial q_a \partial t}\right) =$$

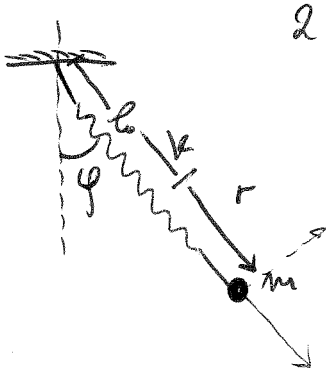
$$= [\ \ ] + \frac{\partial^2 F}{\partial q_a \partial q_b} + \cancel{\frac{\partial^2 F}{\partial q_a \partial t} - (\ \ )}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_a}\right) = \frac{\partial}{\partial q_a}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{T} - \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{V} + \underbrace{2x\dot{x}}_{\frac{d(x^2)}{dt}} + A(t) \quad \text{άρα α.α.τ.} \quad + \int^t A(t)\,dt$$

Παράδειγμα

1)

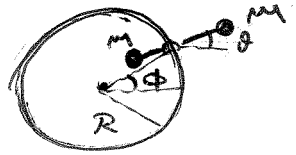


2 βαθμοί ελευθερίας: ϕ, r

$$T = \frac{1}{2}m(l_0 + r)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$$V = \frac{1}{2}kr^2 + V_g$$

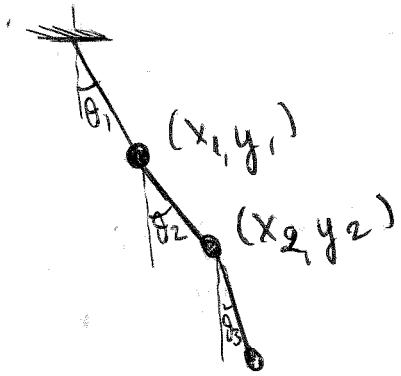
(2)



$$T = T_{KM} + T_{KM}^{\pi\varphi}$$

$$\frac{1}{2} m_c \dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2$$

(3) Διπλό/πολλαπλό εκκρεμές

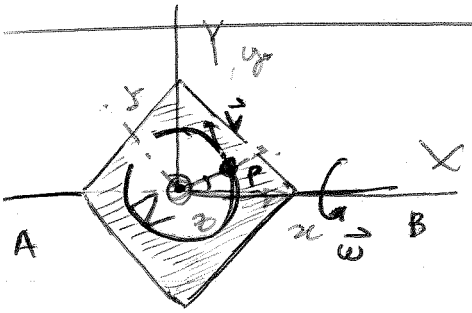


$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

βρίσκουμε τα $x_1(\theta_1, \theta_2)$

x_2, y_1, y_2

μπορώ να βρω τα $T(\theta_1, \theta_2)$



$\vec{v}_p = ;$

$\vec{a}_p = ;$

$v = \text{σταθ.}\ \omega = \text{σταθ}$

OXYZ : σταθερό

Oxyz: σωματοκαρφωμένο σύστημα

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{\mu\varepsilon\tau} + \vec{v}_{\sigma\chi\varepsilon\tau.}$$

$$\vec{v}_{\sigma\chi\varepsilon\tau} = v\,\hat{i}_t = v(-\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y})$$

$$\vec{v}_{\mu\varepsilon\tau} = \cancel{\vec{v}_0}^{\,0} + \vec{\omega} \times \vec{OP} = \omega r \sin\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{v}_p = -v\sin\theta\,\hat{x} + v\cos\theta\,\hat{y} + \omega r\sin\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_{\mu\varepsilon\tau} + \vec{a}_{cor} + \vec{a}_{\sigma\chi\varepsilon\tau}$$

$$\vec{a}_{\sigma\chi\varepsilon\tau} = \cancel{\dot{v}\,\hat{i}_t} - \frac{v^2}{r}\,\hat{i}_n = -\frac{v^2}{r}(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y})$$

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\sigma\chi\varepsilon\tau} = 2\omega v\cos\theta\,\hat{z}$$

$$\vec{a}_{\mu\varepsilon\tau} = \cancel{\vec{a}_0} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP}) = -\omega^2 r\sin\theta\,\hat{y}$$

3 2ος τρόπος Σύνθεσης Περιστροφών (Oxyz σωματοπαγές σύστημα αναφοράς)

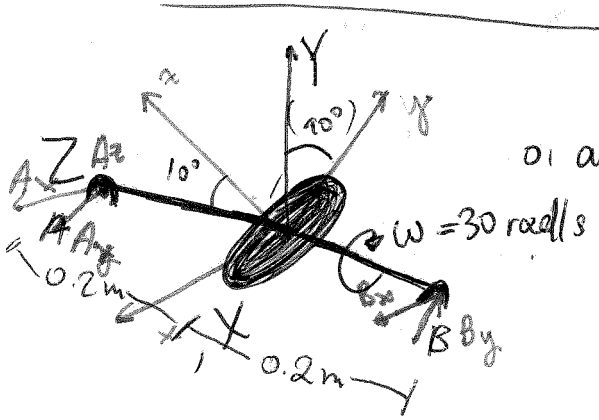
$$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x_0} \neq \frac{df(x_0)}{dx}$$

$$\vec{\omega}_{0\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_1 \hat{x} + \frac{v}{r}\hat{z}$$

$$\vec{v}_P = \cancel{\vec{v}_0} + \vec{\omega}_{0\Omega} \times \vec{OP} = \dots$$

$$\frac{d\vec{\omega}_{0\Omega}}{dt} = \dot{\omega}_1 \cancel{\hat{x}} + \cancel{\omega_1 \frac{d\hat{x}}{dt}} + \cancel{\frac{\dot{v}}{r}\hat{z}}^{\,0} + \frac{v}{r}\frac{d\hat{z}}{dt} = \frac{v}{r}(\omega \hat{x} \times \hat{z}) = -\frac{v}{r}\omega \hat{y}$$

$$\vec{a}_P = \cancel{\vec{a}_0} + \dot{\vec{\omega}}_{0\Omega} \times \vec{OP} + \vec{\omega}_{0\Omega} \times (\vec{\omega}_{0\Omega} \times \vec{OP})$$



οι αντιδράσεις πραγματικές δεν είναι σταθερές

$m = 10\ kg$

$I_z = 0.1\ kgm^2$

$I_x = I_y = 0.05\ kgm^2$

Εξισώσεις για το ΚΜ: $\sum F_x = m a_{Gx} \rightarrow A_x + B_x = 0$ (1)

$\sum F_y = m a_{Gy} \rightarrow A_y + B_y - 98.1 = 0$ (2)

$\sum F_z = m a_{Gz} \rightarrow A_z = 0$ (3)

Εξισώσεις Περιστροφής

Πάω από το ΚΜ : $\left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_{GXYZ} = \left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_{Gxyz} + \vec{\omega} \times \vec{H}_G$ (ισοδύναμη με Euler)

Euler (χρήσιμα-ο σύστημα αρχή)

$$I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y \omega_z = \sum M_x \quad (4) \qquad = \vec{M}_G$$

$$I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z \omega_x = \sum M_x = 0$$

$$I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x \omega_y = \sum M_z = 0.$$

$\omega_x = 0$

$\omega_y = -30 \sin 10^\circ$

$\omega_z = +30 \cos 10^\circ$

$\vec{v} = v\,\hat{i}_t$

$\vec{a} = \dot{v}\,\hat{i}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{i}_n$

$\vec{H}_o = \vec{M}_o$, O ακίνητο.

$\dot{\vec{H}}_k = \mathbb{I}_{C_{xyz}}\vec{\omega}$ $\quad \left.\frac{d\vec{H}_k}{dt}\right|_\Sigma = \left.\frac{d\vec{H}_k}{dt}\right|_k + \vec{\omega}\times\vec{H}_k$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\cdot\hat{i}_t$

$\vec{r} = r\cdot\hat{i}_r$

$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{i}_r + r\dot{\theta}\,\hat{i}_\theta$

αντινοί εγκαρσιοκίνηση

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{i}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{i}_\theta$

για κεντρικό σώματα

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z = M_x \\ I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x = M_y \\ I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y = M_z \end{cases}$$

$J_o = \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22} + I_{33}) = \frac{1}{2}\left(\int_m (y^2+z^2)\,dm + \int_m (x^2+z^2)\,dm + \int_m (x^2+y^2)\,dm\right)$

$I_i = \int_m x_i^2\,dm$

ως προς άξονα $I_{xx} = \int_m (y^2+z^2)\,dm$

ως προς επίπεδο $I_x = \int_m x^2\,dm$

ως προς σημείο $I_o = \int_m r^2\,dm$

για πλάκα $I_{33} = I_{11} + I_{22}$

$$\mathbb{I}' = \mathbb{I}^c + m\begin{bmatrix} \xi_2^2+\xi_3^2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

όπου $\vec{\xi}$ μετατόπιση από το C

$(ds)^2 = (dr)^2 + (r\,d\varphi)^2 + (dz)^2$

$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2]$

$(ds)^2 = (dr)^2 + (r\,d\theta)^2 + (r\sin\theta\,d\varphi)^2$

$ds = (dr, r\,d\theta, r\sin\theta\,d\varphi)$

$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2]$

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{\text{εξ}}\,dt = \Delta\vec{p}_c$

$\dot{\vec{H}}_k = \vec{M}_k = \frac{d}{dt}(\mathbb{I}\vec{\omega})$

$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\vec{H}_k\right|_\Sigma = \vec{M}_k}$

$\dot{\vec{H}}_k = \vec{M}_k$ αν k ακίνητο ή $k \equiv cm$