ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
2η Σειρά Ασκήσεων στη "Μιγαδική Ανάλυση "

ακαδ. έτος 2011–12

1. Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^3}\, dz\,,$$

όπου ο κύκλος C^+ με θετική φορά διαγραφής δεν διέρχεται από τα σημεία $z = 0$ και $z = \pi$. Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Λύση. (i) Ο κύκλος C δεν περιέχει τα σημεία 0 και π. Από το θεώρημα Cauchy $I = 0$.

(ii) Ο κύκλος C περιέχει μόνο το σημείο 0. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{\cos z/(z-\pi)^3}{z}\, dz = \left.\frac{\cos z}{(z-\pi)^3}\right|_{z=0} = -\frac{1}{\pi^3}\,.$$

(iii) Ο κύκλος C περιέχει μόνο το σημείο π. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left\{\frac{2!}{2\pi i}\oint_{C^+} \frac{\cos z/z}{(z-\pi)^3}\, dz\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left.\left(\frac{\cos z}{z}\right)''\right|_{z=\pi} \\ &= \frac{1}{2}\left.\frac{-z^2\cos z + 2z\sin z + 2\cos z}{z^3}\right|_{z=\pi} = \frac{\pi^2-2}{2\pi^3}\,. \end{aligned}$$

(iv) Ο κύκλος C περιέχει τα σημεία 0 και π. Έστω C_1 και C_2 δύο κύκλοι που δεν τέμνονται και βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου C, έτσι ώστε ο C_1 περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 0 και ο C_2 περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο π. Τότε,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1^+} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^3}\, dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2^+} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^3}\, dz && \text{(γενικευμένο θεώρημα Cauchy)} \\ &= -\frac{1}{\pi^3} + \frac{\pi^2-2}{2\pi^3} && \text{(περιπτώσεις } (ii) \text{ και } (iii)) \\ &= \frac{\pi^2-4}{2\pi^3}\,. \end{aligned}$$

■

2. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο δίσκο $D(0,R)$, αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, d\theta = 2\pi f'(0)\,,$$

όπου $0 < r < R$.

Λύση. Αν $z = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, τότε $dz = ire^{i\theta}d\theta = izd\theta$, οπότε $d\theta = dz/iz$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, d\theta &= \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{iz^2}\, dz \\ &= 2\pi\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-0)^2}\, dz\right\} \\ &= 2\pi f'(0)\,. && \text{(ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για παραγώγους)} \end{aligned}$$

■

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{n!}\,.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz &= \frac{2\pi i}{n!} \cdot \left\{ \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz \right\} \\
&= \frac{2\pi i}{n!} \cdot \left. (e^z)^{(n)} \right|_{z=0} \\
&= \frac{2\pi i}{n!} \cdot e^0 = \frac{2\pi}{n!} i\,.
\end{aligned}$$

Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Επειδή $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$, είναι

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz &= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{in\theta}}\, d\theta \\
&= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos\theta + i\sin\theta}}{e^{in\theta}}\, d\theta \\
&= i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} e^{i(\sin\theta - n\theta)}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin\left(n\theta - \sin\theta\right)\, d\theta + i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos\left(n\theta - \sin\theta\right)\, d\theta\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{n!} \quad \text{και} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin\left(n\theta - \sin\theta\right)\, d\theta = 0\,.$$

■

4. (α′) Έστω η συνάρτηση $f_1(z) = \dfrac{z^2 + 6z}{(2-z)(z+2)^2} = \dfrac{1}{2-z} - \dfrac{2}{(z+2)^2}$. Να βρεθεί το ανάπτυγμα της f_1 σε σειρά Taylor με κέντρο το $z_0 = 0$, καθώς επίσης και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

   (β′) Να βρεθεί το ανάπτυγμα της $f_2(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4z - 3i}$ σε δυναμοσειρά με κέντρο το $z_0 = -2$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς;

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad \text{και} \quad \frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n\,, \quad |w| < 1\,.$$

(α′) Είναι

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2(1-z/2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}\,. \qquad (|z/2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2)$$

Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w| < 1$, παίρνουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n w^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n w^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) w^n\,, \quad |w| < 1\,.$$

Επομένως,

$$\frac{2}{(z+2)^2} = \frac{1}{2(1+z/2)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)\frac{z^n}{2^{n+1}}\,. \ (|z/2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2)$$

Άρα, για $|z| < 2$ έχουμε

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left[1 + (-1)^{n+1}(n+1)\right] z^n\,.$$

Ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $R = 2$.

(β′) Είναι

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{(z+2)^2 - (4+3i)} \\ &= -\frac{1}{4+3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{(z+2)^2}{4+3i}} \\ &= -\frac{1}{4+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(z+2)^2}{4+3i}\right)^n && \left(\left|\tfrac{(z+2)^2}{4+3i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+2| < \sqrt{|4+3i|}\right) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^{2n}}{(4+3i)^{n+1}}\,. && (|z+2| < \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $R = \sqrt{5}$.

■

5. Υποθέτουμε ότι η ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε $\Re f(z) \le 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.
<u>*Υπόδειξη*</u>. Θεωρείστε τη συνάρτηση $g(z) = e^{f(z)}$.

Λύση. Η συνάρτηση $g(z) := e^{f(z)}$ είναι ακέραια με

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = |e^{(\Re f(z) + i\Im f(z))}| = e^{\Re f(z)} \le e^0 = 1\,. \qquad (\Re f(z) \le 0 \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C})$$

Επομένως, από το θεώρημα Liouville η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Τότε και η $|g(z)| = e^{\Re f(z)}$ θα είναι σταθερή οπότε και η $\Re f(z)$ είναι σταθερή. Άρα, από "βασικό παράδειγμα" και η συνάρτηση f θα είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. ■

6. Αν $f(z) = z^2 - 3i$, να βρεθούν τα σημεία του κλειστού δίσκου $\overline{D}(0,\,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 2\}$ στα οποία η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

Λύση. Επειδή η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, από την αρχή μεγίστου η $|f|$ θα παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο του $D(0,\,2)$ που είναι ο κύκλος $|z| = 2$ με εξίσωση $z(\theta) = 2e^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le \pi$. Στον κύκλο $|z| = 2$ είναι

$$\begin{aligned} |f(z)| = |z^2 - 3i| = |4e^{2i\theta} - 3i| &= |4\cos 2\theta + i(4\sin 2\theta - 3)| \\ &= \sqrt{(16\cos^2 2\theta + (4\sin 2\theta - 3)^2} \\ &= \sqrt{25 - 24\sin 2\theta}\,. \end{aligned}$$

Η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της αν $\sin 2\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = -\pi/4$, δηλαδή για $z = 2e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}(1-i)$. Επομένως,

$$\max_{|z|\le 2} |f(z)| = |f(\sqrt{2}(1-i))| = 7\,.$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε αν η f έχει ρίζα στον ανοικτό δίσκο $D(0,\,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$. Είναι $f(z) = 0$ αν και μόνο αν

$$z^2 = 3i \Leftrightarrow (x+iy)^2 = 3i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 3i \Leftrightarrow \left\{x^2 - y^2 = 0, 2xy = 3\right\}\,.$$

Η λύση του συστήματος είναι $x = y = \sqrt{3/2}$ και $x = y = -\sqrt{3/2}$.
<u>*2ος τρόπος*</u>. Επειδή $z^2 = 3i = 3e^{\pi i/2}$, είναι

$$z_k = \sqrt{3}e^{(2k\pi i + \pi i/2)/2},\ k = 0, 1,\ \text{δηλαδη}\ z_0 = \sqrt{3}e^{\pi i/4}\ \text{και}\ z_1 = \sqrt{3}e^{5\pi i/4}\,.$$

Άρα,

$$\min_{|z|\le 2} |f(z)| = \left|f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}(1+i)\right)\right| = \left|f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}(1+i)\right)\right| = 0\,.$$

■

7. Έστω η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ και τέτοια ώστε $|f(z)| > 1$ για κάθε $|z| = 1$. Αν $f(0) = i$, αποδείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

   Λύση. Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει καμία ρίζα στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Τότε, από την αρχή ελαχίστου η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο που είναι ο μοναδιαίος κύκλος $|z| = 1$. Όμως από την υπόθεση είναι

$$|f(z)| > 1 \text{ για κάθε } |z| = 1 \text{ και } |f(0)| = |i| = 1\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

   Άρα η f θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. ■

8. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(0,\,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ με $|f(z)| \le M < \infty$ για κάθε $z \in D(0,\,R)$. Αν το 0 είναι ρίζα τάξης 2 της f, δηλαδή $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) \ne 0$, αποδείξτε ότι

$$|f(z)| \le \frac{M}{R^2}|z|^2 \quad \text{για κάθε } z \in D(0,\,R) \tag{1}$$

   και

$$|f''(0)| \le \frac{2M}{R^2}\,. \tag{2}$$

   <u>*Υπόδειξη*</u>. Θεωρείστε τη συνάρτηση

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^2} & \text{αν } 0 < |z| < R, \\ \frac{f''(0)}{2!} & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

   Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots \\ &= z^2\left(\frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!}z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2} + \cdots\right), \quad |z| < R\,. \end{aligned}$$

Αν $g(z) := \dfrac{f''(0)}{2!} + \dfrac{f'''(0)}{3!}z + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2} + \cdots$, τότε η g είναι αναλυτική στο δίσκο $D(0,\, R)$ με

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^2} & \text{αν } 0 < |z| < R, \\ \\ \frac{f''(0)}{2!} & \text{αν } z = 0\ . \end{cases}$$

Έστω $z \in D(0,\, R)$, z σταθερό. Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε r με $|z| < r < R$. Από την αρχή μεγίστου έχουμε

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|^2} \leq \frac{M}{r^2}\ .$$

Στη συνέχεια παίρνοντας το $r \to R$ προκύπτει ότι

$$|g(z)| \leq \frac{M}{R^2} \quad \text{για κάθε } z \in D(0,\, R)$$

και αυτό αποδεικνύει τις ανισότητες (1) και (2).

<u>*Σημείωση*</u>. Για την απόδειξη της (2) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τις ανισότητες Cauchy. Πράγματι,

$$|f''(0)| \leq \frac{M2!}{R^2}\ .$$

■

Συμβολισμός: $\Im z = \operatorname{Im} z$, $\Re z = \operatorname{Re} z$
Παράδοση των ασκήσεων έως 5/7/2012