ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
2η Σειρά Ασκήσεων στη "Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ"

ακαδ. έτος 2010–11

1. Εξετάστε αν τα παρακάτω όρια υπάρχουν και αν υπάρχουν να υπολογιστούν:

$$(i) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}\ln(1+x) \qquad\qquad (ii) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2}\,.$$

Λύση.

(i) Έστω $f(x,y)=\frac{x}{y}\ln(1+x)$. Κατά μήκος των ευθειών $y=kx$, $k\neq 0$, έχουμε

$$f(x,kx)=\frac{1}{k}\ln(1+x)\ , \qquad x\neq 0$$

και επομένως

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx)=0\,.$$

Όμως, κατά μήκος της παραβολής $y=x^2$ είναι $f\left(x,x^2\right)=\frac{1}{x}\ln(1+x)$, $x\neq 0$ και κατά συνέπεια

$$\lim_{x\to 0} f\left(x,x^2\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\overset{\text{(L'Hôpital)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1\,.$$

Άρα, το $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{y}\ln(1+x)$ δεν υπάρχει.

(ii) Είναι

$$\frac{x^2-x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2}=1+\frac{y^3-x^3}{x^2+y^2}$$

και

$$\begin{aligned}\left|\frac{y^3-x^3}{x^2+y^2}\right| &= \frac{\left|(y-x)\left(y^2+xy+x^2\right)\right|}{x^2+y^2}\\ &\leq \frac{|y-x|\left(y^2+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+x^2\right)}{x^2+y^2}\\ &= \frac{3}{2}|y-x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0\,.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^3-x^3}{x^2+y^2}=0$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2}=1\,.$$

<u>*2ος τρόπος*</u>. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, δηλαδή $\{x=r\cos\theta, x=r\sin\theta\}$, όπου $r\geq 0$ και $0\leq\theta<2\pi$, έχουμε

$$\left|\frac{y^3-x^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{r^3\left|\cos^3\theta-\sin^3\theta\right|}{r^2}\leq 2r\xrightarrow[r\to 0^+]{}0$$

και επομένως

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^3-x^3}{x^2+y^2}=0\,.$$

■

2. Για ποια $\alpha \geq 0$ η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{\alpha} \frac{\sin y}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0,0)$;
Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε πολικές συντεταγμένες

Λύση. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, δηλαδή $\{x = r\cos\theta, x = r\sin\theta\}$, όπου $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, έχουμε

$$\begin{aligned} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| &= r^{\alpha-2} |\cos\theta|^{\alpha} |\sin(r\sin\theta)| \\ &\leq r^{\alpha-2} |\cos\theta|^{\alpha} |r\sin\theta| && (|\sin t| \leq |t|) \\ &= r^{\alpha-1} |\cos\theta|^{\alpha} |\sin\theta| \\ &\leq r^{\alpha-1} \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0 \, . && (\text{αν } \alpha > 1) \end{aligned}$$

Δηλαδή για $\alpha > 1$ είναι $\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$. Επομένως, για κάθε $\alpha > 1$ η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Έστω τώρα $0 \leq \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1-\alpha \leq 1$. Κατά μήκος της ευθείας $y = x$ έχουμε

$$f(x,x) = \frac{\sin x}{2x^{2-\alpha}} \, , \qquad x \neq 0$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x,x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x^{2-\alpha}} \\ &= \frac{1}{2(2-\alpha)} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^{1-\alpha}} && (\text{κανόνας L'Hôpital}) \\ &= \begin{cases} 1/2 & \text{αν } \alpha = 1 \ , \\ \pm\infty & \text{αν } 0 \leq \alpha < 1 \ . \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα, η f δεν είναι συνεχής αν $0 \leq \alpha \leq 1$. ■

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin(x/y) & \text{αν } y \neq 0 \ , \\ 0 & \text{αν } y = 0 \ . \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Είναι η συνάρτηση $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ συνεχής στο $(0,0)$;

Λύση. Για κάθε $y \neq 0$ είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{y^2 \sin(x/y)}{x} \\ &= y \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x/y)}{x/y} \\ &= y \lim_{x\to 0} \cos(x/y) && (\text{κανόνας L'Hôpital}) \\ &= y \, . \end{aligned}$$

<u>2ος τρόπος</u>. Για κάθε $y \neq 0$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \left.\frac{d}{dx} f(x,y)\right|_{x=0} = y\cos(x/y)|_{x=0} = y\,.$$

Αν $y = 0$, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0\,.$$

Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y-0} \\ &= \lim_{y\to 0} y\sin(x/y) \\ &= 0\,. \qquad\qquad (|y\sin(x/y)| \leq |y| \xrightarrow[y\to 0]{} 0)\end{aligned}$$

Επίσης εύκολα φαίνεται ότι $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Επομένως,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = 0$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1\,.$$

Η συνάρτηση $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Πράγματι, επειδή οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}^2$, αν η $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ήταν συνεχής στο $(0,0)$, τότε από το κριτήριο του Schwarz θα έπρεπε να είναι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Άτοπο, επειδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\ .$$

■

4. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \ln\left(x^2 + 2y + 1\right) + \int_0^x \cos t^2\, dt\,, \qquad y > -\frac{1}{2}\,.$$

Να βρεθεί το διαφορικό $df(x,y)(h,k)$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η τιμή της $f(0,03, 0,03)$.

Λύση. Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+2y+1} + \cos x^2\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{x^2+2y+1}$$

και κατά συνέπεια

$$df(x,y)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,k = \left(\frac{2x}{x^2+2y+1} + \cos x^2\right)h + \frac{2}{x^2+2y+1}k\,.$$

Επομένως,

$$f(0,03, 0,03) - f(0,0) \approx df(0,0)(0,03, 0,03) = 0,03 + 2\cdot 0,03 = 0,09\,.$$

Άρα,

$$f(0,03, 0,03) \approx f(0,0) + df(0,0)(0,03, 0,03) = 0 + 0,09 = 0,09\,.$$

■

5. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-3y^2x}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\ ,\\ 0 & \text{αν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$. Είναι η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο $(0,0)$;

Λύση. Είναι

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\frac{x^3/x^2}{x}=1 \text{ για κάθε } x\neq 0 \text{ και επομένως } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1.$$

Παρόμοια,

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0 \text{ για κάθε } y\neq 0 \text{ και επομένως } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$, θα πρέπει να είναι

$$\begin{aligned} f(h,k)&=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\\ &=h+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\,. \qquad (\text{με } \lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0)\end{aligned}$$

Τότε, για κάθε $(h,k)\neq(0,0)$

$$\frac{h^3-3k^2h}{h^2+k^2}=h+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\Leftrightarrow\varepsilon(h,k)=\frac{-4hk^2}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}}\,.$$

Όμως, κατά μήκος των ευθειών $k=\lambda h$, $\lambda\neq 0$, έχουμε

$$\varepsilon(h,\lambda h)=\frac{-4\lambda^2}{\left(1+\lambda^2\right)^{3/2}}\,,\qquad h>0$$

και επομένως

$$\lim_{h\to 0^+}\varepsilon(h,\lambda h)=\frac{-4\lambda^2}{\left(1+\lambda^2\right)^{3/2}}\neq 0\,. \qquad (\text{άτοπο})$$

Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$. Όμως η f είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$. Πράγματι, για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$ είναι

$$\begin{aligned}|f(x,y)|&=\frac{\left|x^3-3y^2x\right|}{x^2+y^2}\\ &=|x|\,\frac{\left|x^2-3y^2\right|}{x^2+y^2}\\ &\leq 3\,|x|\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=3\,|x|\end{aligned}$$

και επομένως

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)\ .$$

■

6. Έστω η συνάρτηση $z=f(x+\varphi(y))$, όπου η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,.$$

Λύση. Αν $u = x + \varphi(y)$, τότε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\ , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)\varphi'(y)$$

και

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)\frac{\partial u}{\partial x} = f''(u)\ , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f'(u)) = f''(u)\frac{\partial u}{\partial y} = f''(u)\varphi'(y)\ .$$

Επομένως,

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f'(u)f''(u)\varphi'(y) = \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ .$$

■

7. Έστω η συνάρτηση $u = u(x,y)$ είναι κλάσης C^2. Αν $s = x_0 + ax + by$ και $t = y_0 - bx + ay$, όπου $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$ και $a^2 + b^2 = 1$, η συνάρτηση u μετασχηματίζεται στη συνάρτηση $U = U(s,t)$. Να αποδειχθεί ότι

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = U_{ss}U_{tt} - U_{st}^2\ .$$

Λύση. Είναι

$$u(x,y) = U(s,t) = U(s(x,y), t(x,y))\ .$$

Τότε,

$$u_x = U_s s_x + U_t t_x = aU_s - bU_t \quad \text{και} \quad u_y = U_s s_y + U_t t_y = bU_s + aU_t\ .$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(aU_s - bU_t) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}(aU_s - bU_t)\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}(aU_s - bU_t)\frac{\partial t}{\partial x} \\
&= (aU_{ss} - bU_{ts})a + (aU_{st} - bU_{tt})(-b) \\
&= a^2U_{ss} - 2abU_{st} + b^2U_{tt}\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(bU_s + aU_t) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}(bU_s + aU_t)\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}(bU_s + aU_t)\frac{\partial t}{\partial y} \\
&= (bU_{ss} + aU_{ts})b + (bU_{st} + aU_{tt})a \\
&= b^2U_{ss} + 2abU_{st} + a^2U_{tt}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
u_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(aU_s - bU_t) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}(aU_s - bU_t)\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}(aU_s - bU_t)\frac{\partial t}{\partial y} \\
&= (aU_{ss} - bU_{ts})b + (aU_{st} - bU_{tt})a \\
&= abU_{ss} + \left(a^2 - b^2\right)U_{st} - abU_{tt}\ .
\end{aligned}$$

Επειδή $a^2 + b^2 = 1$, μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = U_{ss}U_{tt} - U_{st}^2\ .$$

■

8. Έστω η συνάρτηση $f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου G ανοικτό σύνολο. Λέμε ότι η f είναι **θετικά ομογενής βαθμού** $p \in \mathbb{R}$ στο G, αν

$$f(t\mathbf{x}) = t^p f(\mathbf{x}) \text{ για κάθε } t > 0 \text{ και για κάθε } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G \text{ για το οποίο } t\mathbf{x} \in G.$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο G, να αποδειχθεί ότι

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = pf(\mathbf{x}) \,. \qquad \text{(θεώρημα του Euler)}$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Για $\mathbf{x}$ σταθερό θεωρείστε τη συνάρτηση $g(t) := f(t\mathbf{x})$ και υπολογίστε την παράγωγο $g'(1)$.

<u>*Εφαρμογή*</u>. Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^6 + x^2y^4 + 3x^4y^2 + y^6}{x^4 + x^2y^2 + y^4}}\,, \qquad xy \neq 0\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$f_{xy}^2 = f_{xx} \cdot f_{yy}\,, \qquad xy \neq 0\,.$$

Λύση. Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο G, η $g(t) := f(t\mathbf{x})$ είναι παραγωγίσιμη και χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$g'(t) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(t\mathbf{x}) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(t\mathbf{x}) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(t\mathbf{x}) = \nabla f(t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}\,.$$

Όμως,

$$g(t) = f(t\mathbf{x}) = t^p f(\mathbf{x}) \qquad \text{(η } f \text{ είναι θετικά ομογενής βαθμού } p\text{)}$$

και κατά συνέπεια $g'(t) = pt^{p-1} f(\mathbf{x})$. Επομένως, παίρνοντας $t = 1$ έχουμε

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = pf(\mathbf{x})\,.$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Επειδή για κάθε $t > 0$ είναι $f(tx, ty) = tf(x, y)$, η f είναι θετικά ομογενής βαθμού 1. Επομένως, από το θεώρημα του Euler έχουμε

$$xf_x + yf_y = f\,. \tag{1}$$

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς x παίρνουμε

$$xf_{xx} + f_x + yf_{yx} = f_x \Leftrightarrow yf_{yx} = -xf_{xx}\,. \tag{2}$$

Αν παραγωγίσουμε την (1) ως προς y παίρνουμε

$$xf_{xy} + f_y + yf_{yy} = f_y \Leftrightarrow xf_{xy} = -yf_{yy}\,. \tag{3}$$

Επειδή για $xy \neq 0$ η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (2) και (3) έχουμε

$$f_{yx} \cdot f_{xy} = f_{xx} \cdot f_{yy} \Rightarrow f_{xy}^2 = f_{xx} \cdot f_{yy}\,.$$

■

9. Έστω $\mathbf{r} = (x, y, z)$ και έστω $r = \|\mathbf{r}\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

   (α′) Αν $u = \cos r$, να υπολογιστεί η παράγωγος της u κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{r}$.

   (β′) Να βρεθούν όλες οι διαφορίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $\operatorname{div}(f(r)\,\mathbf{r}) = 0$.

   Λύση.

(α′) Είναι

$$\begin{aligned}\nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\\ &= \left(\frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\right)\\ &= -\sin r \cdot \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = (-\sin r)\,\frac{\mathbf{r}}{r}\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = \nabla u \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = (-\sin r)\,\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -\sin r\,.$$

(β′) Είναι

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f(r)\,\mathbf{r}) &= \operatorname{div}(f(r)\,x, f(r)\,y, f(r)\,z)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f(r)\,x) + \frac{\partial}{\partial y}(f(r)\,y) + \frac{\partial}{\partial z}(f(r)\,z)\\ &= f(r) + f'(r)\,\frac{x^2}{r} + f(r) + f'(r)\,\frac{y^2}{r} + f(r) + f'(r)\,\frac{z^2}{r}\\ &= 3f(r) + rf'(r)\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\operatorname{div}(f(r)\,\mathbf{r}) = 0 \Leftrightarrow 3f(r) + rf'(r) = 0 \Leftrightarrow 3r^2 f(r) + r^3 f'(r) = 0 \Leftrightarrow \left(r^3 f(r)\right)' = 0\,.$$

Άρα,

$$f(r) = \frac{c}{r^3}\,, \qquad \text{όπου } c \text{ σταθερά}$$

■

10. Υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία σε κάθε σημείο (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ δίνεται από τον τύπο

$$T(x, y, z) = x^2 y + yz - e^{xy}\,.$$

Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας στο σημείο $P(1, 1, 1)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v} = \overrightarrow{PO}$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. Ποιά είναι η κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού αύξησης της θερμοκρασίας στο σημείο $P(1, 1, 1)$;

Λύση. Για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ έχουμε

$$\nabla T(x, y, z) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \left(2xy - ye^{xy}, x^2 + z - xe^{xy}, y\right)\,.$$

Επειδή $\mathbf{v} = \overrightarrow{PO} = (-1, -1, -1)$, το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του $\overrightarrow{PO}$ είναι

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)\,.$$

Επομένως,

$$\frac{\partial T(1, 1, 1)}{\partial \mathbf{u}} = \nabla T(1, 1, 1) \cdot \mathbf{u} = (2 - e, 2 - e, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1) = \frac{2e - 5}{\sqrt{3}}\,.$$

Η κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού αύξησης της θερμοκρασίας στο σημείο $P(1, 1, 1)$ είναι

$$\nabla T(1, 1, 1) = (2 - e, 2 - e, 1)\,.$$

■

Παράδοση των ασκήσεων έως 16/6/2011