ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ "ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΚΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ"

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

1. ΣΕΙΡΕΣ FOURIER ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- Η τριγωνομετρική σειρά $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ καλείται σειρά Fourier της f, αν τα a_n, β_n δίνονται από τους τύπους Euler-Fourier (E-F):

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad \beta_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n=1,2,\dots$$

$n=0,1,2,\dots$

όπου f ολοκληρώσιμη στο $[-L, L]$. Οι τύποι (E-F) παραμένουν ίδιοι αν αντί $\int_{-L}^{L}$ έχουμε $\int_0^{2L}$, με τη προϋπόθεση ότι η f είναι περιοδική, δηλ. $f(x+T) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $T = 2L > 0$ (θεμελιώδης) περίοδος. Σ' αυτή τη περίπτωση γράφουμε:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Αν f άρτια $\Rightarrow a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \dots$, $\beta_n = 0$, ενώ αν f περιττή (~ σημαίνει "αντιστοιχεί") $\Rightarrow a_n = 0$ και $\beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L \dots$.

2. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

- **Ορισμός 1:** Μία συνάρτηση f καλείται κατά τμήματα συνεχής στο $[a, \beta]$ αν

(i) η f ορίζεται και είναι συνεχής παντού στο $[a, \beta]$ εκτός ενδεχομένως από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων του $[a, \beta]$ που μπορεί να μην ορίζεται είτε να μην είναι συνεχής.

(ii) Τα πλευρικά όρια της f: $f(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$, $f(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$, $\forall x_0 \in [a, \beta]$, (βέβαια αν $x_0 = a, \beta$ τότε μιλάμε για το $f(a+)$ και το $f(\beta-)$).

Ορισμός 2: Μία συνάρτηση f καλείται κατά τμήματα λεία στο $[a, \beta]$ αν η f και η f' είναι κατά τμήματα συνεχείς.

Παρατηρήσεις: (i) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $\mathbb{R} - \{0\}$ είναι συνεχής αλλά όχι κατά τμήματα συνεχής, $\forall [a, \beta]$ που περιέχει το $\{0\}$.

(ii) Η $f(x) = [x]$ στο $\mathbb{R}$ ($[\ ]$ ≡ ακέραιο μέρος του x) δεν είναι συνεχής αλλά είναι κατά τμήματα συνεχής, $\forall [a, \beta]$.

(iii) Η $f(x) = |x|^{1/2}$ είναι κατά τμήματα συνεχής αλλά δεν είναι κατά τμήματα λεία (η $f'(x)$ δεν είναι κατά τμήματα συνεχής, $\forall [a, \beta]$ που περιέχει το $\{0\}$).

(iv) Αν η f' κατά τμήματα συνεχής σημαίνει ότι υπάρχουν $f'(x_0+) := \lim_{x\to x_0+} f'(x)$, $f'(x_0-) := \lim_{x\to x_0-} f'(x)$, $\forall x_0 \in (a, \beta)$ και $\exists\ f'(a+)$, $f'(\beta-)$.

(v) Αποδεικνύεται (πώς;) ότι (αν $\exists\ f(x_0+), f(x_0-)$ τότε)

$$f'(x_0+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0+)}{h}, \quad f'(x_0-) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-)}{h}.$$

Παρατηρείστε ότι αν $\exists\ f'(x_0+)$ μπορεί να μην υπάρχει η $f(x_0)$ ενώ υπάρχει το $f(x_0+)$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Δ. ΤΖΑΝΕΤΗΣ

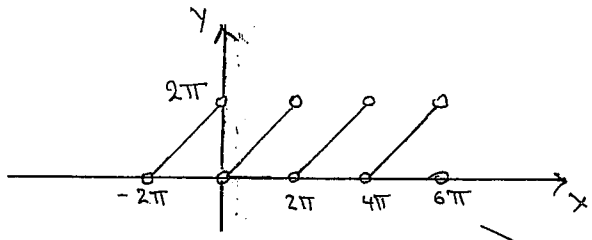
(vi) Οι πλευρικές παράγωγοι της f στο x_0 ορίζονται:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(εδώ η f ορίζεται στο x_0).

(vii)

Παρ. 1.

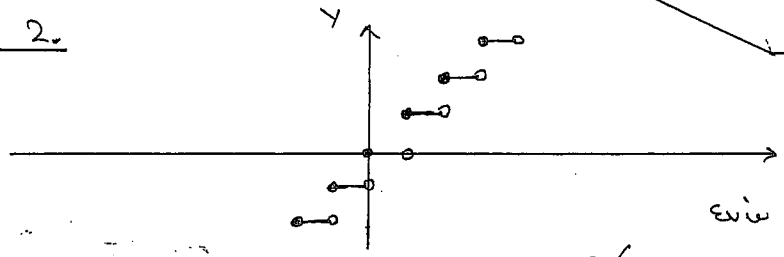


$f'(0+) = +1$

$f'(0-) = +1$,

ενώ $f'_+(0)$ και $f'_-(0)$ δεν ορίζονται.

Παρ. 2.



$f'(x_0+) = f'(x_0-) = 0$

$\forall x_0 \in \mathbb{Z}$,

ενώ $f'_+(x_0) = 0$ και

$f'_-(x_0) = +\infty$, $\forall x_0 \in \mathbb{Z}$.

1ο ΘΕΩΡΗΜΑ (Σημειακής Σύγκλισης):

Αν $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ($T=2L$ περίοδος) και f κατά τμήματα λεία στο $[-L, L]$ τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει σημειακά στην $\varphi(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (αν x σημείο συνέχειας της f τότε $\varphi(x) = f(x)$).

2ο ΘΕΩΡΗΜΑ: (Ομοιόμορφης Σύγκλισης):

Η σειρά Fourier μιας συνεχούς και κατά τμήματα λείας συνάρτησης f με περίοδο $T=2L$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ σε κάθε πεπερασμένο διάστημα του $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση: (i) f συνεχής και περιοδική $\Rightarrow f(-L) = f(L)$ (αυτό ισχύει για άρτια f). (ii) αν επιπλέον η f είναι περιττή τότε $f(-L) = f(L) = f(0) = 0$ (γιατί;).

3. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Έστω V ένας χώρος συναρτήσεων στο $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, (ο V είναι διανυσματικός χώρος, $f, g \in V \Rightarrow f+g \in V$ και $\lambda f \in V$ με $\lambda \in \mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K}$ το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$), αν $f, g \in V([\alpha, \beta])$ τότε ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο:

(ε_1): $\quad (f, g) := \int_\alpha^\beta f(x)\, g(x)\, dx$ στο $\mathbb{R}$, $((\,,\,): V \times V \to \mathbb{R})$

ή

(ε_2): $\quad (f, g) := \int_\alpha^\beta f(x)\, \bar{g}(x)\, dx$ στο $\mathbb{C}$, $((\,,\,): V \times V \to \mathbb{C})$

Τα (ε_1), (ε_2) είναι ειδική περίπτωση του εσωτερικού

γινομένου

$$(f,g)_r := \int_a^\beta f(x)\,\overline{g}(x)\,r(x)\,dx, \quad \text{όπου } r=r(x)>0,$$

συνεχής και παίζει συνάρτηση βάρους. Έτσι γράφουμε για $r=1$: $(f,g)_{r=1} = (f,g)$, βέβαια αν $g\in\mathbb{R}$ τότε $\overline{g}=g$. Ισχύει $(f,g)_r = \overline{(g,f)_r}$.

- Ορίζουμε ως <u>νόρμα (norm)</u>:

Για $r=1$: $\|f\| = \|f\|_2 = \left(\int_a^\beta f^2(x)\,dx\right)^{1/2} = (f,f)^{1/2}$

Για $r\neq 1$: $\|f\|_r = \|f\|_{2,r} = \left(\int_a^\beta f^2(x)\,r(x)\,dx\right)^{1/2} = (f,f)_r^{1/2}$

για το $\mathbb{R}$, ενώ $\|f\|_r = \left(\int_a^\beta f(x)\,\overline{f}(x)\,r(x)\,dx\right)^{1/2}$ για το $\mathbb{C}$.

- Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, μία ακολουθία συναρτήσεων, παίζεται <u>ορθογώνια</u> αν $(f_n,f_m) = \|f_n\|^2\,\delta_{nm}$ και <u>ορθοκανονική</u> αν $(f_n,f_m) = \delta_{nm} = \begin{cases}1 & \text{για } n=m\\ 0 & \text{για } n\neq m\end{cases}$.

<u>Ορισμός 3</u>: Ένα ορθογώνιο (ορθοκανονικό) σύστημα $A=\{\varphi_n(x)\in V : n=1,2,\dots\}$ παίζεται <u>πλήρες</u> σ' ένα χώρο συναρτήσεων V [αν δεν υπάρχει συνάρτηση $\varphi\in V$ με $\|\varphi\|>0$ που να είναι ορθογώνια (ορθοκανονική) σε κάθε $\varphi_n\in A$].
ή ισοδύναμα ... [αν $\forall f\in V$, το f μπορεί να γραφτεί $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, $a_n\in\mathbb{R}$].

<u>Σημείωση</u>: Ο V είναι διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με κάποιο εσωτερικό γινόμενο, άρα είναι χώρος εσωτερικού γινομένου.

- Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ παίζεται γενικευμένη σειρά Fourier της f αν τα a_n δίνονται από το γενικευμένο τύπο (E-F):

$$a_n = \frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Επίσης έχουμε την αντιστοιχία $(\sim)$ $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$.

Αν $r\neq 1$ τότε $a_n = \dfrac{(f,\varphi_n)_r}{\|\varphi_n\|_r^2}$.

- <u>3ο ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (Σύγκλιση κατά μέσον ή κατά νόρμα)

Αν $\|f\|_{2,r}<\infty$ και $A=\{\varphi_n(x)\in V : n=1,2,\dots\}$ ένα πλήρες και ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων τότε η γενικευμένη σειρά Fourier της f συγκλίνει κατά νόρμα στην f και γράφουμε: $\{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ κατά νόρμα$\}$

$$\Longleftrightarrow \|f(x)-S_n(x)\| = \left(\int_a^\beta |f(x)-S_n(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \longrightarrow 0 \text{ όταν } n\to\infty.$$

(ανάλογα ισχύει και για τη νόρμα $\|(\cdot)\|_r$).

Παρατηρήσεις: (i) Όλα τα θεωρήματα σύγκλισης (1°, 2°, 3°) ισχύουν για τις γενικευμένες αλλά και για τις απλές σειρές Fourier.

(ii) Το σύνολο $\{\varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, x \in [0, 2\pi]\}$ είναι ορθοκανονικό. Η σειρά Fourier της f:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \text{ όπου } a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx =$$

$$= (f, \varphi_n) \text{ και } \bar{\varphi}_n(x) = e^{-inx}/\sqrt{2\pi}.$$

(iii) ◎ Συμβολισμοί: Η $S_n(x)$ συγκλίνει στην $f(x)$:
κατά νόρμα (τέσον) $S_n \xrightarrow{\|\ \|} f$, σημειακά $S_n \longrightarrow f$,
ομοιόμορφα $S_n \Longrightarrow f$ (ή $S_n \xrightarrow{OM} f$).

◎ Η σύγκλιση κατά τέσον $\not\Longrightarrow$ τη σημειακή σύγκλιση και αντιστρόφως.

◎ Η ομοιόμορφη σύγκλιση $\Longrightarrow$ τη σύγκλιση κατά τέσον.

◎ Η ομοιόμορφη σύγκλιση $\Longrightarrow$ τη σημειακή σύγκλιση

(iv) Το $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} : m, n = 1, 2, \dots, x \in [0, 2\pi] \right\}$ είναι ορθοκανονικό, απ' όπου προκύπτουν οι απλές (κλασσικές) σειρές Fourier.

(v) Όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα ισχύουν για το εσωτερικό γινόμενο $(f, g)_r$, για $r = 1$ και για $r \neq 1$.

3. ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Ότι ισχύουν για τις (μονές) σειρές Fourier σχεδόν τα ίδια ισχύουν και για τις πολλαπλές σειρές Fourier.

◎ Μία ειδική περίπτωση διπλής σειράς που συναντάμε και στις εφαρμογές είναι:

$$f(x,y) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \underbrace{\varphi_m(x) \sigma_n(y)}_{h_{mn}(x,y)}, \quad x \in [-L, L], y \in [-K, K] \text{ όπου}$$

$$a_{mn} = \frac{(f, h_{mn})}{\|h_{mn}\|^2} = \frac{1}{\|\varphi_m\|^2 \|\sigma_n\|^2} \int_{-L}^{L} \int_{-K}^{K} f(x,y) \varphi_m(x) \sigma_n(y) dx dy$$

◎ Αν $\varphi_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{L}$, $\sigma_n(y) = \sin \frac{n\pi x}{L}$, δηλαδή (ημιτονική) διπλή σειρά Fourier, έχουμε:

$$f(x,y) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{K} \text{ και}$$

$$a_{mn} = \frac{4}{LK} \int_0^L \int_0^K f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{K} dx dy.$$

Η απόδειξη για την εύρεση του a_{mn} γίνεται όπως και στις μονές σειρές Fourier, δηλ. ορθογωνιότητα.
Ανάλογα έχουμε τριπλές, ... κ.λ.π. σειρές Fourier.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1). Να αναπτύξετε σε σειρά Fourier τη συνάρτηση f, με $f(x)=x$, $-4<x<4$, στο διάστημα $-4<x\leq 4$.

ΛΥΣΗ

$L=4$, $a_n=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4} x\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx=0$, ($x\cos\frac{n\pi x}{4}$ περιττή συνάρτηση) $n=0,1,2,\dots$

$$\beta_n=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}\underbrace{x\sin\frac{n\pi x}{4}}_{\text{άρτια}}\,dx=\frac{2}{4}\int_0^4 x\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx\ \xrightarrow[\text{κατά παρ/τες}]{\text{ολοκλ.}}\ \frac{8}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$f(x)=x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\frac{n\pi x}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{4},\quad -4<x<4.$$ (Ημιτονική σειρά Fourier)

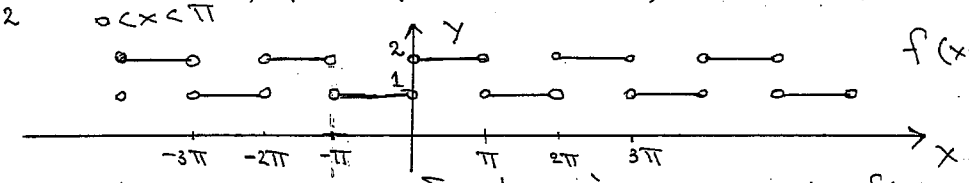
Η σειρά συγκλίνει σημειακά αλλά και ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x)$ στο $(-4,4)$, (γιατί η f είναι συνεχής και δίνει σ' αυτό) άρα

$$x=8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4},\quad \forall x\in(-4,4).$$

---

(2). Να αναπτύξετε σε σειρά Fourier τη περιοδική συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0\\ 2, & 0<x<\pi\end{cases}$, με περίοδο $T=2\pi$, στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ



$f(x+T)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Στο σχήμα φαίνεται η περιοδική επέκταση της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2\cos nx\,dx=0,\quad n=1,2,\dots$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}dx=1+2=3$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1-(-1)^n}{n\pi},\quad n=1,2,\dots$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin nx=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Η σειρά συγκλίνει σημειακά στη $\varphi(x)$ (η $f(x)$ είναι κατά τμήματα λεία)

$$\varphi(x)=\frac{f(x-)+f(x+)}{2}=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1},\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

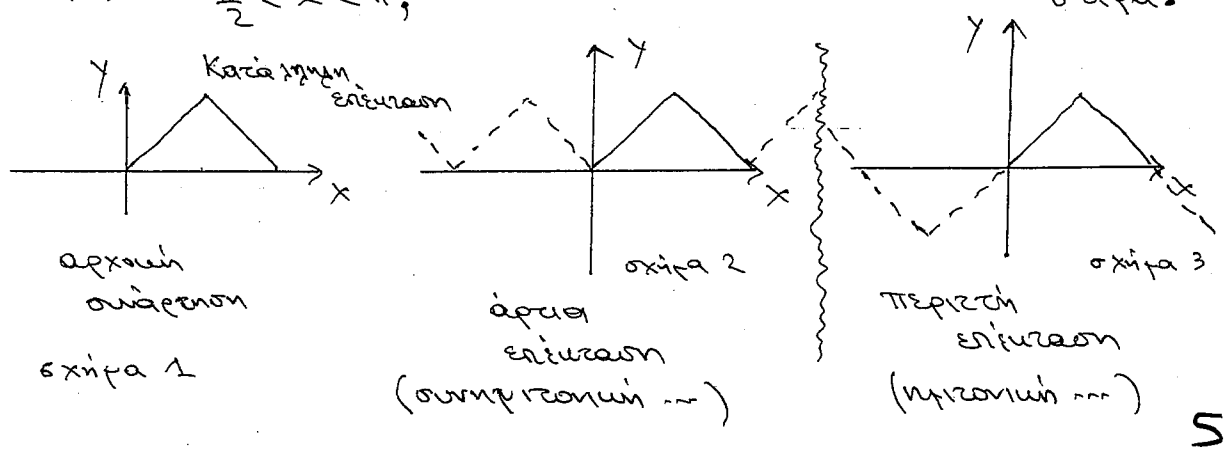
($\varphi(x)=f(x)$ σα σημεία συνέχειας και $\varphi(x)=\frac{3}{2}$ σα σημεία ασυνέχειας)

---

(3). Να αναπτύξετε σε σειρά Fourier σ' όλο το $\mathbb{R}$ τη συνάρτηση:

$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\frac{\pi}{2},\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}<x<\pi,\end{cases}$ (α) ως ημιτονική σειρά, (β) ως συνημιτονική σειρά.

ΛΥΣΗ



(α) $\beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$, $n=1,2,3,\dots$, $a_n=0$, $n=0,1,2,\dots$

Επειδή η $f(x)$ (σχήμα 3) είναι συνεχής και κατά τμήματα λεία στο $\mathbb{R}$ η σειρά Fourier της f συγκλίνει σημειακά και ομοιόμορφα στην $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \dots\right),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

(β) $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{n^2\pi}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right),\quad n=1,2,\dots$$

$\beta_n = 0$, $n=1,2,3,\dots$ $\quad \left\{ a_1=0,\ a_2 = -\frac{8}{2^2\pi},\ a_3=a_4=a_5=0,\ a_6 = -\frac{8}{6^2\pi},\ a_7=a_8=a_9=0,\ a_{10} = -\frac{8}{10^2\pi} \right\}$

Όπως στο (α) έχουμε:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)\cos nx,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

↳ σημειακά και ομοιόμορφα $\qquad$ (σχήμα 2).

---

(4). Δίνεται το πλήρες σύστημα συναρτήσεων $A=\{\varphi_n(x) = e^{-x/2}\sin n\pi x,\ x\in(0,1):\ n=1,2,\dots\}$, όπου το A είναι ορθογώνιο σύστημα με συνάρτηση βάρους $r=r(x)=e^x$. Να αναπτύξετε σε γενικευμένη σειρά Fourier την $f(x)=1$, $x\in(0,1)$ ως προς το σύστημα συναρτήσεων A.

ΛΥΣΗ

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x),\quad \left\{ (f,\varphi_m)_r \overset{\text{ΟΜ}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varphi_n,\varphi_m)_r \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\|\varphi_n\|_r\|\varphi_m\|_r \cdot \left(\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|_r},\frac{\varphi_m}{\|\varphi_m\|_r}\right)_r = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\|\varphi_n\|_r\|\varphi_m\|_r\delta_{nm} = a_m\|\varphi_m\|_r^2 \right\}$$ συνεπώς

↳ ορθοκανονικά

(*) $a_n = \frac{(f,\varphi_n)_r}{\|\varphi_n\|_r^2}$, $\|\varphi_n\|_r^2 = \int_0^1 \varphi_n^2(x)\,r(x)\,dx = \int_0^1 \left(e^{x/2}\sin n\pi x\right)^2 e^x\,dx = \frac{1}{2}$

$$(f,\varphi_n)_r = \int_0^1 f(x)\,\varphi_n(x)\,r(x)\,dx = \int_0^1 e^x e^{x/2}\sin n\pi x\,dx = \frac{2n\pi}{n^2\pi^2+\frac{1}{4}}\left[(-1)^{n-1}e^{1/2}+1\right]$$ $n=1,2,\dots$

Έτσι έχουμε

$$f(x) = 1 = e^{-x/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi}{n^2\pi^2+\frac{1}{4}}\left[(-1)^{n-1}e^{1/2}+1\right]\sin n\pi x,\quad x\in(0,1),$$ η σύγκλιση είναι σημειακή & ομοιόμορφη.

{Σημείωση: Τα $\varphi_n(x)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος ιδιοτιμών $y''+y'+\lambda y=0$, $0<x<1$, $y(0)=y(1)=0$}.

---

(5). Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(x,y)=xy$ σε διπλή σειρά Fourier ως προς το πλήρες και ορθογώνιο σύστημα $\{\varphi_{mn}(x,y) = \sin\frac{m\pi x}{\pi}\cdot\sin\frac{n\pi y}{\pi},\ m,n=1,2,3,\dots,\ x\in(0,\pi),\ y\in(0,\pi)\}$ συναρτήσεων, $(r=r(x)=1)$.

ΛΥΣΗ

$$f(x,y) \sim \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\varphi_{mn}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sin my\,\sin nx$$

$$a_{mn} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} xy\sin my\sin nx\,dx\,dy = \frac{(-1)^{m+n}}{mn}.$$

Άρα

$$xy = 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{mn}\sin my\,\sin nx,\quad x,y\in(0,\pi),$$ η σύγκλιση είναι σημειακή & ομοιόμορφη.

(6) Δίνεται η $f \in C_p([-\pi,\pi])$ και η σειρά Fourier (με συντελεστές $a_0, a_n, \beta_n \dots$) που αντιστοιχεί ($\sim$) στην f.
Να δείξετε ότι:

(α) $$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \beta_n^2 \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2$$
(ανισότητα Bessel)

(β) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ (θεώρημα Riemann)

(γ) $|a_n| \le \frac{c}{n}$ και $|\beta_n| < \frac{c}{n}$, c σταθερά ανεξάρτητη του n και $f \in C^1([-\pi,\pi])$

Απόδειξη: (α) Έχουμε ότι $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \beta_n \sin nx$

Θεωρούμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο n-τάξης:

$$t(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx, \quad \left(S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right)$$

Τότε
$$\|f-t\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x)-t(x))^2\,dx = \|f\|_2^2 - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,t(x)\,dx$$
$$+ \int_{-\pi}^{\pi} t^2(x)\,dx \overset{\text{ορθογωνιότητα}}{\underset{\text{στην } t(x)}{=\!=\!=}} \|f\|_2^2 - 2\pi\left[\frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k A_k + \beta_k B_k\right]$$
$$+ \pi\left[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2\right] = \|f\|_2^2 + \frac{\pi}{2}(a_0 - A_0)^2 +$$
$$+ \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k - A_k)^2 + (\beta_k - B_k)^2 - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \beta_k^2 \Longrightarrow$$
$$0 \le \min \|f-t\|_2^2 \overset{a_k = A_k}{\underset{\beta_k = B_k}{=\!=\!=}} \|f\|_2^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \beta_k^2\right) = \|f - S_n\|_2^2 \quad (*)$$
$$\Longrightarrow \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \beta_k^2 \le \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 < \infty \Longrightarrow$$
(παίρνοντας το $n \to \infty$) το (α).

(β) Από τη σύγκλιση της σειράς $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \beta_n^2$

$\Longrightarrow a_n^2 + \beta_n^2 \to 0$ όταν $n \to \infty \Longrightarrow$ το (β).

(γ) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(\sin nx)'\,dx$$
$$\overset{\text{κ.π.ο.}}{=\!=\!=} -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx \Longrightarrow$$

$$|a_n| \le \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|\,dx \le \frac{2\pi M}{n\pi} = \frac{2M}{n},$$

$c = 2M$, $|f'| < M$, όμοια για το β_n.

Σχόλιο: Το (γ) αποδεικνύεται και όταν $f \in C'_p([-\pi,\pi])$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}, \quad -\pi = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = \pi$$

και με $f \in C'((x_i, x_{i+1}))$.

---

(7) Αν $\{\varphi_n(x)\}$ ένα ορθοκανονικό σύστημα και $f \in C_p((\alpha,\beta))$, με αντίστοιχη γενικευμένη σειρά Fourier την $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, τότε ισχύει:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \le \|f\|_2^2$ (ανισ. Bessel)

(β) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ συγκλίνει και (γ) $c_n \to 0$ $n \to \infty$.

Απόδειξη: Όπως στην άσκηση (6)

---

(8) Με τις προϋποθέσεις της άσκησης (7) ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \|f\|_2^2 \iff \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, S_n(x) = f$$

σύγκλιση κατά τέσσερα ή κατά νόρμα ή $\|\cdot\|$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ PARSEVAL $\Updownarrow$ το $\{\varphi_n(x)\}$ της (7) είναι ΠΛΗΡΕΣ.

Απόδειξη: Από τη σχέση

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

(αυτή η σχέση αποδεικνύεται στην (7) και είναι ανάλογη της (*) της ασκ. (6))

όπου $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$.

$$\lim_{n\to\infty}\|f - S_n\| = 0 \iff \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, S_n(x) = f \iff \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \overset{\text{ΠΠ}}{=} \|f\|_2^2$$

l.i.m. ≡ limit in the mean ή γράφουμε LIM.

---

(9) Αν $f, g \in C_p((\alpha,\beta))$ τότε ισχύει $|(f,g)| \le \|f\|_2\|g\|_2$ ανισ. Schwarz.

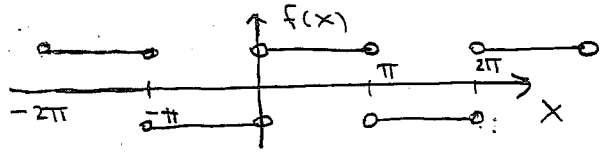
Απόδειξη. Αν $g \equiv 0$ ισχύει. Αν $g \not\equiv 0$ τότε

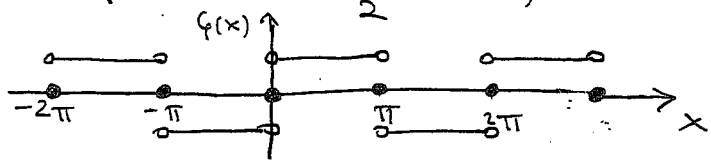
$$0 \le (f+ag, f+ag) = \|f\|_2^2 + 2a(f,g) + a^2\|g\|_2^2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Παίρνοντας $a = -\frac{(f,g)}{\|g\|^2}$ αποδεικνύεται η ανισότητα.

(10) Ποία είναι η οριακή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ της σειράς Fourier για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ +1 & 0<x<\pi\end{cases}$ με $f(x+T)=f(x)$, $T=2\pi$.

ΛΥΣΗ: Η οριακή συνάρτηση είναι η $\varphi(x)=\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.





Η σύγκλιση είναι σημειακή, ισχύει το θεώρημα σημειακής σύγκλισης Dirichlet.

---

(11) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x)=|x|$, $-1<x<1$, σ' όλο το $\mathbb{R}$ αν $f(x+T)=f(x)$ και $T=2=2\cdot 1$.

Λύση: $f(-x)=f(x)\Rightarrow f$ άρτια συνάρτηση, άρα

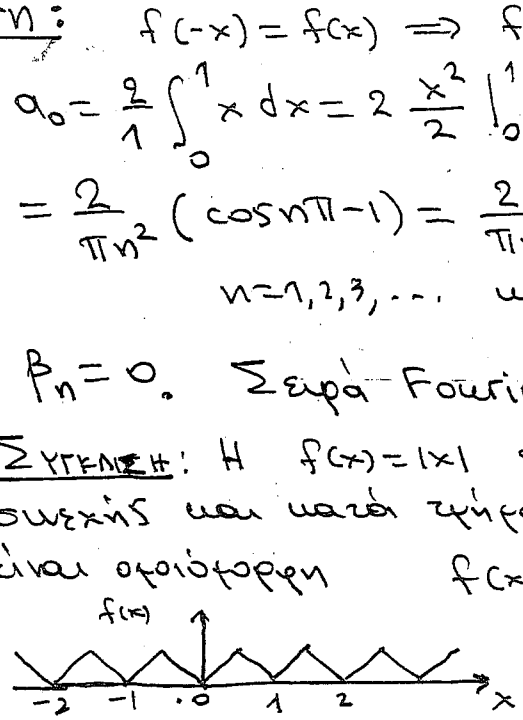
$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 x\,dx=2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=1,\quad a_n=\frac{2}{1}\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{1}\,dx \overset{\text{Παραγοντική}}{\underset{\text{ολοκλήρωση}}{=}}$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=\frac{2}{\pi(2k-1)^2}(-2)$$

$n=1,2,3,\dots$ και $k=1,2,3,\dots$

$\beta_n=0$. Σειρά Fourier $f(x)\sim\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2\pi}$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ: Η $f(x)=|x|$ είναι συνεχής και κατά τμήματα λεία συνεπώς η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη $f(x)\overset{\text{ΟΜ}}{=\!=}\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)\pi x$.



---

(12) Το σύνολο $A=\{\varphi_n(x):\ \varphi_n(x)=\cos(2n-1)x,\ n=1,2,\dots,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]\}$ είναι ορθογώνιο με εσωτερικό γινόμενο $(\varphi_n,\varphi_m)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx$;

ΛΥΣΗ: $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\cos 2(n-m)x-\cos 2(n+m)x\right]dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2(n-m)x}{2(n-m)}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2(n+m+1)x}{2(n+m+1)}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}=0$$

για $n\neq m$ ενώ $(\varphi_n,\varphi_n)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\varphi_n^2(x)\,dx=\frac{\pi}{4}\neq 0$, άρα το A είναι ορθογώνιο σύνολο.

Σημείωση: Αν $f(x)\sim\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ τότε $(f(x),\varphi_m(x))\sim\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\varphi_n,\varphi_m)$

$$=\sum a_n\delta_{nm}\|\varphi_n\|\|\varphi_m\|=a_m\|\varphi_m\|^2\Rightarrow a_m=\frac{(f(x),\varphi_m(x))}{\|\varphi_m\|^2}$$

(13) Δίνεται η εξίσωση Legendre $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$, $-1<x<1$, με λύσεις τα πολυώνυμα Legendre $\{P_n(x)\}$, $n=0,1,2,\dots$ και τα οποία είναι ορθογώνια με συνάρτηση βάρους $r=r(x)=1$, αποτελούν δε ένα πλήρες σύστημα συναρτήσεων του $C_p((-1,1))$. Να αναπτυχθεί σε γενικευμένη σειρά Fourier (σειρά Fourier-Legendre) η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0\\ 1, & 0\le x<1.\end{cases}$ Επίσης δίνεται ότι $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$, $P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$, $P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$.

<u>Λύση:</u> Ισχύει $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)r(x)\,dx=\delta_{nm}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\delta_{nm}\|P_n\|^2$

λόγω της ορθογωνιότητας. $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)$ λόγω της πληρότητας. Τύπος Euler-Fourier:

$$(f(x),P_m(x))=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(P_n(x),P_m(x))=c_m\|P_m(x)\|^2$$

$$\Rightarrow c_m=\frac{(f(x),P_m(x))}{\|P_m(x)\|^2},\quad m=0,1,2,\dots$$ Συνεπώς για $m=0,1,2,3,4,5$

έχουμε $c_0=\frac{1}{2}$, $c_1=\frac{3}{4}$, $c_2=0$, $c_3=-\frac{7}{16}$, $c_4=0$, $c_5=\frac{11}{32}$

και $$f(x)\sim\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{3}{4}P_1(x)-\frac{7}{16}P_3(x)+\frac{11}{32}P_5(x)+\dots=\varphi(x)$$

Η ΣΥΓΚΛΙΣΗ είναι σημειακή και η σειρά συγκλίνει στην $\varphi(x)=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, $\forall x\in(-1,1)$.

---

(14) Δίνεται η σειρά Fourier για την $f(x)=\frac{x}{2}$, $-\pi<x<\pi$: $\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. Να βρείτε τη σειρά Fourier που προκύπτει με ολοκλήρωση όρο προς όρο.

<u>Λύση:</u> Η $f(x)=\frac{x}{2}$ είναι κατά τμήματα συνεχής στο $-\pi<x<\pi$, μπορούμε να την ολοκληρώσουμε όρο προς όρο και να πάρουμε μια συγκλίνουσα σειρά (όχι κατά ανάγκη Fourier). Με ολοκλήρωση προκύπτει:

$$\frac{x^4}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}+C\quad-(1).$$ Η (1) είναι σειρά Fourier, μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης από τους τύπους Euler-Fourier.

$$2C=a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{4}\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{12}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow C=\frac{\pi^2}{12},\ \text{άρα}\quad \frac{x^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ STURM-LIOUVILLE

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ (Π.Σ.Τ.):

Θεωρούμε το (Π.Σ.Τ.) ή πρόβλημα δύο σημείων:

$$(1)\begin{cases} T(y) := y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), & a_1 = \alpha < x < \beta = a_2, \\ B_i(y) = a_{i1}y(a_i) + a_{i2}y'(a_i) = \sigma_i, & i=1,2 \end{cases}$$

όπου $a_{i1}, a_{i2}, \sigma_i \in \mathbb{R}$, το $i=1$ για το $\alpha = a_1$ και $i=2$ για το $\beta = a_2$.

ΠΡΟΤ. 1: Αν $T(y_i)=0$, $i=1,2$ και y_1, y_2 γραμ. ανεξ. συναρ., τότε για το μη ομογενές πρόβλημα (1) υπάρχει λύση και είναι μοναδική αν $\Delta = |B_i(y_j)| \neq 0$, (ή $\Delta = 0$ αν το (1) ή δεν έχει λύση ή έχει άπειρες). ▲

Η $\Delta = |B_i(y_j)|$ είναι ορίζουσα.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1: Να βρεθούν τα ιδιοζεύγη (ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις) για το (Π.Σ.Τ) $\{ y'' + \lambda y = 0,\ 0<x<1,\ y'(0) = y(1) = 0 \}$.

ΛΥΣΗ: ($a^{ος}$ τρόπος) (i) $\lambda = 0$, τότε $y'' = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2 \Rightarrow$ $y'(x) = c_1$, $y'(0) = c_1 = 0$, $y(1) = c_2 = 0$ άρα $y \equiv 0$, $\nexists$ ιδιοζεύγος.

(ii) $\lambda < 0$, $\chi(r) = r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm k$, $k = \sqrt{-\lambda} > 0$

$y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$, $y'(x) = c_1 k e^{kx} - c_2 k e^{-kx}$

$y'(0) = c_1 k - c_2 k = k(c_1 - c_2) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$

$y(1) = c_1(e^k + e^{-k}) = 0 \Rightarrow c_1(e^{2k}+1) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$\nexists$ ιδιοζεύγος.

(iii) $\lambda > 0$, $\chi(r) = r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda} = \pm ik$

$\sqrt{\lambda} = k$ ή $\lambda = k^2$, $y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$,

$y'(x) = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx$, $y'(0) = c_2 k = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$y(1) = c_1 \cos k = 0 \Rightarrow c_1 \neq 0$ και $k = k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ιδιοζεύγος $\equiv$ (ιδιοτιμή, ιδιοσυνάρτηση) $\equiv (\lambda_n, y_n(x)) =$
$= \left(\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]^2, \cos k_n x \right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

($\beta^{ος}$ τρόπος) Με χρήση της ΠΡΟΤ. 1.

Επαναλαμβάνουμε το (i) με $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 1$ και το (ii) με $y_1(x) = e^{kx}$, $y_2(x) = e^{-kx}$. Επίσης για το (iii) έχουμε $y_1(x) = \cos kx$, $y_2(x) = \sin kx$ και επειδή το (Π.Σ.Τ.) έχει λύση την $y \equiv 0$, $\{ \Delta = 0 \Leftrightarrow$ άπειρες λύσεις$\}$, λόγω της ΠΡΟΤ. 1,

$$\Delta = |B_i(y_j)| = \begin{vmatrix} B_1(y_1) & B_1(y_2) \\ B_2(y_1) & B_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1'(0) & y_2'(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & k \\ \cos k & \sin k \end{vmatrix} = -k\cos k = 0$$

$k = k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$. Συνεχίζεται όπως το (iii) του $a^{ου}$ τρόπου. ▲

ΑΣΚΗΣΗ 2: Να βρεθούν τα ιδιοζεύγη για $\lambda \in \mathbb{R}$ του (Π.Σ.Τ.):

$$\{ y'' - 3y' + \lambda y = 0 \,,\ 0<x<\pi \,,\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ (Υποδ. Εργαζόμαστε όπως στην ασκ. 1)

$\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = 1$, και $\lambda_n = n^2 + \frac{9}{4}$, $y_n(x) = e^{3x/2}\left(\sin nx - \frac{2n}{3}\cos nx\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ▲

3. ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΠΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ STURM-LIOUVILLE.

(α) ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ:

Αν $N(y) = a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y$, αναζητούμε ολοκληρώνοντα παράγοντα: $z\,N(y) = \frac{d}{dx} G(y, y')$, κι' αυτό επιτυγχάνεται αν $N^*(y) = (a_2 y)'' - (a_1 y)' + a_0 y = 0$.

Ο N^* καλείται ΣΥΖΥΓΗΣ (adjoint) του N. Αν $N = N^*$ τότε ο N καλείται ΑΥΤΟΣΥΖΥΓΗΣ (selfadjoint).

Ο τελεστής L με $L(y) = (p(x)y')' + q(x)y = py'' + p'y' + qy$ είναι αυτοσυζυγής γιατί $L = L^*$ (άσκηση).

ΠΡΟΤ. 2: $N = N^* \iff a_2' = a_1$. ▲

ΠΟΡΙΣΜΑ 3: Ο L είναι αυτοσυζυγής (γιατί $a_2' = p' = a_1$). ▲

◉ Θεωρούμε τις εξισώσεις ιδιοτιμών:

$$N(y) + \lambda y = 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad \underline{L(y) + \lambda r y = 0} \quad (3)$$

με $p', q, r \in C([a,\beta])$ και $p, r > 0$, r συνάρτηση βάρους.

ΑΣΚΗΣΗ 3: Δίνεται η εξίσωση (2), ζητείται να γραφεί υπό τη μορφή (3).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $(2) \iff y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y + \frac{\lambda}{a_2} y = 0$, με $a_2 \neq 0$

$$(3) \iff y'' + \frac{p'}{p} y + \frac{q}{p} y + \lambda \frac{r}{p} y = 0 \quad \text{με} \quad p > 0$$

από τις ισότητες: $\frac{p'}{p} = \frac{a_1}{a_2}$, $\frac{q}{p} = \frac{a_0}{a_2}$, $\frac{r}{p} = \frac{1}{a_2} \Rightarrow$

$p(x) = e^{\int \frac{a_1}{a_2} dx}$, $q = p\frac{a_0}{a_2}$ και $r = \frac{p}{a_2}$. (Γενικώς ακολουθείται αυτή η διαδικασία). ▲

Η εξίσωση (3) καλείται εξίσωση Sturm-Liouville ενώ το

(Π.Σ.Τ.) (4): $\{ L(y) + \lambda r(x) y = 0 \,,\ a_1 = a < x < \beta = a_2 \,,\ B_1(y) = B_2(y) = 0 \}$ (4)

καλείται (γενικό) πρόβλημα Sturm-Liouville (S-L), (εδώ το πρόβλημα είναι ομογενές).

◉ Το πρόβλημα $\{ L(y) + \lambda r y = 0 \,,\ a_1 = a < x < \beta = a_2 \,,\ y(a) = y(\beta)$ και $y'(a) = y'(\beta) \}$ με $p(a) = p(\beta)$, καλείται

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ S-L.

Αν στο πρόβλημα S-L έχουμε $p(x) \to \infty$, $x \to a+$ ή/και $x \to \beta-$ ή/και $p(a)=0, \dots,$ ή a ή/και β είναι το ∞, τότε λέμε ότι το πρόβλημα (S-L) είναι ΙΔΙΑΖΟΝ, (ανώμαλο).

Ο L λέγεται ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ αν

$$\int_a^\beta (u\,L(v) - v\,L(u))\,dx = 0 \quad \left(\text{ή } (u, L(v)) = (L(u), v) \right),$$

για $u, v \in C^2$ και ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν τον L (π.χ. στο πρόβλημα (4) οι (Ξ.Σ) που συνοδεύουν τον L είναι $B_i(y) = 0$ $i=1,2$).

ΠΡΟΤ. 4: Ταυτότητα Lagrange

$$u\,L(v) - v\,L(u) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\,W(u,v)(x)\right]$$

↳ ορίζουσα Wronsky. ▲

ΠΡΟΤ. 5: Τύπος Green

$$\int_a^\beta [u\,L(v) - v\,L(u)]\,dx = \left[p(x)\,W(u,v)(x)\right]_a^\beta. \quad ▲$$

ΠΡΟΤ. 6: Ο αυτοσυζυγής L είναι συμμετρικός αν

$$\left[p(x)\,W(u,v)(x)\right]_a^\beta = 0. \quad ▲$$

ΠΡΟΤ. 7: Ο L του προβλήματος (4) είναι συμμετρικός. ▲

ΠΡΟΤ. 8: Οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού τελεστή (ή του προβλήματος (4)) είναι πραγματικοί αριθμοί. Επίσης αν (λ, φ) ιδιοζεύγος τότε $(\lambda, \mathrm{Re}\,\varphi)$, $(\lambda, \mathrm{Im}\,\varphi)$ ιδιοζεύγη. ▲

ΠΡΟΤ. 9: Αν (λ_n, φ_n), (λ_m, φ_m) ιδιοζεύγη του (4) και $\lambda_n \neq \lambda_m$ τότε $(\varphi_n, \varphi_m)_r = \int_a^\beta \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,r(x)\,dx = 0$

δηλ. φ_n, φ_m είναι ορθογώνιες, με συνάρτηση βάρους r. ▲

ΠΡΟΤ. 10: Αν στο πρόβλημα (4), $q \le 0$ $(q<0)$ και $a_{11}a_{12} \le 0$, $a_{21}a_{22} \ge 0$, τότε όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές (θετικές). ▲

Π.χ. στην ασκ. 1 έχουμε $q(x)=0$, $a_{11}=a_{22}=0$ και $a_{12}=a_{21}=1$, οπότε $a_{11}a_{12} = a_{21}a_{22} = 0$, άρα όλες οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικές, $(\lambda \ge 0)$.

ΠΡΟΤ. 11: $\dim V = 1$, όπου V ο χώρος που παράγεται από τις ιδιοσυναρτήσεις του φ (συμβολικά $V = [\{\text{ιδιοσυναρ.}\}]$) που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ του προβλήματος (4). ▲

($[\{\dots\}]$ σημαίνει το περίβλημα ή τη θήκη του συνόλου $\{\dots\}$).

ΘΕΩΡΗΜΑ STURM-LIOUVILLE.

Το σταχό πρόβλημα (ιδιοτιμών) Sturm-Liouville (4)

(α) έχει αριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμές λ_i με $\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n<\dots$ και $\lambda_n\to\infty$ όταν $n\to\infty$,

(β) αν (λ_n,φ_n) ιδιοζεύγος με $\|\varphi_n\|_r=1$ τότε το σύνολο $\{\varphi_n\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $C([a,\beta])$ και για $\varphi\in C([a,\beta])$ ισχύει: $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, (5)

η σύγκλιση της (5) είναι κατά μέσον (νόρμα) και $a_n=(\varphi,\varphi_n)_r$.

(γ) αν $\varphi\in C^2([a,\beta])$ και η φ ικανοποιεί τις συνοριακές τιμές του (4) τότε η σειρά (5) και η $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\varphi_n(x)|$ συγκλίνουν ομοιόμορφα. ▲

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1: (α) Το (β) του θεωρήματος διατυπώνεται: ... το $\{\varphi_n\}$ πλήρης ορθοκανονική βάση του $C([a,\beta])$.

(β) Αν στο (β) τα $\{\varphi_n\}$ είναι ορθογώνια τότε $\left\{\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|_r}\right\}$ είναι ορθοκανονικά και το $a_n=\frac{(\varphi,\varphi_n)_r}{\|\varphi_n\|_r^2}$.

(γ) Αν φ κατά τμήματα λεία τότε η σειρά (5) συγκλίνει κατά νόρμα και σημειακά στη $\frac{\varphi(x+)+\varphi(x-)}{2}$.

(δ) Αν $\varphi\in C$ και φ' κατά τμήματα συνεχής η σειρά (5) συγκλίνει στην φ ομοιόμορφα.

(ε) Κλασική λύση του (4) σημαίνει: $\varphi\in C^2((a,\beta))\cap C^k([a,\beta])$, όπου $k=1$ αν υπάρχει παράγωγος πρώτης τάξης στις συνοριακές συνθ. και $k=0$ αν δεν υπάρχει, επιτέλου η φ ικανοποιεί τις (Σ.Τ.).

(στ) Σε πολλά βιβλία (π.χ. Boyce-Diprima) ο όρος αυτοσυζυγής τελεστής σημαίνει το συμμετρικό τελεστή.

(ζ) Μπορούμε να συνοψίσουμε τη διαδικασία στην άσκηση 1 (i) $\lambda=0$, (ii) $\lambda<0$ (iii) $\lambda>0$ με την προτ. 10 ή π.χ. αν $y(0)=y(1)=0$ εδώ έχουμε δύο σημεία μηδενισμού, οπότε η λύση δεν μπορεί να είναι ούτε ευθεία ($\lambda=0$) ούτε εκθετική ($\lambda<0$), αλλά τριγωνομετρικής μορφής ($\lambda>0$). ▲

ΑΣΚΗΣΗ 4: Να τεθεί υπό τη μορφή S-L η εξίσωση:

$$x^2y''+xy'+(\lambda x^2-n^2)y=0\ ,\quad x>0$$

ΛΥΣΗ (Δες άσκηση 3)

$p = e^{\int (a_1/a_2)dx}$, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow p = e^{\ln x} = x$

$q = p\frac{a_0}{a_2} = -\frac{n^2}{x}$, $\frac{r}{p} = \frac{\hat{a}_0}{a_2} \Rightarrow r = p\frac{\hat{a}_0}{a_2} = x\frac{x^2}{x^2} = x$

(εδώ $\hat{a}_0 = x^2$ και όχι 1 όπως στην ασκ. 3), τελικά έχουμε:

$(xy')' + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$. ▲

ΑΣΚΗΣΗ 5. Να δείξετε ότι σ' ένα περιοδικό πρόβλημα (S-L) ο τελεστής L είναι συμμετρικός.

ΛΥΣΗ: Τύπος Green

$$\int_a^\beta (u L(v) - v L(u))dx = \left[p(x)\, W(u,v)(x)\right]_a^\beta = p(\beta)\, W(u,v)(\beta) -$$

$$- p(a)\, W(u,v)(a) = [\dots]\,(p(\beta) - p(a)) = 0, \quad \text{ο.ε.δ.}.$$ ▲

ΑΣΚΗΣΗ 6. Να βρεθούν τα ιδιοζεύγη του περιοδικού προβλήματος (S-L) $\{ y'' + \lambda y = 0 \ , \ y(0) = y(1) \ , \ y'(0) = y'(1). \}$

ΛΥΣΗ. Όπως στην ασκ. 1 βρίσκουμε ....

(ιιή) ... $y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$, $y'(x) = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx$,

$y(0) = c_1 = c_1(\cos k + c_2 \sin k) = y(1) \Rightarrow c_1(\cos k - 1) + c_2 \sin k =$

$= 0 \Rightarrow c_1, c_2 \neq 0$ και $k = k_n = 2n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Επιπλέον

$y'(0) = 0 = y'(1) = -c_1 k \sin k$ που επίσης ισχύει για $k = k_n$. Ιδιοζεύγη $(\lambda_n, \underset{u}{\sin k_n x})$ και $(\lambda_n, \underset{v}{\cos k_n x})$,

επίσης ισχύει $W(u,v) = -k \neq 0$, συνεπώς u, v γραμ. ανεξ. και $\dim V = \dim[\{u, v\}] = 2$. ▲

ΑΣΚΗΣΗ 7. Να βρεθεί το a ώστε οι συναρτήσεις $f_n(x) = \varphi_n(x)$ και $g_n(x) = \psi_n(x) - a\varphi_n(x)$ να είναι ορθογώνιες όπου φ_n, ψ_n ιδιοσυναρτήσεις του (4) που αντιστοιχούν στην ιδιοτ. λ_n.

ΛΥΣΗ. Θα πρέπει: $0 = (f_n, g_n)_r = \int_a^\beta f_n(x)\, g_n(x)\, r(x)\, dx =$

$$= \int_a^\beta \varphi_n(\psi_n - a\varphi_n)\, r\, dx = \int_a^\beta \varphi_n \psi_n r - a\int_a^\beta \varphi_n^2 r\, dx =$$

$$= \int_a^\beta \varphi_n \psi_n r\, dx - a\|\varphi_n\|_r^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{(\varphi_n, \psi_n)_r}{\|\varphi_n\|_r^2}.$$ ▲

ΑΣΚΗΣΗ 8. Να δείξετε ότι $(f(x), g(x))_r = 0$

όπου (α) $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \cos x$, $a = -\pi$, $\beta = \pi$ και $r = 1$,

(β) $f(x) = 1$, $g(x) = 1 - x$, $a = 0$, $\beta = \infty$ και $r = e^{-x}$. ▲

(β) ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ (S-L) ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΗΜΙΟΜΟΓΕΝΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Θεωρούμε το πρόβλημα:

$$(5)\ \left\{ L(y)+\Lambda r y = f(x),\ a_1=\alpha<x<\beta=a_2,\ B_1(y)=B_2(y)=0 \right\},$$

όπου Λ συμπεριλήπτος παραμετρικός αριθμός.

Μέθοδος Επίλυσης

Λύση του (5) ανάπτυγμα σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων ή εναλλακτικά μέθοδος Fredholm.

1° Βήμα. Βρίσκουμε μία ορθοκανονική βάση του $C([\alpha,\beta])$ με χρήση του θεωρ. (S-L), δηλαδή βρίσκουμε τα ιδιοζεύγη του (4) (του ομογενούς προβλήματος ιδιοτιμών).

Έστω $\{\varphi_n\}$ αυτή η βάση. Αν φ μία λύση του (5), με $\varphi \in C^2([\alpha,\beta])$ τότε $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, (6), σύγκλιση κατά νόρμα και ομοιόμορφα, όπου $a_n=(\varphi,\varphi_n)_r$

2° Βήμα. Πολ/με την εξίσωση του (5) με φ_n και ολοκληρώνουμε: $\int_\alpha^\beta \varphi_n L(\varphi)\,dx+\Lambda\int_\alpha^\beta r\varphi_n\varphi\,dx=\int_\alpha^\beta \varphi_n f\,dx$ ή

$$\overset{L}{\Longrightarrow}\ \text{συμμετρικός}\ \int_\alpha^\beta \varphi L(\varphi_n)\,dx+\Lambda(\varphi,\varphi_n)_r \overset{\text{πρόβλημα}}{\underset{(4)}{=}} -\lambda_n\int_\alpha^\beta \varphi\varphi_n r\,dx$$

$$+\Lambda(\varphi,\varphi_n)_r=-\lambda_n(\varphi,\varphi_n)_r+\Lambda(\varphi,\varphi_n)_r=\int_\alpha^\beta \varphi_n f\,dx \Longrightarrow$$

$$(\Lambda-\lambda_n)\,a_n=\int_\alpha^\beta \varphi_n f\,dx=(f,\varphi_n),\quad \Longrightarrow$$

(i) αν $\Lambda-\lambda_n\neq 0 \Longrightarrow a_n=\dfrac{(f,\varphi_n)}{\Lambda-\lambda_n}$ και η λύση του (5) δίνεται από την (6), (αν $\|\varphi_n\|_r\neq 1$ τότε $a_n=\dfrac{(f,\varphi_n)}{(\Lambda-\lambda_n)\|\varphi_n\|_r^2}$).

(ii) αν $\Lambda-\lambda_n=0$ για κάποιο n και $(f,\varphi_n)=0$ για το ίδιο το n τότε η λύση του (5) είναι ΑΟΡΙΣΤΗ (απειρία λύσεων) και η λύση του (5) δίνεται:

$$\varphi(x)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty} a_k\varphi_k(x)+c\,\varphi_n(x),\quad \forall c\in\mathbb{R}$$

(iii) αν $\Lambda-\lambda_n=0$ και $(f,\varphi_n)\neq 0$ για κάποιο n τότε το (5) είναι ΑΔΥΝΑΤΟ. ▲

Τα προηγούμενα συμπεράσματα και η μεταγενέστερη απόδειξη

ακολουθούν το ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FREDHOLM ή ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών $\{ L(y) + \underbrace{(\Lambda+\lambda)}_{k} y = 0 \ , \ B_1(y) = B_2(y) = 0 \}$, τότε τα προηγούμενα βήματα είναι τα ίδια με $k = \Lambda + \lambda \Rightarrow \lambda_n = k_n - \Lambda$ και η ποσότητα $\Lambda - \lambda_n = \Lambda - k_n - \Lambda = -k_n$ κ.λ.π. ▲

ΑΣΚΗΣΗ 9. Να λυθεί το ημιομογενές (Π.Σ.Τ.),

$$\{ y'' + \Lambda y(x) = -1 + |1-2x| \ , \ 0<x<1 \ , \ y(0) = y(1) = 0 \} \ (1),$$

για $\Lambda = 2$ και για $\Lambda = 4\pi^2$, με ανάπτυξη σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλ. μέθοδος Fredholm).

ΛΥΣΗ. Εδώ $f(x) = -1 + |1-2x| \ , \ 0<x<1$

- Αναγωγή στη μορφή S-L: $p=1 \ , \ q=0 \ , \ r=1$
- 1ο Βήμα: Βρίσκουμε μία ορθοκανονική βάση $\{\varphi_n\}$ του $C([0,1])$. Θεωρούμε το πρόβλημα (ομογενές) ιδιοτιμών.

$$\{ y'' + \lambda y = 0 \ , \ 0<x<1 \ , \ y(0) = y(1) = 0 \} \ (2),$$

ως γνωστόν $\lambda \in \mathbb{R}$ και για $\lambda \leq 0$ δεν παίρνουμε μη μηδενική λύση (ασκ. 1) συνεπώς

$\underline{\lambda > 0}$ Έστω (όπως στη ασκ. 1) βρίσκουμε τα ιδιοζεύγη:

$$(\lambda_n, y_n(x)) = (n^2\pi^2, \sin n\pi x), \ n = 1,2,3,\dots.$$

- 2ο Βήμα: Λύση ημιομογενούς δημ. του (1)

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (3), \text{ με } a_n = \frac{I_n}{\Lambda - \lambda_n} \text{ αν } \Lambda - \lambda_n \neq 0,$$

και $I_n = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx \ , \ \varphi_n(x) = \dfrac{y_n(x)}{\|y_n(x)\|}$

$$\|y_n(x)\|^2 = \int_0^1 \sin^2 n\pi x\,dx = \frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x, \ n=1,2,3,\dots$$

$$I_n(x) = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^{1} = \dots = -8\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right) / n^2\pi^2$$

- $\Lambda = 2 \neq \lambda_n$ για $n=1,2,\dots$ $a_n = \dfrac{I_n}{\Lambda - \lambda_n}$ και η λύση δίνεται από την (3)
- $\Lambda = 4\pi^2 = \lambda_2$, $(\Lambda - \lambda_2) a_2 = I_2$

$I_2 = 0$, η λύση είναι $y(x) = 8 \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 2}}^{\infty} a_n \sin n\pi x + c\,\varphi_2(x)$, $\forall c \in \mathbb{R}$. ▲

ΑΣΚΗΣΗ 10. Όπως στην ασκ. 9 να λυθεί το ημιομογενές (Π.Σ.Τ.):

$$\{ y'' - y' + \Lambda y = e^{+x/2}, \quad 0<x<1, \quad y(0)=y(1)=0 \} \quad (1)$$

όπου $\Lambda = \pi^2,\ \pi^2+\frac{1}{4},\ 4\pi^2+\frac{1}{4}$ (3 περιπτώσεις).

ΛΥΣΗ. Ανάγωγή σε μορφή S-L: $p(x)=e^{-x}$, $q=0$, $r(x)=e^{-x}$, $g(x)=e^{x/2}$

Λύνουμε το ομογενές προβ. Ιδιοτιμών

$$\{ y'' - y' + \lambda y = 0, \quad y(0)=y(1)=0 \} \quad (2)$$

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις

$r^2 - r + \lambda = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \dots$
- $1-4\lambda = 0$ ... $\nexists$ ιδιοτιμή
- $1-4\lambda > 0$ ... $\nexists$ ιδιοτιμή
- $1-4\lambda < 0 \Rightarrow$

$$(\lambda_n, y_n(x)) = \left(n^2\pi^2 + \frac{1}{4},\ e^{x/2}\sin n\pi x\right)$$

Λύνουμε το ημιομογενές

$$\varphi_n(x) = y_n(x)/\|y_n\|_r, \quad \|y_n\|_r^2 = \int_0^1 y_n^2(x)\, r(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

- $\Lambda = \pi^2 \neq \lambda_n$ $\quad y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\pi^2 - \lambda_n}\varphi_n(x)$, $\quad f(x) = g(x)r(x) = e^{-x/2}$

$$I_n = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x/2}\sqrt{2}\, e^{x/2}\sin n\pi x\, dx = \frac{\sqrt{2}}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right].$$

- $\Lambda = \pi^2 + \frac{1}{4} = \lambda_1$, $\quad \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}(-2) \neq 0$ δεν έχει λύση
- $\Lambda = 4\pi^2 + \frac{1}{4} = \lambda_2$, $\quad \int_0^1 f(x)\varphi_2(x)\,dx = 0$

τότε $\quad y(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 2}}^{\infty} \frac{I_n}{\Lambda - \lambda_n}\varphi_n(x) + c\varphi_2(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}.$

ΑΣΚΗΣΗ 11. Όπως στην ασκ. 9 να λυθεί το ημιομογενές (Π.Σ.Τ.):

$$\{ x^2 y'' + x y' + \Lambda y = x(-1 + |1+2x|), \quad 1<x<e, \quad y(e)=y(1)=0 \}$$

ΛΥΣΗ: Ανάγωγή στη μορφή (S-L). Θεωρούμε την $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$ δηλ. την ομογενή εξίσωση ιδιοτιμών

Βρίσκουμε $p(x)=x$, $q(x)=0$, $r(x)=\frac{1}{x}$, $\quad xy'' + y' + \lambda\frac{1}{x}y = 0$

Βρίσκουμε μία ορθοκανονική βάση $\{\varphi_n\}$.

Εξίσωση τύπου Euler: $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$, $\quad x = e^t = x(t)$ και $y = y(x) = \psi(t)$,

$$y' = \frac{\dot\psi}{\dot x} = \frac{\dot\psi}{x}, \quad y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot\psi}{x}\right) = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\dot\psi + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\dot\psi) =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\dot\psi + \frac{1}{x}\ddot\psi\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}(-\dot\psi + \ddot\psi)$$

$$x^2y'' + xy + \lambda y = -\dot\psi + \ddot\psi + \dot\psi + \lambda\psi = \ddot\psi + \lambda\psi = 0 \quad \text{Κ.λ.π.}$$

Ημιομογενές πρόβλημα σε μορφή S-L

$$xy'' + y' + \Lambda\frac{1}{x}y = \frac{x}{x}(-1 + |1+2x|) = -1 + |1+2x| \dots$$

στη συνέχεια λύνεται όπως στην ασκ. 9.

(12) Να λυθεί το ημιομογενές πρόβλημα συνοριακών τιμών

$y''+3y=f(x)$, $0<x<\pi$, $y(0)=y(\pi)=0$, με $f(x)=$
$=5\sin 3x+2\sin 8x$, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε ιδιόμορφες συστήματα ιδιοσυναρτήσεων.

Λύση: $L(y)=y''$, L είναι αυτοσυζυγής και συμμετρικός λόγω των συνοριακών συνθηκών, $\Lambda=3$, $r=r(x)=1$, $q=0$, $p=1$.

1ο βήμα: Βρίσκουμε τα ιδιοζεύγη:

$$\{y''+\lambda y=0;\ 0<x<\pi,\ y(0)=y(\pi)=0\}\ (1)$$

$\lambda\in\mathbb{R}$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις ◎ $\lambda=0$, ◎ $\lambda<0$, ◎ $\lambda>0$. Μόνο για $\lambda>0$ βρίσκουμε ιδιοσυναρτήσεις, έτσι παίρνουμε ιδιοτιμές $\lambda_n=n^2$, $n=1,2,\dots$ και ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x)=\sin nx$ (δηλ. ισχύει $y_n''+\lambda_n y_n=0$).

2ο βήμα: Βρίσκουμε τη λύση $y(x)$ του ημιομογενούς προβλήματος:

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n y_n(x)\ (2)$$

$$\left.\begin{aligned}L(y)&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n L(y_n)\overset{(1)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(-\lambda_n y_n)\\ L(y)&=-3y+f(x)\end{aligned}\right\}\overset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3-\lambda_n)a_n y_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n y_n(x)=f(x)$$

λόγω ορθογωνιότητας προκύπτει: $\gamma_3=5$, $\gamma_8=2$, $\gamma_n=0$ $n\neq 3,8$. Συνεπώς $a_n=\gamma_n/(\Lambda-\lambda_n)$, $\Lambda=3$, $n=3,8$.

$$y(x)=\frac{5}{3-9}y_3(x)+\frac{2}{3-64}y_8(x)=-\frac{5}{6}\sin 3x-\frac{2}{61}\sin 8x.$$

---

(13) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος

$$\{y''+6y'+\lambda y=0,\ 0<x<1,\ y(0)=y(1)=0\}\ (1).$$

Λύση: Το πρόβλημα (1) είναι ένα συνοριακό πρόβλημα ιδιοτιμών τύπου Sturm–Liouville.

Το $\lambda\in\mathbb{R}$. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\mathcal{L}(r)=r^2+6r+\lambda=0,\quad r_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\lambda}}{1}=-3\pm\sqrt{9-4\lambda}$$

◎ $9-4\lambda=0 \Rightarrow r_1=r_2=-3 \Rightarrow y(x)=(c_1+c_2x)e^{-3x}$

$y(0)=c_1=0$, $y(1)=c_2e^{-3}=0 \Rightarrow c_2=0 \Rightarrow y\equiv 0$,

άρα δεν υπάρχει ιδιοτιμή η $\lambda = 9/4$.

(ii) $9-4\lambda>0 \Rightarrow 9-4\lambda=k^2,\ k>0 \quad r_{1,2}=-3\pm k$

$y(x)=e^{-3x}(c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}),\ y(0)=c_1+c_2=0 \Rightarrow c_2=-c_1$

$y(1)=e^{-3}c_1(e^k-e^{-k})=0 \Rightarrow c_1=0 \Rightarrow y\equiv 0,$

άρα $\nexists$ ιδιοτιμές για $9-4\lambda>0$.

(iii) $9-4\lambda<0 \Rightarrow 9-4\lambda=-k^2 \Rightarrow \lambda=\frac{9+k^2}{4}$

$r_{1,2}=-3\pm ik,\ y(x)=e^{-3x}(c_1\cos kx+c_2\sin kx)$

$y(0)=c_1=0,\ y(1)=e^{-3}c_2\sin k=0 \Rightarrow$

$k=n\pi,\ n=1,2,3,\dots\ c_2\neq 0$. Συνεπώς, ιδιοτιμές

$\lambda_n=\frac{9+k_n^2}{4}=\frac{9+n^2\pi^2}{4}$, ιδιοσυναρτήσεις

$y_n(x)=e^{-3x}\sin n\pi x,\ n=1,2,3,\dots$

---

(14) Να λυθεί το μιγαδικής πρόβλημα

$\{y''+6y'+\lambda y=e^{-3x},\ 0<x<1,\ y(0)=y(1)=0\}$ (i)

με τη μέθοδο της ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων.

Λύση: $L(y)=(py')'+qy=py''+p'y'+qy$, ο $L(y)=y''+6y'$ δεν είναι αυτοσυζυγής γιατί $(1)'=0\neq 6$.

Πολ/τε με $\mu=\mu(x)$

$\mu y''+6\mu y'+\mu\lambda y=\mu e^{-3x}$, πρέπει $\mu'=6\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=6dx$

$\Rightarrow \ln|\mu|=6x+c_1 \Rightarrow \mu(x)=ce^{6x} \Rightarrow (c=1)\ \mu(x)=e^{6x}$.

Άρα $p=e^{6x},\ q=0,\ r=r(x)=\mu(x)=e^{+6x}$, μορφή Sturm-Liouville

$(e^{6x}y')'+e^{6x}\lambda y=e^{3x}=f(x)$

1ο βήμα: Βρίσκουμε ιδιοτιμές του ομογενούς δηλ. του προβλήματος (1) της άσκησης (13). Έχουμε λοιπόν $y_n(x)=e^{-3x}\sin n\pi x,\ \lambda_n=\frac{9+n^2\pi^2}{4}$.

2ο βήμα: Λύση του (i) $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n(x)$ (ii) με

$a_n=\frac{I_n}{\Lambda-\lambda_n}$ (iii) $\Lambda=1,\ \lambda_n=\frac{9+n^2\pi^2}{4},\ \Lambda-\lambda_n\neq 0,\ I_n=\int_0^1 f(x)y_n(x)dx$

$=\int_0^1 e^{3x}e^{-3x}\sin n\pi x\,dx=-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$. Η λύση δίνεται από τη σχέση (ii).

Απόδειξη του (iii): $L(y_n)=-\lambda_ny_nr$, $L(y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nL(y_n)=\sum_{n=1}^{\infty}-a_n\lambda_ny_nr$

$=f(x)-\Lambda r(x)y=f(x)-\Lambda r(x)\sum_{n=1}^{\infty}a_ny_n(x) \Rightarrow$

$(r=r(x)) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(\Lambda-\lambda_n)a_ny_n(x)r(x)=f(x) \Rightarrow$ ο (iii).

Δίνονται τα προβλήματα συνοριακών τιμών: Ηετερογενές

$$\left\{\begin{array}{l} L(y)+\lambda r(x)y=0 \\ B_1(y)=B_2(y)=0 \end{array}\right\} (\Pi I) \quad \text{Πρόβλημα ιδιοτιμών} \quad \left\{\begin{array}{l} L(y)+\Lambda r(x)y=f(x) \\ B_1(y)=B_2(y)=0 \end{array}\right\} (HM)$$

όπου $L(y)=(py')'+qy$, $p',q,r\in C([a,\beta])$, $r,p>0$, $a=x_1<x<x_2=\beta$, $B_i(y)=a_{i1}y(x_i)+a_{i2}y'(x_i)=0$, $i=1,2$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ STURM-LIOUVILLE:</u>

(α) Οι ιδιοτιμές του (ΠΙ) είναι ΑΠΛΕΣ, αποτελούν αριθμήσιμο σύνολο και έχουν την ιδιότητα:

$\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n<\dots$ με $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$.

(β) Το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων $\{y_n\}$ του (Π.Ι) είναι ορθογώνιο ενώ το $\{\varphi_n=y_n/\|y_n\|_r\}$ είναι ορθοκανονικό με εσωτερικό γινόμενο $(h,k)_r=\int_a^\beta h(x)k(x)r(x)\,dx$.

(γ) (i) Για κάθε $g\in C^1_p([a,\beta])$ (δηλ. g, g' κατά τμήματα συνεχής) με $B_1(g)=B_2(g)=0$ ισχύει

$$\frac{g(x+)+g(x-)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x),$$ Σύγκλιση σημειακή,

(ii) Αν επιπλέον των (i) έχουμε ότι g συνεχής τότε η σειρά συγκλίνει <u>ομοιόμορφα</u> στην $g(x)$.

(iii) Για κάθε $g\in L_{2,r}([a,\beta])$ $\left(\text{δηλ. } \int_a^\beta g^2(x)r(x)\,dx<\infty\right)$ με $B_1(g)=B_2(g)=0$ η σειρά συγκλίνει κατά μέσον ή κατά $\|\ \|_{2,r}$-νόρμα στην $g(x)$.

Σε κάθε περίπτωση

$$a_n=\int_a^\beta g(x)\varphi_n(x)r(x)\,dx.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ (Ανάπτυξη σε πλήρες σύστημα ιδιοσ/εων, ή Εναλλακτικό Fredholm)</u>

Αν (λ_n, y_n) ιδιοζεύγος του (ΠΙ) και $y=y(x)$ η λύση του (HM) τότε έχουμε:

- για $\Lambda\neq\lambda_n$ έχουμε λύση μοναδική

την $y(x)=\sum a_n y_n(x)$, $a_n=\dfrac{\int_a^\beta f(x)\cdot y_n(x)\,dx}{\|y_n\|_{2,r}}$

- Για $\Lambda = \lambda_N$ για κάποιο N και $a_N \neq 0$ δεν έχουμε λύση (ΑΔΥΝΑΤΟ)
- Για $\Lambda = \lambda_N$ και $a_N = 0$ έχουμε απειρία λύσεων της $y(x) = c_N y_N(x) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^{\infty} a_n y_n(x)$, $\forall c_N \in \mathbb{R}$. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟ FREDHOLM)

Δίνονται τα προβλήματα:

$$\left.\begin{aligned} L(y) &= f(x) \\ B_1(y) &= B_2(y) = 0 \end{aligned}\right\} (1) \quad \text{και} \quad \left.\begin{aligned} L(z) &= 0 \\ B_1(z) &= B_2(z) = 0 \end{aligned}\right\} (2)$$

με $a = x_1 < x < x_2 < \beta$.

Το (1) έχει λύση αν ισχύει $\int_a^\beta f(x)\, z(x)\, dx = 0$ για κάθε z του (2). ▲

Παρατηρήσεις: (1) Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για τα προβλήματα:

$$\Sigma: \left.\begin{aligned} N(y) &= f(x) \\ B(y) &= \Gamma(y) = 0 \end{aligned}\right\} \quad a < x_1 < x < x_2 = \beta,$$

B, Γ γραμμικά ανεξάρτητοι τελεστές και

$$\Sigma^*: \left.\begin{aligned} N^*(y) &= 0 \\ B^*(y) &= \Gamma^*(y) = 0 \end{aligned}\right\}$$

όπου $N(y) = a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y$, και $N^*(y) = (a_2 y)'' - (a_1 y)' + a_0 y$ συζυγής του N. Σ^* συζυγής του Σ με $y \in$ Πεδίο Ορισ. του N^*.

Αν $N = N^*$ ο N λέγεται αυτοσυζυγής. Ο L είναι αυτοσυζυγής. (N, Σ) αυτοσυζυγές πρόβλημα του (N^*, Σ^*).

(2) Ταυτότητα Lagrange: $v N(u) - u N^*(v) = \frac{d}{dx}[R(u,v)]$

Ταυτότητα Green: $\int_a^\beta v N(u) - u N^*(v) = [R(u,v)]_a^\beta$

Αν Σ^* είναι τέτοιος ώστε $[R(u,v)]_a^\beta = 0$ τότε λαμβάνεται αυτοσυζυγείς συνοριακές συνθήκες του Σ.

$R(u,v) := u a_1 v - u (a_2 v)' + u' A_2 v$

Άσκηση: Βρείτε το αυτοσυζυγές πρόβλημα του

$N(y) = y'' + y = 0$, $\Sigma: y(0) + y(\pi) = 0$, $y'(0) = 0$

Απάντηση: $N^*(y) = y'' + y = 0$, $\Sigma^*: y'(0) + y'(\pi) = 0$, $y(\pi) = 0$. ▲

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΕΘΟΔΩΝ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

I Φραγμένα χωρία:

(Α) Χωρική διάσταση $n=1$:

(1) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<L,\ t>0 \\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), & 0<x<L \end{cases}$ Λύση με μέθοδο χωρισμένων μεταβλητών (Χ.Μ)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n a^2 t},$$

$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$. (Μεταλλική ράβδος, στα άκρα πάχος)

---

(2) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<L,\ t>0 \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), & 0<x<L \end{cases}$ Neumann (ομογενείς), θερμομόνωση στα άκρα,

Μέθοδος (Χ.Μ.) $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\lambda_n a^2 t}$.

---

(3) (α) Πρόβλημα (2) αλλά με Σ.Σ. Neumann μη ομογενείς:
$u_x(0,t)=u_x(L,t)=T$, $t>0$.

(β) Πρόβλημα (1) αλλά με Σ.Σ. Dirichlet μη ομογενείς:
$u(0,t)=T_1$, $u(L,t)=T_2$, $t>0$.

(γ) Εξίσωση μη ομογενής $u_t=a^2u_{xx}+f(x)$, με συνοριακές συνθήκες του (1) ή του (2) ή του (3α) ή (3β) και αρχικές συνθήκες $u(x,0)=u_0(x)$.

Θέτουμε $u(x,t)=v(x,t)+S(x)$,

- Για το (3α), η v ικανοποιεί το (2) ενώ η S το πρόβλημα: $\{S''(x)=0,\ S'(0)=S'(L)=0\} \Rightarrow S(x)=Ax+B$ και $S'(0)=S'(L)=A=T$. Επιλέγουμε το B αυθαίρετα, το πρόβλημα (αποδεικνύεται ότι) έχει μοναδική λύση. Επίσης $v_0(x)=u_0(x)-S(x)$.
- Για το (3β), η v ικανοποιεί το (1), ενώ η S το πρόβλημα $\{S''(x)=0$ και $S(0)=T_1$, $S(L)=T_2\}$
- Για το (3γ), το S ικανοποιεί το πρόβλημα $\{S''(x)+f(x)=0$, και για $x=0,L$ τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες.

Το v ικανοποιεί τα αντίστοιχα ομογενή προβλήματα.

---

(4) $\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<L,\ t>0, \\ u_x(0,t)=T_1,\ u_x(L,t)=T_2, & t>0 \\ u(x,0)=u_0(x) \end{cases}$ Θέτουμε $u(x,t)=v(x,t)+Z(x,t)$, Z μερική λύση της μορφής: $Z(x,t)=Ct+Ax^2+Bx+\Gamma$

$\Rightarrow C=2A$, $Z_x=2Ax+B$, $Z_x(0,t)=T_1=B$, $Z_x(L,t)=2AL+T_1=T_2 \Rightarrow Z(x,t)=\frac{T_2-T_1}{L}t+\frac{T_2-T_1}{2L}x^2+T_1x+\Gamma$. Επιλέγουμε το Γ αυθαίρετα, το πρόβ. (αποδεικνύεται ότι) έχει μοναδική λύση. Το v ικανοποιεί το πρόβλημα (2) με $v_0(x)=u_0(x)-\frac{T_2-T_1}{2L}x^2-T_1x-\Gamma$, Γ γνωστό.

Μη ομογενής εξίσωση, $q=q(x,t)$.

$$(5)\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + q(x,t), & 0<x<L,\ t>0 \\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), & 0<x<L \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΣΕ ΠΛΗΡΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (είναι γενική μέθοδος, ισχύει και για την κυματική εξίσωση, όχι όμως για την εξίσωση Laplace). Αναζητούμε λύση της μορφής: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} E_n(t)\varphi_n(x)$ (μπορεί και $n=0$)

Η $\varphi_n(x)$ ικανοποιεί το πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$(6)\begin{cases} \varphi_n''(x)+\lambda_n\varphi_n(x)=0, & 0<x<L \\ \varphi_n(0)=\varphi_n(L)=0 \end{cases}$$

οπότε έχουμε: $u_t - a^2 u_{xx} \overset{(6)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n' + \lambda_n a^2 E_n\right)\varphi_n(x) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t)\varphi_n(x) = q(x,t)$, (αναπτύσσουμε την q σε (γενικευμένη) σειρά Fourier ως προς τα ιδιόματα σύστημα $\{\varphi_n(x)\}$.

$Q_n(t)=\frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_0^L q(x,t)\varphi_n(x)\,dx$ και $E_n' + \lambda_n a^2 E_n = Q_n$, (*)

Οι αυθαίρετες σταθερές που προκύπτουν από την (*), προσδιορίζονται από την αρχική συνθήκη δηλ. $u_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty} E_n(0)\varphi_n(x)$

$E_n(0)=\frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_0^L u_0(x)\varphi_n(x)\,dx$, (εδώ $E_n(0)=c_n$ και $\|\varphi_n\|^2 = L/2$).

$$(7)\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<L,\ t>0 \\ u(0,t)=T_1(t),\ u(L,t)=T_2(t), & t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), & 0<x<L \end{cases}$$

Σ.Σ. Dirichlet μη ομογενείς χρονοεξαρτώμενες.

$u(x,t)=v(x,t)+k(x,t)$.

Η k ικανοποιεί το πρόβλημα

$\{k_{xx}(x,t)=0,\ k(0,t)=T_1(t),\ k(L,t)=T_2(t),\ t>0\}$

$\Rightarrow k=Ax+B \Rightarrow k(x,t)=\frac{T_2(t)-T_1(t)}{L}x+T_1(t)$

Η v ικανοποιεί είναι πρόβλημα όπως το (5) με $q(x,t)=-k_t(x,t)$. ή όπως το (3γ).

(Β) ΧΩΡΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ $n\geq 2$: $n=2$

$$(7)\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx}+u_{yy}), & 0<x<L,\ 0<x<K,\ t>0 \\ u(0,y,t)=u(L,y,t)=u(x,0,t)=u(x,K,t)=0 \\ u(x,y,0)=u_0(x,y) \end{cases}$$

Μέθοδος Χ.Μ. $u=X(x)\Psi(y)T(t)$

$$\left.\begin{aligned} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(L)=0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \Psi''+\gamma\Psi=0 \\ \Psi(0)=\Psi(K)=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (\lambda_n, X_n(x)) &= \left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \sin\frac{n\pi}{L}x\right) \\ (\gamma_m, \Psi_m(y)) &= \left(\left(\frac{m\pi}{K}\right)^2, \sin\frac{m\pi}{K}y\right) \end{aligned}$$

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{K}x\right)e^{-\ell_{mn}a^2 t},\quad \ell_{mn}=\pi^2\left(\frac{n^2}{L^2}+\frac{m^2}{K^2}\right)$$

$$a_{mn}=\frac{4}{LK}\int_0^L\int_0^K u_0(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{K}y\right)dx\,dy.$$

Ανάλογο πρόβλημα με το (7) αλλά με $n=3$, τότε

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} a_{mnq} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{K}y\right)\sin\left(\frac{q\pi}{M}z\right)\cdot e^{-l_{mnq}a^2 t}.$$

$0<x<L,\ 0<y<K,\ 0<z<M$

με $a_{mnq} = \dfrac{8}{LKM}\displaystyle\int_0^L\int_0^K\int_0^M u_0(x,y,z)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{K}y\right)\sin\left(\frac{q\pi}{M}z\right)dx\,dy\,dz$

και $l_{mnq} = \pi^2\left(\dfrac{n^2}{L^2}+\dfrac{m^2}{K^2}+\dfrac{q^2}{M^2}\right)$.

II ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΑ ΧΩΡΙΑ:

(Α) ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ FOURIER (OF): (ΣF ≡ Σειρά Fourier)

$$\Sigma F(f) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\beta_n\sin\frac{n\pi x}{L} = \varphi(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2},\quad x\in(-L,L),$$

αν $f(x)$ απολύτως ολοκληρώσιμη και κατά τμήματα συνεχής τότε υπάρχει το όριο όταν $L\to\infty$, έτσι προκύπτει το $OF(f)$.

$$OF(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos(s(x-\tau))\,d\tau\right]ds = \varphi(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2},\ x\in\mathbb{R}$$

επίσης το $OF(f)$ γράφεται: $OF(f) = \displaystyle\int_0^{\infty}(A(s)\cos x + B(s)\sin sx)\,ds$

$= \varphi(x)$, όπου $A(s) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx$, $B(s) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx$

Ανάλογα ορίζεται το $HOF(f)$ = Ημιτονικό Ολοκ. Fourier (είναι $A(s)\equiv 0$, $B(s) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\sin sx\,dx$), όπως επίσης $\Sigma OF(f)$ με $B(s)\equiv 0$ και $A(s) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\cos sx\,dx$. (Για το $HOF(f)$ ($\Sigma OF(f)$) η f είναι περιττή (άρτια) επεκτάσιμη)

Εφαρμογές (i) Να βρεθεί το $OF(f)$ με $f(x) = h(1-|x|)$, όπου h η συνάρτηση Heaviside.

Λύση: $OF(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{s}\cos sx\,ds = f(x)$, $A(s) = \dfrac{2\sin s}{\pi s}$

$B(s)=0$, $\left(f(0) = 1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{s}\,ds = I\right.$, εύρεση του $\left.I\right)$.

(ii) Να λυθεί το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<\infty,\ t>0\\ u(0,t)=0, & u, u_x \text{ περιορισμένα όταν } x\to\infty\\ u(x,0)=f(x), & 0<x<\infty\end{cases}$$

Μέθοδος Χ.Μ. $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\begin{cases} X''+\lambda X = 0\\ X(0)=0\end{cases}\quad (*)$$

Το (*) είναι ανώμαλο προβ. Sturm–Liouville.

Ιδιοζεύγος: $(\lambda_s, X_s) = (s^2, \sin(sx))$, $s>0$, "φάσμα" του τελεστή συνεχές ή $\lambda_s = s^2$, $s>0$ δημιουργεί ένα συνεχές ιδιοτιμών.

$u(x,t;s) = X_s(x)T_s(t)$, Αρχή επαλληλίας $\Rightarrow u(x,t) = \displaystyle\int_0^{\infty} u(x,t;s)\,ds$

$= \displaystyle\int_0^{\infty} B(s)\sin(sx)\,e^{-a^2 s^2 t}\,ds$ και $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} B(s)\sin sx\,ds$

άρα $B(s) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\sin sx\,ds$, ($f(x)$ κατά τμήματα συνεχής και απολύτως ολοκληρώσιμη).

(Β) ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER (MF):

Από OF(f) παίρνουμε: $OF(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(s(x-\xi))\,d\xi\right]ds =$

πράξεις $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{is\xi}\,d\xi\right]}_{\hat f(s)}ds$

Άρα

$$\mathcal{F}\{f(x)\}=\hat f(s) \quad \text{και} \quad \mathcal{F}^{-1}\{\hat f(s)\}=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(s)e^{isx}\,ds$$

Ισχύει $\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\}=(-is)^n\hat f(s)$ (8), ΣΥΝΕΛΙΞΗ $\mathcal{F}^{-1}\{\hat f(s)\cdot\hat g(s)\}=$
$=(f\circledast g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi.$

ΗΜΙΤΟΝΙΚΟΣ Μ.F. ≡ HMF

$$HMF(f)=\mathcal{F}_s\{f(x)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin st\,dt\approx\hat f_s(s)$$

$$\mathcal{F}_s^{-1}\{\hat f_s(s)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat f_s(s)\sin st\,ds=f(t)$$

Ανάλογα ορίζεται και ο ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΙΚΟΣ Μ.F. (θέστε cos αντί για sin και c_s αντί s_s)

Σημείωση: ◎ Για να υπάρχει ο $\mathcal{F}\{f(x)\}$ θα πρέπει η f να είναι κατά τμήματα συνεχής και απολύτως ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$.
◎ Τα γενικευμένα ολοκληρώματα θεωρούνται με την έννοια της Κύριας Τιμής κατά Cauchy (PVC) δηλ. $\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\dots=\int_{-\infty}^{\infty}$.
◎ Ο τύπος (8) ισχύει με τις εξής προϋποθέσεις: $f^{(k)}(x)$ συνεχείς για $k=0,1,\dots,n-1$, $f^{(n)}(x)$ τμηματικά λείο, $f^{(k)}(x)$ $k=0,\dots,n$ απολύτως ολοκληρώσιμες, $f^{(k)}(x)\to 0$, $|x|\to\infty$ για $k=0,1,\dots,n-1$.
◎ Υπάρχουν τύποι για το HMF(f'), ΣMF(f') κ.λ.π.
◎ Ανάλογα ορίζεται ο MF αν αντί για s θέσουμε −s.
◎ Ανάλογα ορίζεται ο MF για $x\in\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{F}\{f(x)\}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{is\cdot\xi}\,d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_n$$

$\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$, $s=(s_1,s_2,\dots,s_n)$, $s\cdot\xi=s_1\xi_1+\dots+s_n\xi_n$.
◎ Μπορεί να $\exists\ \mathcal{F}\{f(x)\}$ χωρίς η f να είναι απολύτως ολοκληρ. αρκεί να $\exists$ PVC $\int_{-\infty}^{\infty}$.

(Γ) ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE (ML)

(το αντίστροφο δεν ισχύει)

Αν f κατά τμήματα συνεχής και ευθετικής τάξεως α τότε υπάρχει

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt=\hat f(s),\quad \mathcal{L}^{-1}\{\hat f(s)\}$$ ο (μοναδικός αν υπάρχει) αντίστροφος ML, ΣΥΝΕΛΙΞΗ: $\mathcal{L}^{-1}\{\hat f(s)\cdot\hat g(s)\}=(f*g)(x)=$
$=\int_0^\infty f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$, $\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\}=s^n\hat f(s)-s^{n-1}f(0)-\dots-f^{(n-1)}(0)$.

Σημείωση: ◎ Ο ML συνήθως εφαρμόζεται για τη χρονική μεταβλητή $t>0$ ενώ ο MF, HMF, ΣMF εφαρμόζονται για τη χωρική μεταβλητή $x\in\mathbb{R}$.
◎ Ο MF εφαρμόζεται και για μη ομογενείς εξισώσεις.
◎ Πρόβλήματα της εξίσωσης θερμότητας, κυματικής και Laplace σε άπειρα ή ημιάπειρα χωρία λύνονται με χρήση του ολοκληρώματος Fourier ή των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών.

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ II
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

---

(1) Να ταξινομηθούν και να ανακθούν στην κανονική τους μορφή οι παρακάτω Μ.Δ.Ε. Να λυθούν οι (α) και (γ).

(α) $x^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$,

(β) $u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$,

(γ) $4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2$.

<u>ΛΥΣΗ</u>:

<u>(α)</u> (i) Είναι Μ.Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης με συναρτησιακούς συντ/τές.

$\Delta = B^2 - A\Gamma = (xy)^2 - x^2 \cdot y^2 = 0 \Rightarrow$ είναι παραβολικού τύπου.

(ii) $L(x,y,u) = x^2 D_1^2 u + 2xy\, D_1 D_2 u + y^2 D_2^2 u$, $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,2$.

$L_{pr}(x,y,\underset{\sim}{D}) = x^2 D_1^2 + 2xy\, D_1 D_2 + y^2 D_2^2 \leftarrow$ <u>κύριο σύμβολο</u>

Αν $\varphi(x,y) = 0$ η χαρακτηριστικές καμπύλες τότε θα ικανοποιούν την εξίσωση $L_{pr}(x,y,\nabla\varphi) = 0 \Leftrightarrow$ χαρακτηριστική εξίσωση.

$x^2 \varphi_x^2 + 2xy\, \varphi_x \varphi_y + y^2 \varphi_y^2 = 0$. (Σημ. θέτω $\nabla\varphi$ στη θέση του $\underset{\sim}{D} = (D_1, D_2)$).

Έστω $\varphi_y \neq 0 \Rightarrow$

$x^2 \left(\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 + 2xy \dfrac{\varphi_x}{\varphi_y} + y^2 = 0$, αν $\varphi_y \neq 0 \Rightarrow \exists$ περιοχή: $y = y(x)$ & $y'(x) = -\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$,

συνεπώς $x^2 y'^2 - 2xy\, y' + y^2 = 0$, λύνουμε ως προς y':

$$y' = \frac{+xy \pm \sqrt{\Delta}}{x^2} = +\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = +\frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = +\frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} \frac{y}{x} = c$$

<u>Αλλαγή των μεταβλητών κατά είδος των χαρακτηριστικών</u>

$\frac{y}{x} = \xi$ και $y = \eta$ (έχουμε μία χαραμ. καμπύλη).

$u(x,y) = U(\xi,\eta)$, $J = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -\frac{y}{x^2} \neq 0$ η $\underline{x \cdot y \neq 0}$

$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x$

$u_{xx} = U_{\xi\xi}\xi_x^2 + U_\xi \xi_{xx} + U_{\eta\eta}\eta_x^2 + U_\eta \eta_{xx}$, κ.λ.π.

Τελικά παίρνουμε

$L(x;y;u) = \hat{L}(\xi,\eta,U) = y^2 U_{\eta\eta} = 0 \iff$

$\underline{\eta^2 U_{\eta\eta} = 0}$ (*) , η κανονική μορφή:

(ii) Λύση της (*)

$U_\eta = F(\xi) \overset{\int}{\Longrightarrow} U(\xi,\eta) = G(\xi) + \eta F(\xi)$

η $u(x,y) = G\left(\frac{y}{x}\right) + y F\left(\frac{y}{x}\right)$ όπου G, F αυθαίρετες $C^2(\mathbb{R})$ συναρτήσεις.

(β)(i) $L(x,y,u) = u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$

$\Delta = B^2 - AΓ = 0 - 1 \cdot x^2 = -x^2 < 0 \Rightarrow$ Ελλειπτικού τύπου.

(ii) <u>Κανονική μορφή</u>:

$L(x,y,u) = D_1^2 u + x^2 D_2^2 u = 0$

$L_{Pr}(x,y,\underset{\sim}{D}) = D_1^2 + x^2 D_2^2$

L_{Pr} ← κύριο (principal) μέρος του τελεστή ≡ οι όροι με τη μεγαλύτερης τάξης παραγώγους.

$\varphi(x,y) = 0$ οι χαραμ. καμπύλες, θα ικανοποιούν την εξίσωση:

$y' = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, $\varphi_y \neq 0$

$L_{Pr}(x,y,\nabla\varphi) = \varphi_x^2 + x^2 \varphi_y^2 = 0 \Rightarrow y'^2 + x^2 = 0$

$dy = \pm i x\, dx \Longrightarrow y = i\frac{x^2}{2} + \hat{c}_1$ και $y = -i\frac{x^2}{2} + \hat{c}_2$

$\underline{2y - ix^2 = c_1}$ και $\underline{2y + ix^2 = c_2}$

χαρακ. καμπύλες δύο

Αλλαγή μεταβλητών $\xi = 2y - ix^2$, $\eta = 2y + ix^2$

και $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = 2y$, $\beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) = -x^2$,

α, β οι <u>πραγματικές νέες μεταβλητές</u>.

$u(x,y) = U(\alpha, \beta)$, οπότε

$$L(x,y,u) = \hat{L}(\alpha, \beta, U) = 0 \Leftrightarrow$$

$$u_{xx} + x^2 u_{yy} \xrightarrow[\text{παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων}]{\text{πράξεις...}} U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} + \frac{U_\beta}{2\beta} = 0$$

<u>κανονική μορφή</u>

<u>(γ)</u> (i) Κύριο μέρος L_{pr}.

$L_{pr}(x,y,u) = 4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy}$, $L(x,y,u) = L_{pr}(x,y,u) + u_x + u_y - 2 = 0$ είναι με σταθερούς συντελεστές.

$$\Delta = B^2 - AΓ = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{25-16}{4} = \frac{9}{4} > 0$$

είναι υπερβολικού τύπου

(ii) Αναγωγή στην κανονική μορφή:

$$L_{pr}(x,y,u) = 4D_1^2 u + 5D_1 D_2 u + D_2^2 u$$

$$L_{pr}(x,y,D) = 4D_1^2 u + 5D_1 D_2 + D_2^2 \quad \text{κύριο σύμβολο}$$

$\varphi(x,y) = 0$, χαρακτηριστικές καμπύλες

$L_{pr}(x,y,\nabla\varphi) = 0$ λέγεται και χαρακτηριστική εξίσωση

ή $4\varphi_x^2 + 5\varphi_x\varphi_y + \varphi_y^2 = 0 \xrightarrow{:\varphi_y \neq 0} y' = -\varphi_x/\varphi_y$

$$4y'^2 - 5y' + 1 = 0$$

$$y' = \frac{+\frac{5}{2} \pm \sqrt{\Delta}}{4} = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{4} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

$y = x + c_1$ και $y = \frac{1}{4}x + c_2$

$\xi = y - x$ και $y - \frac{x}{4} = \eta$ οι νέες μεταβλητές.

$u(x,y) = U(\xi,\eta)$

$$L(x,y,u) = \hat{L}(\xi,\eta,U) = U_{\xi\eta} - \frac{1}{3}U_\eta + \frac{8}{9} = 0 \quad (*)$$

<u>1ου είδους κανονική μορφή</u>

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \xi + \eta \\ \beta = \xi - \eta \\ u(x,y) = w(\alpha,\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow L(x,y,u) = L_1(\alpha,\beta,w) =$$

$$= w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} - \frac{1}{3}w_\alpha + \frac{1}{3}w_\beta + \frac{8}{9} = 0$$

<u>2ου είδους κανονική μορφή</u>

(iii) Επίλυση της (*)

$$U_{\xi\eta} - \frac{1}{3}U_\eta + \frac{8}{9} = 0, \quad U_\eta = Z \Rightarrow$$

$$Z_\xi - \frac{1}{3}Z + \frac{8}{9} = 0 \Rightarrow Z = U_\eta = \frac{8}{3} + F(\eta)e^{\xi/3}$$

$$U(\xi,\eta) = \frac{8}{3}\eta + e^{\xi/3}\int F(\eta)\,d\eta + G(\xi) =$$

$$= G(\xi) + e^{\xi/3}H(\eta) + \frac{8}{3}\eta$$

όπου $H'(\eta) = F(\eta)$, ή

$$u(x,y) = G(y-x) + e^{(y-x)/3}H\left(y - \frac{x}{4}\right) + \frac{8}{3}\left(y - \frac{x}{4}\right)$$

όπου G, H αυθαίρετες $C^2(\mathbb{R})$ συναρτήσεις.

ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ →

(2) Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$(\alpha)\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=u_0(x)=x(1-x), & 0<x<1. \end{cases}$$

$$(\beta)\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t)=1,\ u(1,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=u_0(x)=1+x, & 0<x<1. \end{cases}$$

$$(\gamma)\begin{cases} u_t = k\,u_{xx}, & 0<x<L,\ t>0,\ k>0 \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=u_0(x)=x \end{cases}$$

$$(\delta)\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t)=\theta_1,\ u(1,t)+u_x(1,t)=\theta_2, & t>0 \\ u(x,0)=\theta_1 & 0<x<1 \end{cases}$$

<u>ΛΥΣΗ:</u>

(α) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Χ.Μ., αναζητούμε λύση της μορφής $u(x,t)=X(x)T(t)$ και αντικαθιστούμε στην εξίσωση: $T'X = TX''$ ή $\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$, λ σταθερά αρχόμενας ή χωρισμού $\Longrightarrow$

$$X''+\lambda X=0,\quad X(0)=X(1)=0 \qquad (1)$$

$$T'+\lambda T=0 \qquad (2)$$

Το (1) είναι πρόβλημα Sturm-Liouville $\Longrightarrow$ $\lambda\in\mathbb{R}$. Από το (2) $\Longrightarrow$ $T(t)=C\,e^{-\lambda t}$, για να έχουμε φραγμένες λύσεις πρέπει $\underline{\lambda\geq 0}$.

Οι συνοριακές συνθήκες για $\lambda=0$ δίνουν $u\equiv 0$. Τελικά $\lambda>0$, τότε το (1) δίνει:

$$X(x)=c_1\cos kx+c_2\sin kx \qquad 0<\lambda=k^2,\ \sqrt{\lambda}=k>$$

$$X(0)=c_1=0 \quad \& \quad X(1)=c_2\sin k=0,\ c_2\neq 0$$

$$\Longrightarrow k=k_\nu=\nu\pi=\sqrt{\lambda_\nu} \Longrightarrow \lambda_\nu=\nu^2\pi^2$$

Ιδιοζεύγοι $(\lambda_\nu, X_\nu(x))=(\nu^2\pi^2, \sin\nu\pi x)$, $\nu=1,2,\dots$

Ιδιολύση $u_\nu(x,t)=X_\nu(x)\,T_\nu(t)$.

Αρχή επαλληλίας η υπέρθεσης δίνει λύση της μορφής:

$$u(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu e^{-\lambda_\nu t}\sin\nu\pi x$$

Προσδιορίζουμε τα c_ν:

$$u(x,0)=u_0(x)=x(1-x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\sin\nu\pi x,$$

λόγω ορθογωνιότητας παίρνουμε, (σειρά Fourier)

$$c_\nu=\frac{2}{1}\int_0^1 x(1-x)\sin\nu\pi x\,dx \underset{\text{κατά παράγοντας}}{\overset{\text{ολοκ.}}{=}} 8/\pi^3\nu^3$$

ν περιττός. Τελικά η λύση είναι:

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^3}\sin\nu\pi x\, e^{-\nu^2\pi^2 t}.$$

(ν περιττός)

(β) Αναζητούμε λύση της μορφής (μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες) $u(x,t)=S(x)+V(x,t)$, από την εξίσωση παίρνουμε:

$$V_t=S''+V_{xx} \quad \text{κ.λ.π.}$$

$$S''=0 \qquad S(0)=1,\quad S(1)=0 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{cases} v_t = v_{xx} & 0<x<1\ ;\ t>0 \\ v(0,t)=v(1,t)=0 & ,\ t>0 \\ v(x,0) = u(x,0)-\varphi(x) = u_0(x)-\varphi(x) & 0<x<1 \end{cases}\right\} \quad (2)$$

Από το (1) παίρνουμε $\underline{\varphi(x)=1-x}$

και από το (2), δες άσκηση (α) παίρνουμε,

$$v(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\, e^{-\nu^2\pi^2 t} \sin\nu\pi x \quad \text{με}$$

$$c_\nu = \frac{2}{1}\int_0^1 v(x,0)\sin\nu\pi x\, dx = 2\int_0^1 2x\sin\nu\pi x\, dx =$$

$$\left(v(x,0) = 1+x-1+x = 2x\right) \overset{\text{ο.κ.π.}}{=} \underline{(-1)^{\nu+1}\frac{4}{\nu\pi}}\ ,\ \nu\geq 1$$

Τελικά η λύση είναι:

$$u(x,t) = (1-x) + \sum (-1)^{\nu+1}\frac{4}{\nu\pi}\, e^{-\nu^2\pi^2 t}\sin\nu\pi x$$

$$\left(u(x,t) \longrightarrow 1-x \quad \text{όταν} \quad t\to\infty\right)$$

(γ) Όπως στην (α) παίρνουμε

$$X''+\lambda X = 0\ ,\quad X'(0)=X'(L)=0 \qquad (1)$$

πρόβλημα S-L, και

$$T'+k\lambda T = 0 \ (1) \Rightarrow \quad T(t) = c\, e^{-k\lambda t},\ k>0.$$

Μόνο $\lambda\geq 0$ είναι δεκτά

$\underline{\lambda=0}$: $\quad X(x) = Ax+B \qquad X'(x)=A$

$$X'(0)=X'(L)=A=0$$

$(\lambda_0, X_0(x)) = (0, 1)$ ιδιοζεύγαρη

$\underline{\lambda>0}$ $\quad X(x) = c_1\cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$

$$X'(0) = c_2\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X'(L) = c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \ , \ c_1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\lambda}L = \nu\pi \Rightarrow \lambda_\nu = \left(\frac{\nu\pi}{L}\right)^2$$

ΙΔΙΟΖΕΥΓΟΙ $\left(\lambda_\nu, X_\nu(x)\right) = \left(\frac{\nu\pi^2}{L^2}, \cos\frac{\nu\pi x}{L}\right)$

$\nu = 0, 1, 2, \ldots$ (συμπεριλάβαμε και το (λ_0, X_0))

Η λύση είναι

$$u(x,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-k\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}t} \cdot \cos\frac{\nu\pi x}{L}$$

με

$$c_\nu = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{\nu\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} L, & \nu = 0 \\ \frac{2L}{\nu^2\pi^2}\left[(-1)^\nu - 1\right], & \nu = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$\nu = 0, 1, 2, \ldots$

Τελικά

$$u(x,t) = \frac{L}{2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4L}{\nu^2\pi^2} e^{-k\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}t}\cos\frac{\nu\pi x}{L}$$

(περιττός)

(δ) Συνοριακές συνθήκες μη ομογενείς, αναζητούμε λύση της μορφής: $u(x,t) = S(x) + U(x,t)$ όπου

$$\left\{ S'' = 0 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ S(0) = \theta_1 \ , \ S(1) + S'(1) = \theta_2 \right\} \quad (1)$$

και

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t = a^2 U_{xx} \ , \ 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ U(0,t) = U(1,t) + U_x(1,t) = 0 \ , \ t > 0 \\ U(x,0) = u(x,0) - S(0) = \theta_1 - S(x) \end{array} \right\} \quad (2)$$

Από την (1) παίρνουμε:

$$S(x) = \theta_1 + \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)x \qquad (3)$$

Με τη μέθοδο Χ.Μ. το (2) δίνει:

$$U(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin(k_\nu x)\, e^{-a^2 k_\nu^2 t}$$

όπου $k_\nu = \sqrt{\lambda_\nu}$ και ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\sin k_\nu + k_\nu \cos k_\nu = 0 \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\tan k_\nu = -k_\nu} \,. \quad (4)$$

Η (4) λύνεται προσεγγιστικά με τη μέθοδο Newton.

$$k_\nu = y \,, \qquad y_{j+1} = y_j - \frac{F(y_j)}{F'(z)} \,,$$

όπου $z = y_j$ καλύτερη προσέγγιση ή $z = y_0$

και $F(y) = y + \tan y = 0$.

Το y_0 βρίσκεται (προσεγγιστικά) γραφικά.

Έστω ότι από την παραπάνω διαδικασία βρίσκουμε τα k_ν. Τότε

$$U(x,0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu(x,0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin k_\nu x = \theta_1 - S(x) \,.$$

Από την ορθογωνιότητα (γενικευμένη σειρά Fourier) για $t=0$ παίρνουμε:

$$c_\nu = \frac{1}{\|\varphi_\nu\|^2_{L^2}} \int_0^1 \varphi(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx \quad \text{όπου}$$

$$\varphi_\nu(x) = \sin k_\nu x \,, \quad \varphi(x) = \theta_1 - S(x) = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\, x$$

και $\|\varphi_\nu\|^2_{L^2} = \int_0^1 \varphi_\nu^2(x)\, dx$. Τελικά $c_\nu = \dfrac{2(\theta_2 - \theta_1)\cos k_\nu}{k_\nu(1 + \cos^2 k_\nu)}$

και

$$u(x,t) = S(x) + U(x,t) = \theta_1 + \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\, x + 2(\theta_2 - \theta_1) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos k_\nu}{k_\nu(1 + \cos^2 k_\nu)} \cdot e^{-a^2 k_\nu^2 t} \sin k_\nu x \,.$$

③ Να βρείτε τον ημιτονικό και συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier της $f(x)=e^{-ax}$, $a>0$.

ΛΥΣΗ:

(α) Ο ημιτονικός μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$\hat{f}_s(s)=\mathcal{F}_s\{f(x)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin sx\,dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}\sin sx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-ax}e^{isx}\,dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Im}\int_0^\infty e^{(-a+is)x}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Im}\left\{\left(\frac{1}{is-a}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\lim_{\lambda\to\infty}\left[e^{(-a+is)x}\right]_0^\lambda\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Im}\left\{\left(\frac{1}{is-a}\right)\lim_{\lambda\to\infty}\left[e^{-ax}\cdot(\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot(\cos sx+i\sin sx)\right]_0^\lambda\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{-1}{is-a}\right\}=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{s}{s^2+a^2}.$$

(β) $$\hat{f}_c(s)=\mathcal{F}_c\{f(x)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}\cos sx\,dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty e^{(-a+is)x}\,dx=\text{πράξεις όπως στο (α)}=\frac{a}{s^2+a^2}.$$

---

④ Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t=k\,u_{xx}, & -\infty<x<\infty,\ t>0,\\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<\infty,\end{cases}$$

όπου $f(x)=x(L-x)$ για $0\le x\le L$ και $f(x)=0$ για $x>L$ και $x<0$.

ΛΥΣΗ:

Θα χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα Fourier. Υποθέτουμε ότι $|u|$ και $|u_x|$ είναι ολοκληρώσιμες στο $\mathbb{R}$. Η μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών και η αρχή της επαλληλίας δίνει:

$$u(x,t)=\int_0^\infty u_s(x,t)\,ds=\int_0^\infty u(x,t;s)\,ds=$$

$$= \int_0^\infty \left[A(s)\cos sx + B(s)\sin sx\right] e^{-ks^2t}\, ds \quad (1)$$

$$u(x,0) = f(x) = \int_0^\infty \left(A(s)\cos sx + B(s)\sin sx\right)dx \quad (2)$$

↳ Ολοκληρώματα Fourier

$$\Rightarrow A(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^L (xL - x^2)\cos sx\, dx$$

$$\underset{\text{Παρ. Ολοκ.}}{\overset{\text{κατά.}}{=}} -\frac{L}{\pi s^2}(1+\cos Ls) + \frac{2\sin Ls}{\pi s^3} \quad (3)$$

και $B(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^L (xL - x^2)\sin sx\, ds =$

$$\overset{\text{Κ.Π.Ο.}}{=} -\frac{L}{\pi s^2}\sin Ls + \frac{2}{\pi s^3}(1-\cos Ls) \quad (4)$$

Από τις (1)–(4) παίρνουμε τη λύση.

---

(5) Να λυθεί το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<\infty,\ t>0 \\ u(0,t) = \theta/\sqrt{t},\ t>0, & u(x,0)=0,\ 0<x<\infty \\ u(x,t)\to 0 \text{ όταν } x\to\infty, & a>0. \end{cases}$$

ΛΥΣΗ:

Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό Laplace.

$$\mathcal{L}\{u_t - a^2 u_{xx}\} = s\hat{u}(x,s) - \cancel{u(x,0)}^{\,0} - a^2\hat{u}_{xx}(x,s) = 0 \quad \text{ή}$$

$$s\hat{u} - a^2\hat{u}_{xx} = 0 \Rightarrow \hat{u}(x,s) = A(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x} + B(s)e^{+\frac{\sqrt{s}}{a}x}.$$

Επειδή $u\to 0$ όταν $x\to\infty \Rightarrow \hat{u}\to 0$ όταν $x\to\infty$ άρα $B(s)=0$. Συνεπώς $\hat{u}(x,s) = A(s)\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}x\right)$ και $\hat{u}(0,s) = A(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{\theta}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\theta\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$. Οπότε

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{u}(x,s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\theta\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a}x\right)\right\} \underset{\text{ή συνέλιξη}}{\overset{\text{πίνακες}}{=}}$$

$$= \left(\theta/\sqrt{t}\right)e^{-x^2/4a^2t}.$$

---

(6) Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier να λυθεί το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_{xxxx} + u_{tt} = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \, , \; t > 0 \\ u(x,t) \to 0 \, , \quad u_x(x,t) \to 0 \, , \quad |x| \to \infty \\ u(x,0) = f(x) \quad , \quad u_t(x,0) = 0 . \end{cases}$$

ΛΥΣΗ: $\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \hat{u}(s,t)$

$$\mathcal{F}\{u_{xxxx} + u_{tt}\} = (-is)^4 \hat{u}(s,t) + \hat{u}_{tt} = 0 \quad \text{ή}$$

$$\hat{u}_{tt} + s^4 \hat{u} = 0 \qquad \chi(r) = r^2 + s^4 = 0 \text{ ή } r_{1,2} = \pm i s^2$$

$$\hat{u}(s,t) = A(s) \cos s^2 t + B(s) \sin s^2 t \, . \quad (1)$$

$$\hat{u}(s,0) = A(s) = \hat{f}(s) \, , \quad \hat{u}_t(s,0) = 0 = B(s) s^2$$

άρα

$$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s) \cos s^2 t \quad \text{και}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \hat{u}(s,x) \, ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \cdot \hat{f}(s) \cos(s^2 t) \, ds .$$

Σημείωση: Ολοκλήρωμα Fourier.

Αν f κατά τμήματα συνεχής και απολύτως ολοκληρώσιμη τότε

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(s(\tau - x)) \, d\tau \right] ds = \int_0^{\infty} [A(s) \cos sx + B(s) \sin sx] \, ds$$

όπου

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{για } x \text{ σημ. συνέχειας της } f \\ \dfrac{f(x+) + f(x-)}{2} & \text{για } x \text{ σημ. ασυν. της } f . \end{cases}$$

και

$$A(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(s\tau) \, d\tau$$

$$B(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(s\tau) \, d\tau .$$

7) Πρόβλημα χορδής - κιθάρας (με μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών):

Έχουμε πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών (Π.Α.Σ.Τ.)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0<x<L \quad 0<t<\infty \\ \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases} & 0<t<\infty \\ \begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases} & 0\leq x\leq L \end{cases}$$

ΛΥΣΗ: Θεωρώ λύσεις της μορφής:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \quad (1)$$

Αντικαθιστώ την (1) στην εξίσωση κύματος και χωρίζοντας τις μεταβλητές X και T παίρνουμε δύο Σ.Δ.Ε της μορφής:

$$T'' - a^2\lambda T = 0$$
$$X'' - \lambda X = 0$$

όπου λ σταθερά χωρισμού με $-\infty<\lambda<\infty$, (πρόβλημα S-L, $\lambda\in\mathbb{R}$).

Ερευνώντας τις λύσεις των δύο αυτών Σ.Δ.Ε για όλες τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε:

Πιθανές τιμές του λ

$\beta>0$

$\lambda<0$ $(\lambda=-b^2)$	$\lambda=0$	$\lambda>0$ $(\lambda=b^2)$
$T(t)=A\sin(abt)+B\cos(abt)$	$T(t)=At+B$	$T(t)=Ae^{(ab)t}+Be^{-(ab)t}$
$X(x)=C\sin(bx)+D\cos(bx)$	$X(x)=Cx+D$	$X(x)=Ce^{bx}+De^{-bx}$

Έτσι, έχουμε τις λύσεις:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Η ιδέα τώρα είναι να διώξουμε τις λύσεις εκείνες που είναι μη φραγμένες καθώς $t \to \infty$, ή εκείνες που οδηγούν στη μηδενική λύση όταν αντικατασταθούν στις συνοριακές συνθήκες $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

Για αρνητικές τιμές του λ έχουμε μη μηδενικές και φραγμένες λύσεις. Οπότε ο σκοπός μας είναι να βρούμε τις σταθερές A, B, C και D καθώς και την αρνητική σταθερά χωρισμού λ, ώστε η έκφραση

$$(2).\quad u(x,t) = [C\sin(bx) + D\cos(bx)]\,[A\sin(abt) + B\cos(abt)]$$

να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες.

Αυτό θα μας δώσει τη συλλογή όλων των θεμελιωδών ταλαντώσεων της χορδής, και έπειτα την άθροιση αυτών, ώστε το άθροισμα να συμφωνεί με την αρχική συνθήκη όταν $t=0$.

Αντικαθιστώντας τη (2) στην $u(0,t) = u(L,t) = 0$ δίδει:

$$(3)\quad u(0,t) = X(0)\,T(t) = D\,[A\sin(abt) + B\cos(abt)] = 0 \Rightarrow \underline{D=0}$$

$$(4).\quad u(L,t) = X(L)\,T(t) = C\sin(bL)\,[A\sin(abt) + B\cos(abt)] = 0$$

$$\forall t > 0, \quad \Rightarrow \underline{\sin(bL) = 0}$$

Έτσι η σταθερά χωρισμού b πρέπει να ικανοποιεί την

$$\sin(bL) = 0 \Rightarrow \sin(bL) = \sin(n\pi) \Rightarrow bL = n\pi \Rightarrow b_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Παρατηρούμε ότι αν διαλέξουμε $C=0$ στην εξίσωση (4) θα είχαμε $X(x)T(t)=0$.

Έτσι, έχουμε βρει μία ακολουθία λύσεων τανυστικών (με δείκτη n), των:

$$(5)\quad u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[a_n\sin\left(\frac{n\pi a t}{L}\right)+b_n\cos\left(\frac{n\pi a t}{L}\right)\right]$$

$$n=1,2,3,\ldots \qquad \left(\cos\delta_n=\frac{a_n}{R_n},\ \sin\delta_n=\frac{b_n}{R_n}\right)$$

ή

Εύρος του στάσιμου κύματος

$$\frac{n\pi a}{L}=\omega_n \quad \text{γωνιακή συχνότητα}$$

$$u_n(x,t)=\overbrace{R_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}\cos\left[\frac{n\pi a t}{L}-\delta_n\right]$$

$$\left(R_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad \delta_n=\operatorname{Arctan}\frac{b_n}{a_n}\right)$$

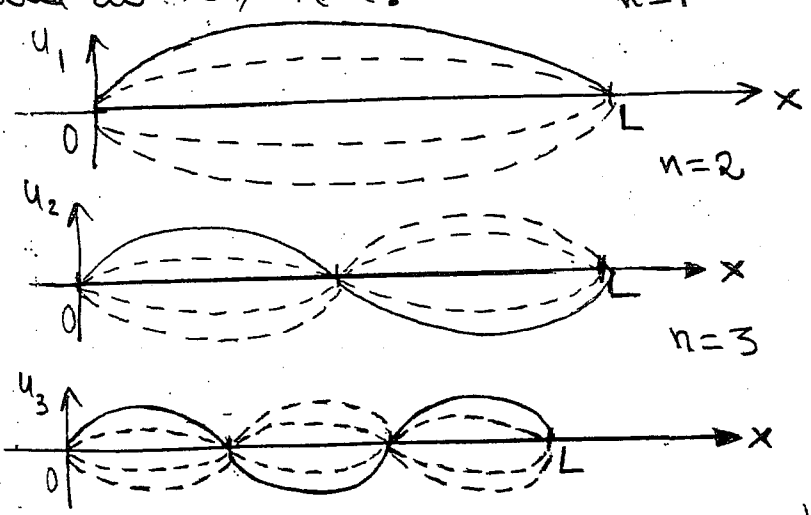
(όπου οι σταθερές a_n, b_n, R_n και δ_n είναι αυθαίρετες).

από τις οποίες όλες ικανοποιούν την εξίσωση κύματος και τις συνοριακές συνθήκες.

Πρέπει να παρατηρήσουμε, ότι η ακολουθία αυτών των συναρτήσεων, δημιουργούν μία οικογένεια κυμάτων, η οποία έχει την ιδιότητα ότι κάθε σημείο του κύματος ταλαντώνται με την ίδια συχνότητα, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

$u_n(x,t)$ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

$u_n(x,t)=0$, τα σημεία γνωστού x καλούνται κόμβοι.



ΣΧΗΜΑ 1. Κύματα $u_n(x,t)=X_n(x)\,T_n(t)$.

Αφού κάθε άθροισμα αυτών των ταλαντώσεων είναι επίσης μία λύση στη μερική διαφορική εξίσωση και στις συνοριακές συνθήκες, προσθέτουμε αυτές μαζί, με τέτοιο τρόπο, ώστε το τελικό άθροισμα να συμφωνεί επίσης με τις αρχικές συνθήκες.

Αυτό θα είναι τότε και η λύση στο πρόβλημά μας.

Αντικαθιστώντας το άθροισμα:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x/L)\left[a_n\sin(n\pi at/L)+b_n\cos(n\pi at/L)\right]$$

στις αρχικές συνθήκες

$$u(x,0)=f(x)$$
$$u_t(x,0)=g(x)$$

μας δίδει τις δύο εξισώσεις:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=f(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=g(x)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ορθογωνιότητας

$$\int_0^L \sin(m\pi x/L)\sin(n\pi x/L)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ L/2, & m=n\end{cases}$$

μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές a_n και b_n

$$(5)\quad \boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\end{aligned}}$$

Άρα η λύση είναι:

$$(6)\quad \boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi x/L)\left[a_n\sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right)+b_n\cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right)\right]}$$

(8)

Βρείτε τη λύση του προβλήματος Dirichlet στο ημιεπίπεδο $y>0$:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<\infty, \quad y>0 \\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<\infty, \\ u \text{ φραγμένη καθώς } y\to\infty & \\ u, u_x \text{ τείνουν στο μηδέν όταν } |x|\to\infty & \end{cases}$$

ΛΥΣΗ: Έστω $\hat{u}(\lambda,y)$ ο μετασχηματισμός Fourier της $u(x,y)$ ως προς τη μεταβλητή x. Τότε:

$$\mathcal{F}\{u\} = \hat{u}(\lambda,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\, e^{i\lambda x}\, dx$$

Από τη γνωστή σχέση $\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (-i\lambda)^n \mathcal{F}\left[f(t)\right]$, $n=0,1,2,\ldots$

έχουμε:

$$\mathcal{F}[u_{xx}] = (-i\lambda)^2 \mathcal{F}[u] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[u_{xx}] = -\lambda^2\, \hat{u}(\lambda,y) \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\mathcal{F}[u_{yy}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{yy}\, e^{i\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)\, e^{i\lambda x}\, dx}_{\hat{u}(\lambda,y)}\Big]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(\lambda,y) \Rightarrow \mathcal{F}[u_{yy}] = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(\lambda,y) \quad (2)$$

Εφαρμόζοντας στην εξίσωση Laplace το μετασχηματισμό Laplace, παίρνουμε:

$$\mathcal{F}[u_{xx}+u_{yy}]=0 \xRightarrow{\mathcal{F}\ \text{γραμμικός}} \mathcal{F}[u_{xx}]+\mathcal{F}[u_{yy}]=0 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow[(2)]{(1)} \boxed{\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(\lambda,y) - \lambda^2\,\hat{u}(\lambda,y) = 0} \quad (3)$$

Η (3) αποτελεί συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς y, η λύση της είναι:

$$\hat{u}(\lambda,y) = A(\lambda)\, e^{\lambda y} + B(\lambda)\, e^{-\lambda y} \quad (4)$$

Αφού η πρέπει να είναι φραγμένη καθώς $y \to \infty$, έπεται ότι και η $\hat{u}(\lambda,y)$ πρέπει επίσης να είναι φραγμένη καθώς $y \to \infty$.

Έτσι
- για $\lambda > 0$ πρέπει $A(\lambda)$ να μηδενίζεται και $\underline{\underline{\hat{u}(\lambda,0) = B(\lambda)}}$ από (4)
- για $\lambda < 0$ πρέπει $B(\lambda)$ να μηδενίζεται και $\underline{\underline{\hat{u}(\lambda,0) = A(\lambda)}}$

Έτσι για οποιαδήποτε λ, έχουμε:

$$\boxed{\hat{u}(\lambda,y) = \hat{u}(\lambda,0)\, e^{-|\lambda| y}} \quad (5)$$

Όμως $\hat{u}(\lambda,0) = \mathcal{F}[u(x,0)] = \underbrace{\mathcal{F}[f(x)]}_{\hat{f}(\lambda)}$

Από τη δοθείσα συνάτη βρίσκουμε ότι $\hat{u}(\lambda,0) = \hat{f}(\lambda)$

Συνεπώς η (5) γράφεται $\boxed{\hat{u}(\lambda,y) = \hat{f}(\lambda)\, e^{-|\lambda| y}}$ (6)

$$(6) \Longrightarrow \hat{u}(\lambda,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, e^{-|\lambda| y}\, dx$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $\hat{u}(\lambda,y)$ δίνει:

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-|\lambda| y}\, e^{i\lambda \xi}\, d\xi \right] e^{-i\lambda x}\, d\lambda$$

$$= \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda[i(\xi - x)] - |\lambda| y}\, d\lambda}$$

(9)

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος Neumann:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<\infty, \ y>0 \\ u_y(x,0)=g(x), & -\infty<x<\infty \\ u \text{ φραγμένη καθώς } y\to\infty \\ u, u_x \text{ μηδενίζονται για } |x|\to\infty \end{cases}$$

ΛΥΣΗ: Έστω $v(x,y)=u_y(x,y)$

τότε $u(x,y)=\int_\lambda^y v(x,n)\,dn$, (1) λ αυθαίρετη σταθερά.

Το Neumann πρόβλημα γίνεται:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx}+u_{yy}\right)=0$$

$$v(x,0)=u_y(x,0)=g(x)$$

Έτσι αυτό είναι το πρόβλημα Dirichlet, η λύση του οποίου (βλ. προηγ. άσκηση) δίνεται από:

$$v(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda[i(\xi-x)]-|\lambda|y}\,d\lambda$$

Άρα η (1) $\Rightarrow$ $\boxed{u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_\lambda^y\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda[i(\xi-x)]-|\lambda|n}\,dn}$

(10) Π/ 20.–

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t), & 0<x<\infty \quad t\geq 0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=0 & \text{όπου } f(t)=f_0 \text{ (μία σταθερά)} \\ u(0,t)=0 & \text{ή} \\ u(0,t)=0 & f(t)=\cos\omega t,\ \omega \text{ σταθερά} \\ u_x(x,t)\to 0, \text{ καθώς } x\to\infty \end{cases}$$

ΛΥΣΗ: Έστω (x,s) ο μετασχηματισμός Laplace της $u(x,t)$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, προκύπτει:

$$U_{xx} - (s^2/c^2)\,U = -F(s)/c^2 \quad (1)$$

όπου $$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Η λύση αυτής της δ.ε. (1) είναι:

$$U(x,s) = Ae^{sx/c} + Be^{-sx/c} + \left[F(s)/s^2\right].$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι: $U(0,s)=0$

και $$\lim_{x\to\infty} U_x(x,s)=0$$

Λόγω της δεύτερης συνθήκης έχουμε $A=0$.
Εφαρμόζοντας την πρώτη συνθήκη προκύπτει

$$U(0,s) = B + \left[F(s)/s^2\right] = 0,$$

οπότε:

$$U(x,s) = \left[F(s)/s^2\right]\left[1-e^{-sx/c}\right]$$

α) Όταν $f(t)=f_0$, μία σταθερά,

$$U(x,s)=f_0\left(\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s^3}e^{-sx/c}\right)$$

ο αντίστροφος του οποίου είναι:

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{f_0}{2}\left[t^2-\left(t-\frac{x}{c}\right)^2\right], & \text{όταν } t\geq\frac{x}{c}\\ \left(f_0/2\right)t^2, & \text{όταν } t\leq\frac{x}{c}.\end{cases}$$

b) Όταν $f(t)=\cos\omega t$, όπου ω μία σταθερά,

$$F(s)=\int_0^\infty \cos\omega t\, e^{-st}dt = s/(\omega^2+s^2)$$

Οπότε θα 'χουμε:

$$U(x,s)=\frac{\cancel{s}}{(\omega^2+s^2)\,s^{\cancel{2}}}\left[1-e^{-sx/c}\right]\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\boxed{U(x,s)=\frac{1}{s(\omega^2+s^2)}\left[1-e^{-sx/c}\right]}\qquad(2)$$

Με τη μέθοδο σε ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε:

$$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}=\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]$$

Οπότε $$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)=\frac{2}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

Αν συμβολίσουμε με $\psi(t)=\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$, τότε ο αντίστροφος της εξ. (2) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{2}{\omega^2}\left[\psi(t)-\psi\left(t-\frac{x}{c}\right)\right], & \text{όταν } t\geq x/c\\ \frac{2}{\omega^2}\psi(t), & \text{όταν } t\leq x/c.\end{cases}$$

11) Εξίσωση Υπερβολικού τύπου (εξίσωση κύματος). πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty \quad 0 < t < \infty \\ \begin{cases} u(x,0) = \sin x, \\ u_t(x,0) = 0, \end{cases} & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

ΛΥΣΗ: $\boxed{\text{ΒΗΜΑ 1ο}}$ Αντικαθιστώ τις ανεξάρτητες μεταβλητές x και t από τις χωρο-χρονικές συντεταγμένες (ξ, η)

με
$$\xi = x + ct$$
$$\eta = x - ct$$
(Χαρακτηριστικές καμπύλες)

Τότε η $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ μετασχηματίζεται στην

$$\boxed{u_{\xi\eta} = 0}$$
(δηλ. ανάγωγή στη 1η κανονική μορφή)

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα, αφού μία απλή εφαρμογή του κανόνα αλυσίδας δίδει:

$$u_x = u_\xi + u_\eta$$
$$u_t = c(u_\xi - u_\eta)$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$
$$u_{tt} = c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$$

Αντικαθιστώντας τα u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt} στην Κυματική εξίσωση παίρνουμε

$$\underline{u_{\xi\eta} = 0}$$

$\boxed{\text{ΒΗΜΑ 2ο}}$ Αυτή η εξίσωση μπορεί να επιλυθεί με δύο απλές ολοκληρώσεις (πρώτα ως προς ξ και έπειτα ως προς η).

$$u_\eta(\xi, \eta) = \phi(\eta)$$

και $\boxed{u(\xi, \eta) = \phi(\eta) + \psi(\xi)}$, $\phi(\eta)$ παράγουσα της $\varphi(\eta)$.

οποιαδήποτε συνάρτηση του ξ

γενική λύση της $u_{\xi\eta} = 0$.

(ϕ, ψ αυθέρετες συναρτήσεις του C^2. Αν η "αυθεύνης" δίδη τότε τα ϕ, ψ μπορεί να ανήκουν στο C^p με $p < 2$).

ΒΗΜΑ 3ο: Για να βρω την γενική λύση στην $u_{tt}=c^2u_{xx}$

ανακαλούμε

$$\xi = x+ct$$
$$\eta = x-ct$$

στην $u(\xi,\eta)=\varphi(\eta)+\psi(\xi)$

έτσι,

$$\boxed{u(x,t)=\varphi(x-ct)+\psi(x+ct)} \quad (1)$$

γενική λύση της wave equation.
Αρκεί να βρω τις συναρτήσεις φ, ψ.

ΒΗΜΑ 4ο: (Ανακαλούσα γενική λύση στις αρχικές συνθήκες)

$$u(x,0)=\sin x = f(x)$$
$$u_t(x,0)=0 = g(x)$$

Οπότε:

$$u(x,0)=\begin{cases}\varphi(x)+\psi(x)=\sin x \overset{f(x)}{=} & (2)\\ -c\varphi'(x)+c\psi'(x)=0 & (3)\end{cases}$$
$$u_t(x,0)=$$

Ολοκληρώνουμε τη δεύτερη εξίσωση, για να πάρουμε τις $\varphi(x), \psi(x)$

Ολοκληρώνοντας τη (3) από x_0 έως x, παίρνουμε:

$$(4) \quad -c\varphi(x)+c\psi(x)=\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi + K$$

Αν λύσουμε αλγεβρικά ως προς $\varphi(x)$ και $\psi(x)$ από την (2) και (4) έχουμε ότι:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi \quad (5)$$

και

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi \quad (6)$$

Η (1) από (5) και (6) γίνεται:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} g(\xi)\,d\xi$$

$$+ \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi \overset{*}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi} \quad (F)$$

$$* \left(-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} g(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi = +\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x_0} g(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{2c}\left[\int_{x-ct}^{x_0} + \int_{x_0}^{x+ct}\right] = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi \right).$$

Η λύση (F) καλείται λύση <u>D'Alembert</u> στην εξίσωση κύματος του προβλήματός μας.

Στην άσκησή μας για $f(x)=\sin x$, $g(x)=0$, η λύση είναι:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x-ct)+\sin(x+ct)\right] + \cancel{\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 0\,d\xi}^{\,0} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sin(x-ct)+\sin(x+ct)\right]$$

Αυτό αντιστοιχεί στην κίνηση ενός αρχικού ημιτονοειδούς κύματος.

(12) Αναπαράσταση της λύσης D'Alembert στο xt-επίπεδο.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty \\ \begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x), \end{cases} & -\infty < x < \infty. \end{cases} \qquad (1)$$

Αποδείξαμε σε προηγούμενη άσκηση ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (1) δίδεται από:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi \qquad (2)$$

Θα αναπαραστήσουμε τη λύση αυτή στο xt-επίπεδο στις εξής δύο περιπτώσεις: α) $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$

και β) $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = g(x)$.

<u>Περίπτωση α)</u> Υποθέτουμε ότι η χορδή έχει αρχικές συνθήκες:

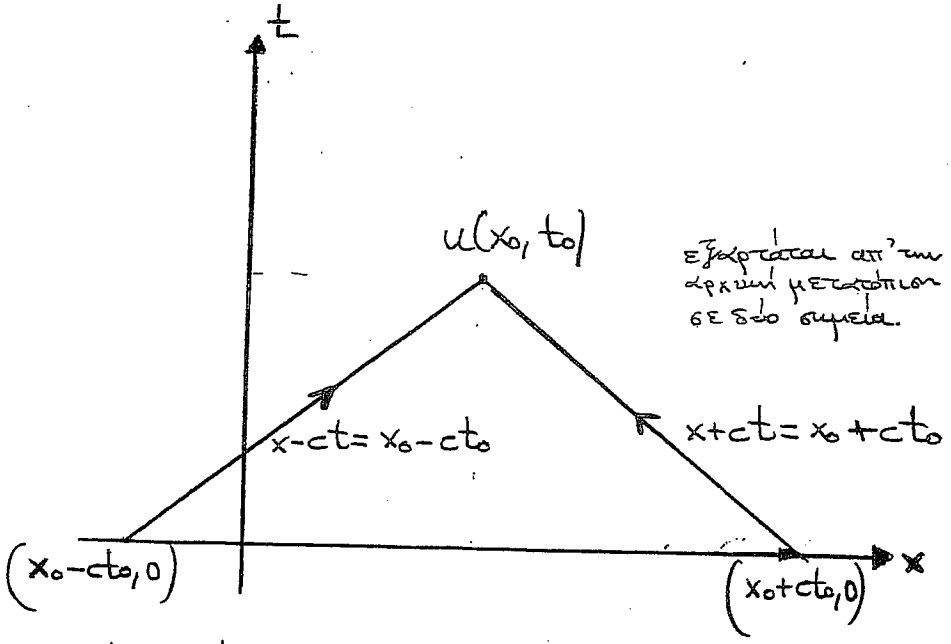
$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_t(x,0) = 0$$

Εδώ, η λύση D'Alembert είναι:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right]$$

και η λύση u στο σημείο (x_0, t_0) φαίνεται στο σχήμα 1. Στο σχήμα φαίνονται και οι χαρακτηριστικές καμπύλες.

$$x - ct = x_0 - ct_0$$
$$x + ct = x_0 + ct_0$$

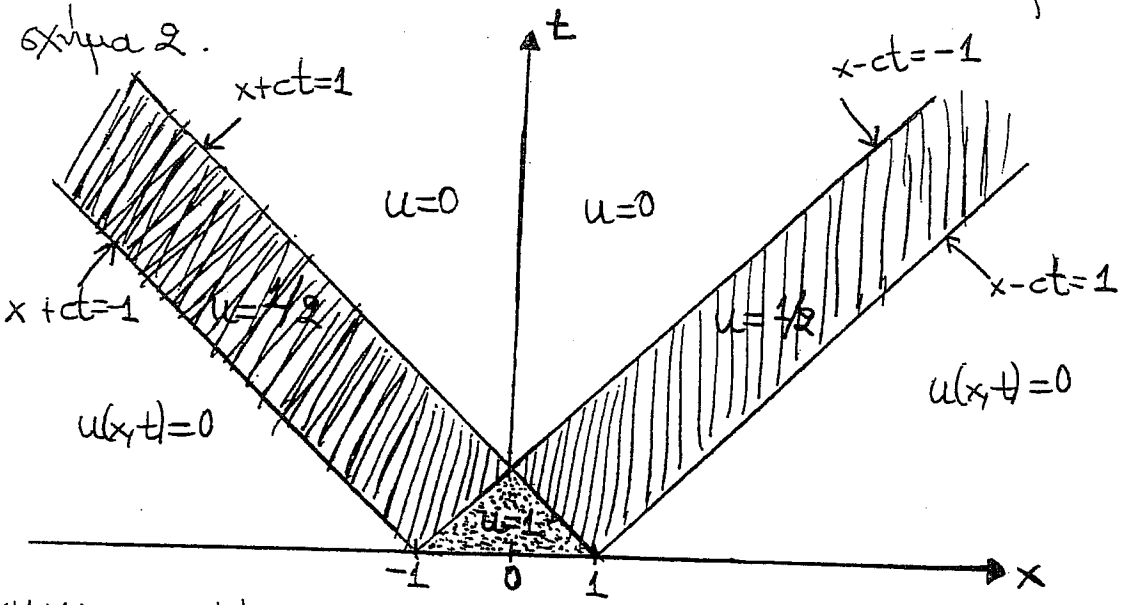


ΣΧΗΜΑ 1. Αναπαράσταση της $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]$ στο xt-επίπεδο.

Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση αυτή, το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}, & -\infty<x<\infty \quad 0<t<\infty \\ u(x,0)=\begin{cases}1, & \text{αν } -1<x<1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

δίνει τη λύση στο xt-επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα 2.



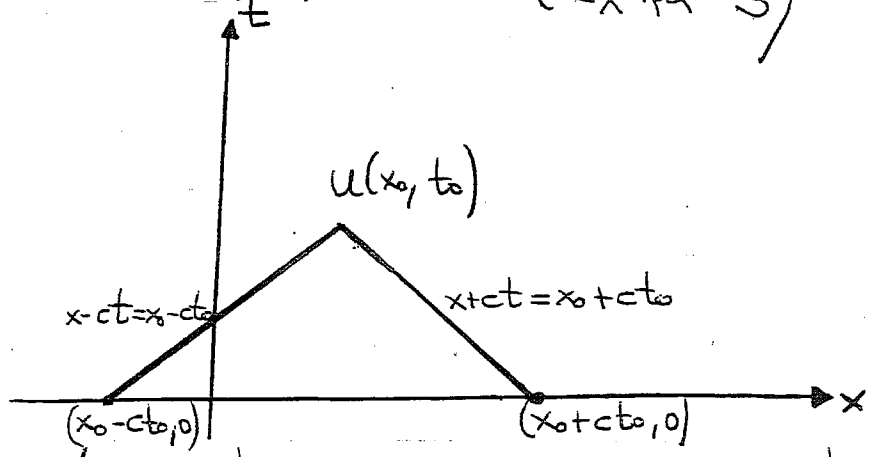
ΣΧΗΜΑ 2. Λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο xt-επίπεδο

<u>Περίπτωση b)</u> Θεωρούμε τώρα τις αρχικές συνθήκες:

$$u(x,0)=0$$
$$u_t(x,0)=g(x)$$

Εδώ, η λύση είναι: $u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi$

και οπότε η λύση u στο (x_0,t_0) παρίσταται από την ολοκλήρωση της αρχικής ταχύτητας μεταξύ των x_0-ct_0 και x_0+ct_0 στην αρχική γραμμή $t=0$ (Σχήμα 3)

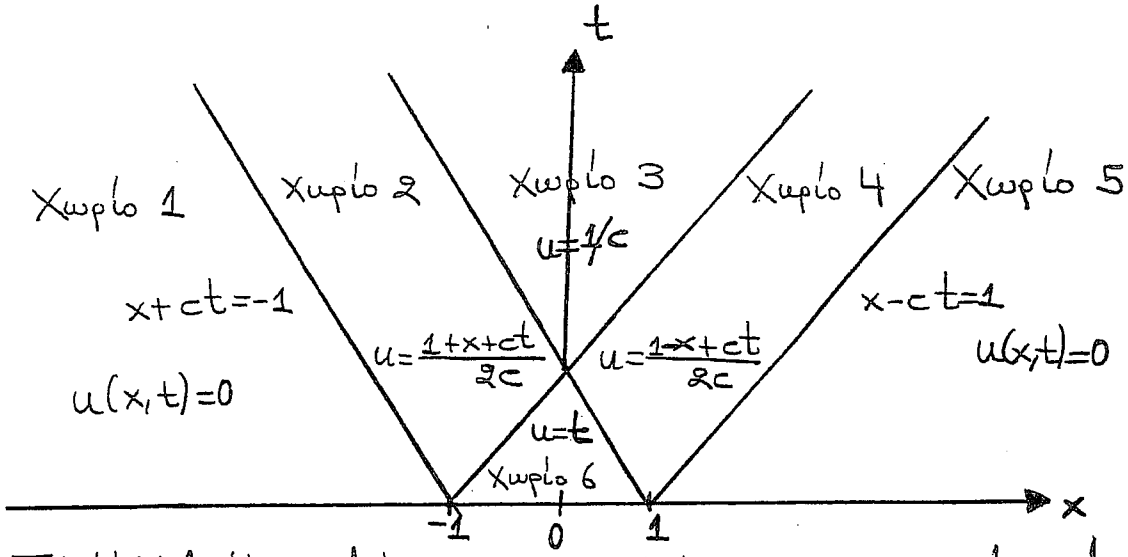


ΣΧΗΜΑ 3. Αναπαράσταση της αρχικής ταχύτητας στο xt-επίπεδο.

Χρησιμοποιώντας πάλι την αναπαράσταση αυτή, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}, & -\infty<x<\infty \quad 0<t<\infty \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=\begin{cases}1, & -1<x<1 \\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} \end{cases}$$

έχει μια λύση στο xt-επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα 4 που ακολουθεί.



ΣΧΗΜΑ 4. Λύση του προβλήματος στο xt-επίπεδο.

Για να βρούμε τη μετατόπιση, υπολογίζουμε τη λύση D'Alembert

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi$$

$$=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 0\,d\xi = 0, \quad \text{Χωρίο 1}$$

$$=\frac{1}{2c}\int_{-1}^{x+ct} d\xi = \frac{1+x+ct}{2c}, \quad \text{Χωρίο 2}$$

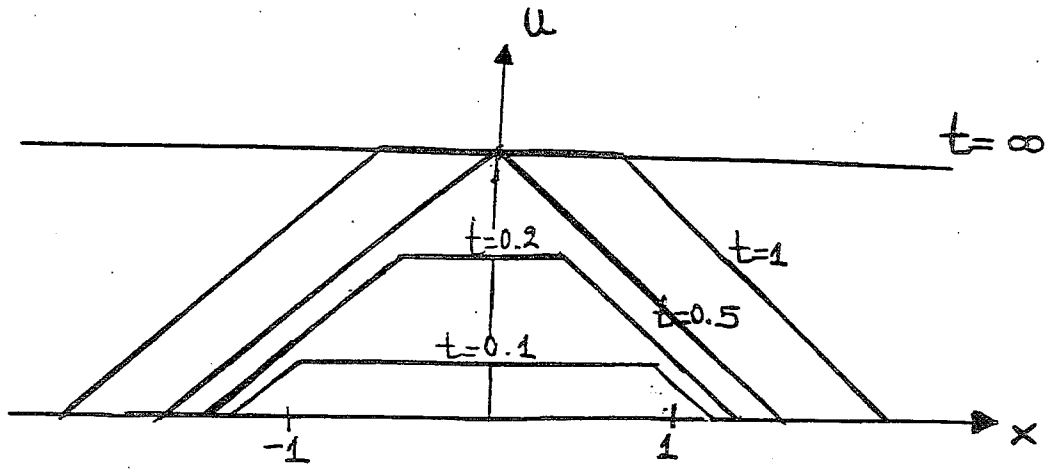
$$=\frac{1}{2c}\int_{-1}^{1} d\xi = \frac{1}{c}, \quad \text{Χωρίο 3}$$

$$=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{1} d\xi = \frac{1-x+ct}{2c}, \quad \text{Χωρίο 4}$$

$$=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 0\,d\xi = 0, \quad \text{Χωρίο 5}$$

$$=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} d\xi = t, \quad \text{Χωρίο 6}$$

Η λύση σχεδιάζεται για διάφορες τιμές του t στο σχήμα 5.



ΣΧΗΜΑ 5. Λύση του προβλήματος για διάφορες τιμές του t.

Έτσι ολοκληρώνεται η ανακατασκευή της λύσης D'Alembert στο xt-επίπεδο.

---

(13) Να λυθεί το πρόβλημα: $u_{tt}=u_{xx}$, $0<x<\infty$, $t>0$, $u_x(0,t)=-1$, $u(x,t)\to 0$ όταν $x\to\infty$, $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$.

ΛΥΣΗ: Με χρήση μετασχηματισμού Laplace παίρνουμε: $\hat{u}(x,s)=\mathcal{L}\{u(x,t)\}=A(s)\,e^{-xs}$

$\hat{u}_x(x,s)=-A(s)\,e^{-xs}\,s$, $\hat{u}_x(0,s)=-A(s)\,s$ δεδομένα

$\hat{u}_x(0,t)=-\mathcal{L}\{1\}=-\frac{1}{s} \Rightarrow A(s)=\frac{1}{s^2}$ συνεπώς

$\hat{u}(x,s)=\frac{1}{s^2}e^{-xs}$. Τ $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}\{\hat{u}(x,s)\}=$

$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}e^{-xs}\right\}\overset{(*)}{=}[H(t-x)](t-x)$.

(*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t$, $\mathcal{L}^{-1}\{H_a(t)\,\hat{f}(t-a)\}=e^{-as}\hat{f}(s)$

η συνάρτηση Heaviside.

(14) Να λυθεί το πρόβλημα για την εξίσωση Poisson:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=-xy, & 0<x<\pi,\ 0<y<\pi, \\ u(0,y)=u(\pi,y)=u(x,0)=0, & u(x,\pi)=\theta. \end{cases}$$

<u>ΛΥΣΗ</u>: Αναζητούμε λύση της μορφής $u(x,y)=w(x,y)+z(x,y)$ όπου

$$(1)\begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=0, & 0<x<\pi,\ 0<y<\pi \\ w(0,y)=w(\pi,y)=w(x,0)=0, & w(x,\pi)=\theta \end{cases}$$

και

$$(2)\begin{cases} z_{xx}+z_{yy}=-xy \\ z(0,y)=z(\pi,y)=z(x,0)=z(x,\pi)=0 \end{cases}$$

Το (1) λύνεται με μέθοδο Χ.Μ. και δίνει ως λύση την

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \sinh ny$$

όπου

$$a_n \sinh n\pi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\theta \sin nx\,dx=\frac{2\theta}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] \qquad n=1,2,\dots$$

τελικά

$$w(x,y)=\sum_{\substack{n=1 \\ (n\ \text{περιττός})}}^{\infty}\frac{4\theta}{n\pi}\,\frac{\sinh ny}{\sinh n\pi}\sin nx \qquad (3)$$

Η z βρίσκεται με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων για την $-\Delta$.

Αναζητούμε λύση της μορφής

$$z(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm}\varphi_{nm}(x,y) \quad \text{όπου}$$

$\varphi_{n,m}$ ιδιοσυναρτήσεις της $-\Delta$ δηλ. ικανοποιούν το πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$(4)\begin{cases} \Delta\varphi+\lambda\varphi=\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\lambda\varphi=0 & 0<x<\pi,\ 0<y<\pi \\ \varphi=0 \text{ στο σύνορο} \end{cases}$$

Συνεπώς παίρνουμε

$$\Delta Z = -xy = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm} \Delta \varphi_{nm} = \sum_{n,m=1}^{\infty} -c_{nm} \lambda_{nm} \varphi_{nm}.$$

φ_{nm} ορθογώνιες, άρα από την

$$xy = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm} \lambda_{nm} \varphi_{nm}$$ παίρνουμε

$$c_{nm} \lambda_{nm} = \frac{1}{\|\varphi_{nm}\|_{L^2}^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} xy\, \varphi_{nm}(x,y)\, dx dy \quad (5)$$

όπου

$$\|\varphi_{nm}\|_{L^2}^2 = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \varphi_{nm}^2(x,y)\, dxy. \quad (6)$$

Βρίσκουμε τα ιδιοζεύγη $(\lambda_{nm}, \varphi_{nm})$.

$\varphi(x,y) = X(x)\Psi(y)$ και από την (4) παίρνουμε:

$$X''\Psi + X\Psi'' + \lambda X\Psi = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{X''}{X} + \frac{\Psi''}{\Psi} + \lambda = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{\Psi''}{\Psi} - \lambda = -\mu \Rightarrow \left.\begin{array}{l} X'' + \mu X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{array}\right\} (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Psi'' + k\Psi = 0 \\ \Psi(0) = \Psi(\pi) = 0 \end{array}\right\} (8) \quad \text{με } k = \lambda - \mu$$

Το (7) δίνει $\mu_n = n^2$, $X_n(x) = \sin(nx)$ και ομοίως το (8) δίνει $k_m = \lambda - \mu_n = m^2$ και $\Psi_m(y) = \sin(my)$.

Άρα $(\lambda_{nm}, \varphi_{nm}) = (n^2+m^2, \sin(nx)\sin(my))$.

Τελικά οι (5), (6) δίνουν $c_{nm} = \frac{(-1)^{n+m}4}{nm(n^2+m^2)}$ και

$$u(x,y) = w(x,y) + Z(x,y) = \frac{4\theta}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{\sinh ny}{\sinh n\pi}\cdot \sin nx +$$

$$+ 4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{nm(n^2+m^2)} \sin(nx)\sin(my).$$

(15) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx}+u_{yy}), \quad 0<x<a, \quad 0<y<\beta \\ u(0,y)=u(a,y)=u(x,0)=u(x,\beta)=0 \\ u(x,y,0)=f(x,y), \quad u_t(x,y,0)=g(x,y) \end{cases}$$

ΛΥΣΗ:

Μέθοδος Χ.Μ., $u(x,y,t)=T(t)W(x,y)$

$$T''W = c^2 T \Delta W \quad \text{ή} \quad \frac{T''}{c^2 T} = \frac{\Delta W}{W} = -\lambda$$

σταθ. ορόζ.

$$T'' + c^2\lambda T = 0 \qquad (1)$$

$$(2)\begin{cases} \Delta W + \lambda W = 0 \\ W(0,y)=W(a,y)=W(x,0)=W(x,\beta)=0 \end{cases}$$

Πρόβλημα ιδιοτιμών για την $-\Delta$. Όπως στο προηγούμενο πρόβλημα (14) βρίσκουμε τα ιδιοζεύγη:

$$(\lambda_{nm}, W_{nm}) = \left(\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2, \ \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{\beta}\right)$$

Τα $\lambda_{nm}>0$, $n,m=1,2,\dots$.

Στη συνέχεια από το (1) παίρνουμε, $k_{nm}=\sqrt{\lambda_{nm}}>0$, $c>0$,

$$T_{nm}(t) = A_{nm}\cos(c\,k_{nm}t) + B_{nm}\sin(c\,k_{nm}t).$$

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm}(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{nm}(t)\,W_{nm}(x,y) \quad (3)$$

$$u(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\,W_{nm}(x,y) = f(x,y) \quad (4)$$

$$u_t(x,y,0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm} C k_{nm} W_{nm}(x,y) = g(x,y) \quad (5)$$

$$\Longrightarrow \quad A_{nm} = \frac{1}{\|W_{nm}\|_{L^2}^2} \int_0^{\alpha}\int_0^{\beta} f(x,y)\, W_{nm}(x,y)\, dx\, dy \quad (6)$$

και $$B_{nm} C k_{nm} = \frac{1}{\|W_{nm}\|_{L^2}^2} \int_0^{\alpha}\int_0^{\beta} g(x,y)\, W_{nm}(x,y)\, dx\, dy \quad (7)$$

Από τις (3)—(7) παίρνουμε τη λύση του προβλήματος,

$$\|W_{nm}\|_{L^2}^2 = \int_0^{\alpha}\int_0^{\beta} W_{nm}^2(x,y)\, dx\, dy \, .$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ
ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΣΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ FOURIER

(Προσοχή στον ορισμό του μετ. Fourier)

(1) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}(\xi)$ των συναρτήσεων (α) $f(x) = e^{-|x|}$ και (β) $f(x) = e^{-x^2}$.

Λύση

(α) $\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-ix\xi}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-ix\xi}\, dx =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\xi)x}\, dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-(1+i\xi)x}\, dx\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1+i\xi}{1+\xi^2} + \frac{1-i\xi}{1+\xi^2}\right] dx =$
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}$.

(β) $\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [\cos(x\,\xi) + i\,\sin(x\,\xi)]\, dx =$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cos(x\,\xi)\, dx$
(εφόσον η συνάρτηση $x \to e^{-x^2}\cos(x\,\xi)$ είναι άρτια και η $x \to e^{-x^2}\sin(x\,\xi)$ είναι περιττή)
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\xi^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\xi^2/4}$.

(2) Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης θερμότητας $u_t = u_{xx}$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $u(x,0) = e^{-x^2}$, $-\infty < x < \infty$.

Λύση

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier ως προς x και στα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} u_t(x,t)\, e^{-ix\xi}\, dx = -\xi^2\, \widehat{u}(\xi,t)$, όπου $\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-ix\xi}\, dx$. Επομένως ισοδύναμα ισχύει ότι: $\frac{d}{dt}\widehat{u}(\xi,t) = -\xi^2\, \widehat{u}(\xi,t)$ και επομένως $\widehat{u}(\xi,t) = C(\xi)\, e^{-\xi^2 t}$. Εφόσον όμως $\widehat{u}(\xi,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\, e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\xi^2/4}$ προκύπτει ότι $C(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\xi^2/4}$ και άρα $\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-(t+1/4)\,\xi^2}$. Τελικώς παίρνουμε ότι η λυση είναι η
$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi,t)\, e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+1/4)\,\xi^2} e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+1/4)\,\xi^2} \cos(x\,\xi)\, d\xi$
$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t+1/4}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$.

(3) Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης Laplace $u_{xx} + u_{yy} = u$, $-\infty < x < \infty$, $y > 0$ η οποία ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $u(x,0) = e^{-x^2}$ και επιπλέον $u(x,y) \to 0$ καθώς $x^2 + y^2 \to \infty$.

Λύση

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier ως προς x της εξίσωσης προκύπτει ότι

$$-\xi^2\, \widehat{u}(\xi,y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{yy}(x,y)\, e^{-ix\xi}\, dx = \widehat{u}(\xi,y),$$

όπου $\widehat{u}(\xi,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)\, e^{-ix\xi}\, dx$, ή ισοδύναμα $-\xi^2\, \widehat{u}(\xi,y) + \frac{d^2}{dy^2}\widehat{u}(\xi,y) = \widehat{u}(\xi,y)$ και

επομένως καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση $\frac{d^2}{dy^2}\widehat{u}(\xi,y) = (\xi^2+1)\widehat{u}(\xi,y)$. Η λύση της τελευταίας εξίσωσης είναι $\widehat{u}(\xi,y) = A(\xi)\, e^{-\sqrt{\xi^2+1}\,y} + B(\xi)\, e^{\sqrt{\xi^2+1}\,y}$. Εφόσον όμως $\lim_{|y|\to\infty}\widehat{u}(\xi,y) = \lim_{|y|\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)\, e^{-ix\xi}\, dx = 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $B(\xi)=0$. Επίσης εφόσον $\widehat{u}(\xi,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\, e^{-ix\xi}\, dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\xi^2/4}$ προκύπτει ότι $A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\xi^2/4}$. Επομένως $\widehat{u}(\xi,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\xi^2/4}\, e^{-\sqrt{\xi^2+1}\,y}$ και άρα

$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\sqrt{\xi^2+1}\,y}\, e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\xi^2/4}\, e^{-\sqrt{\xi^2+1}\,y}\, \cos(x\,\xi)\, d\xi$, όπου έχει χρησιμοποιηθεί ότι η $\xi \to \cos(\xi x)$ είναι άρτια και η $\xi \to \sin(\xi x)$ περιττή συνάρτηση.

(4) Να βρεθεί ο ημιτονικός μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}_s(\xi)$ των συναρτήσεων $e^{-\alpha x}$ (όπου $\alpha > 0$) και $x\, e^{-x}$.

Λύση

(i) $\mathcal{F}_s(e^{-\alpha x})(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, \sin(x\,\xi)\, dx = Im\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, e^{ix\xi}\, dx\right) = Im\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{(-\alpha+i\xi)x}\, d\xi\right)$
$= Im\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{-\alpha+i\xi}\, e^{(-\alpha+i\xi)x}\big|_0^{\infty}\right) = Im\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha-i\xi}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{\alpha^2+\xi^2}$.

(ii) $\mathcal{F}_s(x\, e^{-x})(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} xe^{-x}\, \sin(x\,\xi)\, dx = Im\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} xe^{(-1+i\xi)x}\, dx\right)$
$= Im\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[x\,\frac{1}{-1+i\xi}\, e^{(-1+i\xi)x}\big|_0^{\infty} + \frac{1}{1-i\xi}\int_0^{\infty} e^{(-1+i\xi)x}\, dx\right]\right) = Im\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1-i\xi}\frac{1}{-1+i\xi}\, e^{(-1+i\xi)x}\big|_0^{\infty}\right)$
$= Im\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{(1-i\xi)^2}\right) = Im\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(1+i\xi)^2}{(1+\xi^2)^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}$.

(5) Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης θερμότητας $u_t = u_{xx}$, $0 < x < \infty$, $t > 0$, που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $u(x,0) = e^{-x}$, $x > 0$ και επιπλέον μία από τις συνοριακές συνθήκες: (i) $u(0,t) = 0$, (ii) $u_x(0,t) = 0$.

Λύση

(i) Παίρνοντας τον ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier ως προς x της εξίσωσης προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_s(u(x,t))(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\xi\, u(0,t) - \xi^2\mathcal{F}_s(u(x,t))(\xi)$$

ή ισοδύναμα $\frac{d}{dt}\mathcal{F}_s(u(x,t))(\xi) = -\xi^2\mathcal{F}_s(u(x,t))(\xi)$, επομένως $\mathcal{F}_s(u(x,t))(\xi) = A(\xi)\, e^{-\xi^2 t}$. Επίσης $\mathcal{F}_s(u(x,0))(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u(x,0)\, \sin(x\,\xi)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x}\, \sin(x\,\xi)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{1+\xi^2}$ (βλέπε άσκηση 4(i)). Επομένως $A(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{1+\xi^2}$ και άρα $\mathcal{F}_s(u(x,t))(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{1+\xi^2}\, e^{-\xi^2 t}$. Οπότε $u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{1+\xi^2}\, e^{-\xi^2 t}\, \sin(x\,\xi)\, d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\xi^2 t}\, \sin(x\,\xi)\, d\xi$.

(ii) Παίρνοντας τώρα τον συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier ως προς x της εξίσωσης προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, u_x(0,t) - \xi^2\,\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi),$$

ή ισοδύναμα $\frac{d}{dt}\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi) = -\xi^2\,\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi)$, επομένως $\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi) = A(\xi)\, e^{\xi^2 t}$. Επίσης $\mathcal{F}_c(u(x,0))(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u(x,0)\, \cos(x\,\xi)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}$, (χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα όμοιο μ' αυτό που χρησιμοποιήθηκε στην άσκηση 4(i), θεωρώντας όμως αντί για το φανταστικό το πραγματικό μέρος). Οπότε $A(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}$ και άρα $\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}\, e^{\xi^2 t}$. Τελικώς από τον τύπο της αντιστροφής προκύπτει ότι $u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\xi^2}\, e^{-\xi^2 t}\, \cos x\,\xi\, d\xi$.

(6) Αν η u ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ στο τερτατημόριο $x \geq 0$, $y \geq 0$, τις συνοριακές συνθήκες $u(0,y) = 0$, $y \geq 0$, $u(x,0) = f(x)$, $x \geq 0$ καθώς και τη συνθήκη

$u(x,y) \to 0$, $x^2+y^2 \to \infty$, δείξτε, χρησιμοποιώντας τον ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier ως προς x, ότι

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\left[\frac{1}{y^2+(\xi-x)^2} - \frac{1}{y^2+(\xi+x)^2}\right] d\xi.$$

Λύση

Παίρνοντας τον ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier ως προς x της εξίσωσης, προκύπτει ότι

$$-\xi^2\mathcal{F}_s(u(x,y))(\xi) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\xi\,u(0,y) + \frac{d^2}{dy^2}\mathcal{F}_s(u(x,y))(\xi) = 0,$$

ή ισοδύναμα $\frac{d^2}{dy^2}\mathcal{F}_s(u(x,y))(\xi) = \xi^2\mathcal{F}_s(u(x,y))(\xi)$, επομένως $\mathcal{F}_s(u(x,y))(\xi) = A(\xi)\,e^{\xi y} + B(\xi)\,e^{-\xi y}$. Εφόσον όμως $\lim_{y\to\infty}\mathcal{F}_s(u(x,y))(\xi) = \lim_{y\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,y)\,\sin(x\,\xi)\,dx = 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $A(\xi)=0$. Επίσης εφόσον $\mathcal{F}_s(u(x,0))(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\,\sin(x\,\xi)\,dx$ επιλέγουμε $B(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\,\sin(x\,\xi)\,dx$. Επομένως
$u(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty[\int_0^\infty f(t)\,\sin(\xi\,t)\,dt]\,e^{-\xi y}\,\sin(\xi\,x)\,d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty[\int_0^\infty \sin(\xi\,t)\,\sin(\xi\,x)\,d\xi]\,f(t)\,dt$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\left(\int_0^\infty \frac{1}{2}\,e^{-\xi y}\{\cos[\xi(t-x)] - \cos[\xi(t+x)]\}\,d\xi\right)dt.$
Μπορεί να δειχθεί, όπως στην άσκηση 4 (i), ότι $\int_0^\infty e^{-\alpha\xi}\,\cos(\beta\,\xi)\,d\xi = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$.
Επομένως $u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty f(t)[\frac{1}{y^2+(t-x)^2} - \frac{1}{y^2+(t+x)^2}]\,dt$.

(7) Να βρεθεί η λύση $u(x,t)$ της εξίσωσης θερμότητας $u_t - u_{xx} + u = 0$ για $x \geq 0$, $t \geq 0$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $u(x,0) = 0$, $x \geq 0$ και τη συνοριακή συνθήκη $u_x(0,t) = f(t)$, $t \geq 0$. Να εκφραστεί η λύση u ως απλό ολοκλήρωμα που περιέχει τη συνάρτηση f.

Λύση

Εφαρμόζοντας το συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier ως προς x, στην εξίσωση, παίρνουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi) + \xi^2\,\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,u_x(0,t) + \mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi) = 0,$$

ή ισοδύναμα $\frac{d}{dt}\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi) + (\xi^2+1)\,\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f(t)$. Λύνοντας την τελευταία εξίσωση, χρησιμοποιώντας ολοκληρωτικό παράγοντα, παίρνουμε ότι

$$\frac{d}{dt}[e^{(\xi^2+1)t}\,\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi)] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{(\xi^2+1)t}\,f(t).$$

Επομένως $e^{(\xi^2+1)t}\,\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi) - \mathcal{F}_c(u(x,0))(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{(\xi^2+1)s}\,f(s)\,ds$. Εφόσον όμως $\mathcal{F}_c(u(x,0))(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,0)\,\cos(x\,\xi)\,dx = 0$ τελικά παίρνουμε ότι $\mathcal{F}_c(u(x,t))(\xi) =$
$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-(\xi^2+1)t}\int_0^t e^{(\xi^2+1)s}\,f(s)\,ds$. Συνεπώς $u(x,t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty[\int_0^t e^{(\xi^2+1)s}\,f(s)]\,e^{-(\xi^2+1)t}\,\cos(\xi\,x)\,d\xi$
$= -\frac{2}{\pi}\int_0^t[\int_0^\infty e^{-\xi^2(t-s)}\,\cos(\xi\,x)\,d\xi]\,e^{s-t}\,f(s)\,ds$
$= -\frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t-s}}\,e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}\,e^{s-t}\,f(s)\,ds = -\frac{e^{-t}}{\pi}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}}\,e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}\,e^{s}\,f(s)\,ds$, όπου έχει χρησιμοποιηθεί ότι $I(\mu) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\cos\mu x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\mu^2/4}$.

Σημείωση: Στις παραπάνω ασκήσεις, οι τύποι που χρησιμοποιήθηκαν για το μετασχηματισμό Fourier, τον ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier, το συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier και για τους αντίστροφούς τους είναι οι εξής:

(i) $\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi,$

(ii) $\mathcal{F}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(x\,\xi)\, dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_s(\xi)\, \sin(x\,\xi)\, d\xi,$

(iii) $\mathcal{F}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(x\,\xi)\, dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_c(\xi)\, \cos(x\,\xi)\, d\xi.$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Να βρεθούν τα ιδιοζεύγη του περιοδικού προβλήματος Ιδιοτιμών Sturm-Liouville:

$$(1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & -\pi < x < \pi \\ y(-\pi) = y(\pi) = 0, & y'(-\pi) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Λύση: Θεωρία Sturm-Liouville $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\lambda = 0 \quad y = Ax + B \Rightarrow$ Ιδιοζεύγος $(\lambda_0, y_0(x)) = (0, 1)$

(ii) $\lambda < 0 \Rightarrow$ ειδικοί τύπου λύσεις, δεν είναι περιοδικές, άρα $\nexists$ ιδιοζεύγη.

(iii) $\lambda > 0$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi(r) = r^2 + \lambda = 0$

$r^2 = -\lambda \Rightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda} = \pm i k$

$k = \sqrt{\lambda} > 0 \qquad y(x) = A\cos kx + B\sin kx$

$y(-\pi) = A\cos k\pi - B\sin k\pi = y(\pi) = A\cos k\pi + B\sin k\pi$

$\Rightarrow \underline{B\sin k\pi = 0} \quad (2)$

$y'(-\pi) \overset{(2)}{=} Ak\sin k\pi = y'(\pi) = -Ak\sin k\pi$

$\Rightarrow Ak\sin k\pi = 0 \Rightarrow \underline{A\sin k\pi = 0} \quad (3)$

από (2), (3) $\Rightarrow A, B$ τυχαίοι αριθμοί $\in \mathbb{R}$ με $A^2 + B^2 \neq 0$ και $\sin k\pi = 0$ για $k = n$.

Ιδιοτιμές $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Γενικά έχουμε:

Ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x) = \begin{cases} \sin nx \\ \cos nx \end{cases}$ $\qquad y_n(x) = A\cos nx + B\sin nx$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1°

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ STURM - LIOUVILLE.

1. Ασκήσεις από το βιβλίο W. BOYCE & R. DIPRIMA

Σελίδα 632 / 19, 20, 22

Σελίδα 648 / 15, 16

Σελίδα 649 / 24, 27.

2. Αν $f(x+2\pi) = f(x)$ και
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi/2 \\ 4, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$
σε ποιές αριθμητικές τιμές θα συγκλίνει η σειρά Fourier της f στα σημεία $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}$;

3. Δίνεται ότι η περιοδική συνάρτηση $f(x) = x^2$, $-\pi \le x < \pi$ αναπτύσσεται σε συνημιτονική σειρά Fourier:
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$
Χρησιμοποιώντας αυτή την ανάπτυξη, να δείξετε ότι

(α) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$

(β) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$

(γ) $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ (χρησιμοποιείστε τα (α), (β)).

4. Η περιττή περιοδική συνάρτηση $f(x) = x$, $-\pi \le x < \pi$, αναπτύσσεται σε ημιτονική σειρά Fourier:
$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$
Χρησιμοποιώντας αυτή την ανάπτυξη και την ολοκλήρωση όρο προς όρο, να βρεθεί η συνημιτονική σειρά Fourier για την περιοδική συνάρτηση $f(x) = x^2$, $-\pi \le x < \pi$.

5. Να αναπτύξετε σε γενικευμένες σειρές Fourier τις συναρτήσεις f ως προς το πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων των προβλημάτων Sturm-Liouville:

(α) $f(x) = 1$, $0 < x < 1$: $\{ y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y'(1) = 0 \}$

(β) $f(x) = 1 + x$, $-\pi < x < \pi$: $\{ y'' + \lambda y = 0,\ y(-\pi) = y(\pi),\ y'(-\pi) = y'(\pi) \}$

(γ) $f(x) = 1$, $0 < x < 1$: $\{ y'' - 3y' + 2\lambda y = 0,\ y(0) = y(1) = 0 \}$

(δ) $f(x) = \ln x$, $1 < x < e$: $\{ x^2 y'' + x y' + \lambda y = 0,\ y(1) = y(e) = 0 \}$.

(Απαντήσεις στη πίσω σελίδα)

Απαντήσεις

2. $1/2$, $5/2$, 2 , $1/2$, 1

4. $$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

5. (α) $$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (n-\frac{1}{2})\pi x}{(2n-1)}$$

(β) $$f(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$

(γ) $$f(x) = 2\pi e^{3x/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2\pi^2 + \frac{9}{4}}\right)\left[1 + (-1)^{n-1} e^{-3/2}\right] \sin n\pi x$$

(δ) $$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(n\pi \ln x)$$

1. (632)

(19 β) $$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi x/2]}{2n-1}$$

(20 β) $$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x$$

(22 β) $$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\pi^2} \frac{\cos[(2n-1)\pi x/2]}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

(648-649)

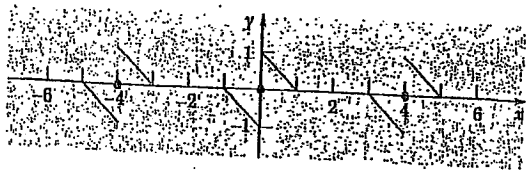
(15) $$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

(16) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(-\cos n\pi + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}\right) \sin \frac{n\pi x}{2}$$

(24 α) $$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$$

(27 β) $$g(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\pi}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{3}$$

$$h(x) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{3}$$



ΣΧΗΜΑ 10.4.5 Περιττή περιοδική επέκταση της $f(x)$ που δίνεται από την Εξ. (13).

ΙΤΩ

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 1 έως 6 να συναχθεί το συμπέρασμα αν η δοθείσα συνάρτηση είναι άρτια, περιττή ή τίποτε από τα δύο.

1. $x^3 - 2x$
2. $x^3 - 2x + 1$
3. $\tan 2x$
4. $\sec x$
5. $|x|^3$
6. e^{-x}

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 7 έως 12 δίνεται μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα μήκους L. Να σχεδιασθούν για κάθε περίπτωση τα γραφήματα άρτιας και περιττής επέκτασης της f περιόδου $2L$.

7. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x < 3 \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ x-1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$
9. $f(x) = 2 - x, \quad 0 < x < 2$
10. $f(x) = x - 3, \quad 0 < x < 4$
11. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$
12. $f(x) = 4 - x^2, \quad 0 < x < 1$

13. Να αποδειχθεί ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης. Δηλαδή, για κάθε συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού περιέχει το $-x$ όταν περιέχει το x, να δειχθεί ότι υπάρχει μια άρτια συνάρτηση g και μια περιττή συνάρτηση h, τέτοιες ώστε
$f(x) = g(x) + h(x)$
Υπόδειξη: Αν υποτεθεί ότι ισχύει $f(x) = g(x) + h(x)$, με τι ισούται η $f(-x)$;
14. Να βρεθούν οι συντελεστές της συνημιτονικής και της ημιτονικής σειράς που περιγράφονται στο Παράδειγμα 2.

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 15 έως 22 να βρεθεί η απαιτούμενη σειρά Fourier για τη δοθείσα συνάρτηση και να σχεδιασθεί το γράφημα της συνάρτησης στην οποία συγκλίνει η σειρά, για τρεις περιόδους.

15. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$ συνημιτονική σειρά, περίοδος 4.

Να γίνει σύγκριση με το Παράδειγμα 1 και το Πρόβλημα 5 της Ενότητας 10.3.

16. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2, \end{cases}$ ημιτονική σειρά, περίοδος 4.
17. $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le \pi,$ συνημιτονική σειρά, περίοδος 2π.

18. $f(x) = 1, \quad 0 < x < \pi,$ ημιτονική σειρά, περίοδος 2π.
19. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi, \\ 1, & \pi < x < 2\pi, \\ 2, & 2\pi < x < 3\pi. \end{cases}$ ημιτονική σειρά, περίοδος 6π.
20. $f(x) = x, \quad 0 \le x < 1,$ σειρά περιόδου 1.
21. $f(x) = L - x, \quad 0 \le x \le L,$ συνημιτονική σειρά, περίοδος $2L$.
Να γίνει σύγκριση με το Παράδειγμα 1 της Ενότητας 10.2.
22. $f(x) = L - x, \quad 0 < x < L,$ ημιτονική σειρά, περίοδος $2L$.

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 23 έως 26
(α) Να βρεθεί η απαιτούμενη σειρά Fourier για τη δοθείσα συνάρτηση.
(β) Να σχεδιασθεί το γράφημα της συνάρτησης στην οποία συγκλίνει η σειρά, για τρεις περιόδους.
(γ) Να σχεδιασθούν τα γραφήματα ενός ή περισσοτέρων μερικών αθροισμάτων της σειράς.

23. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \pi < x < 2\pi; \end{cases}$ συνημιτονική σειρά, περίοδος 4π.
24. $f(x) = -x, \quad -\pi < x < 0,$ ημιτονική σειρά, περίοδος 2π.
25. $f(x) = 2 - x^2, \quad 0 < x < 2,$ ημιτονική σειρά, περίοδος 4.
26. $f(x) = x^2 - 2x, \quad 0 < x < 4,$ συνημιτονική σειρά, περίοδος 8.

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 27 έως 30 δίνεται μια συνάρτηση στο διάστημα $0 < x < L$.
(α) Να σχεδιασθούν τα γραφήματα της άρτιας επέκτασης $g(x)$ και της περιττής επέκτασης $h(x)$ της δοθείσας συνάρτησης περιόδου $2L$, για τρεις περιόδους.
(β) Να βρεθεί η συνημιτονική και η ημιτονική σειρά Fourier για τη δοθείσα συνάρτηση.
(γ) Να σχεδιασθούν λίγα από τα μερικά αθροίσματα κάθε σειράς.
(δ) Για κάθε σειρά, να μελετηθεί η εξάρτηση του μέγιστου σφάλματος από το n στο διάστημα $[0, L]$.

27. $f(x) = 3 - x, \quad 0 < x < 3$
28. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$
29. $f(x) = (4x^2 - 4x - 3)/4, \quad 0 < x < 2.$
30. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 1, \quad 0 < x < 3.$
31. Να αποδειχθεί ότι, αν η συνάρτηση f είναι περιττή, τότε
$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0.$$
32. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες 2 και 3 άρτιων και περιττών συναρτήσεων, όπως διατυπώθηκαν στο κείμενο.
33. Να αποδειχθεί ότι η παράγωγος μιας άρτιας συνάρτησης είναι περιττή και η παράγωγος μίας περιττής συνάρτησης είναι άρτια.
34. Έστω $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Να δειχθεί ότι, αν η f είναι άρτια, τότε η F είναι περιττή και, αν η f είναι περιττή, τότε η F είναι άρτια.
35. Από τη σειρά Fourier για το τετραγωνικό κύμα του Παραδείγματος 1 στην Ενότητα 10.3, να

κα περιόδου. Αν ναι, να βρεθεί η θεμελιώδης περίοδός της.

1. $\sin 5x$
2. $\cos 2\pi x$
3. $\sinh 2x$
4. $\sin \pi x/L$
5. $\tan \pi x$
6. x^2

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & 2n-1 \le x < 2n, \\ 1, & 2n \le x < 2n+1, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8. $f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & 2n-1 \le x < 2n, \\ 1, & 2n \le x < 2n+1, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

9. Αν $f(x) = -x$ για $-L < x < L$, και αν $f(x+2L) = f(x)$, να βρεθεί ένας τύπος για την $f(x)$: (α) στο διάστημα $L < x < 2L$, (β) στο διάστημα $-3L < x < -2L$.

10. Αν $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \end{cases}$ και αν $f(x+2) = f(x)$, να βρεθεί ένας τύπος για την $f(x)$: (α) στο διάστημα $1 < x < 2$, (β) στο διάστημα $8 < x < 9$.

11. Αν $f(x) = L - x$ για $0 < x < 2L$ και αν $f(x+2L) = f(x)$, να βρεθεί ένας τύπος για την $f(x)$ στο διάστημα $-L < x < 0$.

12. Να επαληθευτούν οι (6) και (7) του κειμένου με απευθείας ολοκλήρωση.

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 13 έως 18
(α) Να σχεδιασθεί το γράφημα της δοθείσας συνάρτησης για τρεις περιόδους.
(β) Να βρεθεί η σειρά Fourier για τη δοθείσα συνάρτηση.

13. $f(x) = -x, -L \le x \le L, f(x+2L) = f(x)$

14. $f(x) = -x, \quad -L \le x < L, \quad f(x+2L) = f(x)$

15. $f(x) = \begin{cases} 1, & -L \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < L \end{cases} \quad f(x+2L) = f(x)$

16. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x)$

17. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0, \\ 1-x, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$

18. $f(x) = \begin{cases} x+L, & -L \le x \le 0, \\ L, & 0 < x < L, \end{cases} \quad f(x+2L) = f(x)$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 19 έως 24
(α) Να σχεδιασθεί το γράφημα της δοθείσας συνάρτησης για τρείς περιόδους.
(β) Να βρεθεί η σειρά Fourier για τη δοθείσα συνάρτηση.
(γ) Να σχεδιασθεί το $s_m(x)$ ως προς x για $m = 5$, 10, και 20.
(δ) Να περιγραφεί πώς συγκλίνει η σειρά Fourier.

19. $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 2, \end{cases} \quad f(x+4) = f(x)$

20. $f(x) = x, \quad -1 \le x < 1, \quad f(x+2) = f(x)$

21. $f(x) = x^2/2, \quad -2 \le x \le 2, \quad f(x+4) = f(x)$

22. $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \le x < 0, \\ 2-2x, & 0 \le x < 2, \end{cases} \quad f(x+4) = f(x)$

23. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & -2 \le x < 0, \\ 2x - \frac{1}{2}x^2, & 0 \le x < 2, \end{cases} \quad f(x+4) = f(x)$

24. $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \le x \le 0, \\ x^2(3-x), & 0 < x < 3, \end{cases} \quad f(x+6) = f(x)$

25. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο Πρόβλημα 21 και έστω $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$. Να σχεδιασθεί το $|e_m(x)|$ ως προς x για $0 \le x \le 2$ για διάφορες τιμές του m. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του m για την οποία $|e_m(x)| \le 0{,}01$ για όλα τα x.

26. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο Πρόβλημα 24 και έστω $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$. Να σχεδιασθεί το $|e_m(x)|$ ως προς x για $0 \le x \le 3$ για διάφορες τιμές του m. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του m για την οποία $|e_m(x)| \le 0{,}1$ για όλα τα x.

27. Έστω g μία ολοκληρώσιμη περιοδική συνάρτηση με περίοδο T.
(α) Αν $0 \le a \le T$, να δειχθεί ότι

$$\int_0^T g(x)\,dx = \int_a^{a+T} g(x)\,dx.$$

Υπόδειξη: Να δειχθεί πρώτα ότι $\int_0^a g(x)\,dx = \int_T^{a+T} g(x)\,dx$. Θεωρήστε την αλλαγή μεταβλητών $s = x - T$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα.
(β) Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε τιμή του a, όχι απαραίτητα στο διάστημα $0 \le a \le T$,

$$\int_0^T g(x)\,dx = \int_a^{a+T} g(x)\,dx.$$

(γ) Να δειχθεί ότι για οποιεσδήποτε τιμές των a και b ισχύει

$$\int_a^{a+T} g(x)\,dx = \int_b^{b+T} g(x)\,dx.$$

28. Αν η f είναι διαφορίσιμη και περιοδική με περίοδο T, να δειχθεί ότι η f' είναι επίσης περιοδική με περίοδο T. Να εξετασθεί αν η

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

είναι πάντα περιοδική.

*29. Στο πρόβλημα αυτό υποδεικνύουμε κάποιες συγκεκριμένες ομοιότητες μεταξύ τριδιάστατων γεωμετρικών διανυσμάτων και σειρών Fourier.
(α) Έστω $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ και $\mathbf{v}_3$ ένα σύνολο ορθογώνιων διανυσμάτων σε τρεις διαστάσεις και έστω $\mathbf{u}$ οποιοδήποτε τριδιάστατο διάνυσμα. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3, \tag{i}$$

όπου

$$a_i = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{ii}$$

Να δειχθεί ότι τα a_i μπορούν να ερμηνευθούν ως ο λόγος της προβολής του $\mathbf{u}$ στη διεύθυνση του $\mathbf{v}$ προς το μέτρο του $\mathbf{v}_i$.
(β) Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο (u, v) ως

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2ο/Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ STURM-LIOUVILLE

1. Ασκήσεις από το βιβλίο W. BOYCE & R. DIPRIMA

Σελίδα 701 / 9, 11

Σελίδα 707 / 3

Σελίδα 721 / 14, 16, 18 (αυτοσυζυγής ... έχει την έννοια του συμμετρικού...)

Σελίδα 734 / 1, 3, 10, 11

2. Να δείξετε απ' ευθείας (χωρίς τη χρήση του σχετικού θεωρήματος ή την εύρεση των ιδιοσυναρτήσεων) ότι οι ιδιοσυναρτήσεις των παρακάτω προβλημάτων (S-L) είναι ορθογώνιες:

(α) $y'' + \lambda(1+x)y = 0$, $y(0) = y'(1) = 0$, $0 < x < 1$,

(β) $xy'' + y' + \lambda x y = 0$, $0 < x < 1$, $y'(0) = y(1) = 0$.

3. Να βρεθούν οι ιδιοσυναρτήσεις του περιοδικού προβλήματος (S-L): $\{y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y(2\pi),\ y'(0) = y'(2\pi)\}$.

4. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε τα παρακάτω Π.Σ.Τ. (ομογενής εξίσωση, μη ομογενείς (Σ.Σ.)) να έχουν μοναδική λύση:

(α) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

(β) $y'' + 4y' + (4 + 9\lambda)y = 0$, $y(0) = 1$, $y(2) = 0$

ΑΠΑΝ. (α) $\lambda = -k^2 < 0$, $y = \dfrac{\sinh kx}{\sinh k}$

$\lambda = 0$, $y = x$

$\lambda = k^2 > 0$, $k \neq n\pi$, $y = \dfrac{\sin kx}{\sin k}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

(β) $\lambda = -k^2 < 0$, $y = e^{-2x}\left[\dfrac{\sinh 3k(2-x)}{\sinh 6k}\right]$

$\lambda = 0$, $y = \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)e^{-2x}$

$\lambda = k^2 > 0$, $k \neq \dfrac{n\pi}{6}$, $y = e^{-2x}\left[\dfrac{\sin 3k(2-x)}{\sin 6k}\right]$.

$n = 1, 2, 3, \ldots$

2. $[(1+x^2)y']' + 4y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1$
3. $y'' + 4y = \sin x, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0$
4. $-y'' + x^2 y = \lambda y, \qquad y'(0) - y(0) = 0, \qquad y'(1) + y(1) = 0$
5. $-[(1+x^2)y']' = \lambda y + 1, \qquad y(-1) = 0, \qquad y(1) = 0$
6. $-y'' = \lambda(1+x^2)y, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(1) + 3y(1) = 0$
7. Θεωρήστε τη γενική γραμμική ομογενή εξίσωση δεύτερης τάξης

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0. \tag{i}$$

Αναζητούμε έναν ολοκληρώνοντα παράγοντα $\mu(x)$, τέτοιον ώστε, πολλαπλασιάζοντας την Εξ. (i) επί $\mu(x)$, η εξίσωση που προκύπτει να γράφεται στη μορφή

$$[\mu(x)P(x)y']' + \mu(x)R(x)y = 0. \tag{ii}$$

(α) Εξισώνοντας τους συντελεστές του y', να δειχθεί ότι το μ πρέπει να είναι μια λύση της

$$P\mu' = (Q - P')\mu. \tag{iii}$$

(β) Να λυθεί η Εξ. (iii) και έτσι να δειχθεί ότι

$$\mu(x) = \frac{1}{P(x)} \exp \int_{x_0}^{x} \frac{Q(s)}{P(s)}\, ds. \tag{iv}$$

Να συγκριθεί αυτό το αποτέλεσμα με εκείνο του Προβλήματος 27 της Ενότητας 3.2.

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 8 έως 11 να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Προβλήματος 7 για το μετασχηματισμό της δοθείσας εξίσωσης στη μορφή $[p(x)y']' + q(x)y = 0$.

8. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, Εξίσωση Hermite
9. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, Εξίσωση Bessel
10. $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$, Εξίσωση Laguerre
11. $(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$, Εξίσωση Chebyshev
12. Η εξίσωση

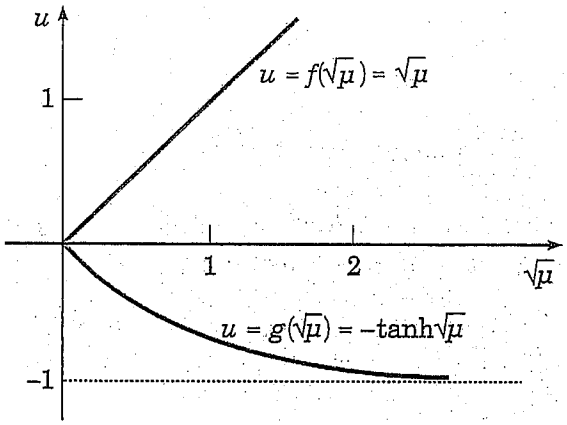
$$u_{tt} + cu_t + ku = a^2 u_{xx} + F(x,t), \tag{i}$$

όπου $a^2 > 0$, $c \geq 0$, και $k \geq 0$ σταθερές, είναι γνωστή ως **εξίσωση του τηλέγραφου** και προκύπτει κατά τη μελέτη ενός ελαστικού νήματος υπό τάση (βλ. Παράρτημα Β Κεφαλαίου 10). Η εξίσωση (i) εμφανίζεται επίσης σε άλλες εφαρμογές. Υποθέτοντας ότι $F(x,t) = 0$, έστω $u(x,t) = X(x)\,T(t)$, να χωριστούν οι μεταβλητές στην Εξ. (i) και να παραχθούν συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως προς X και T.

ραμμικά Ομογενή Προβλήματα Συνοριακών Τιμών: διοτιμές και Ιδιοσυναρτήσεις

Θεωρήστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών που αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση

69



ΣΧΗΜΑ 11.2.2 Γραφική λύση της $\sqrt{\mu} = -\tanh\sqrt{\mu}$.

Τέλος, είναι αναγκαίο να εξετάσουμε την πιθανότητα το λ να είναι μιγαδικό. Είναι δυνατόν να δειχθεί με απευθείας υπολογισμό ότι το πρόβλημα (14), (15) δεν έχει μιγαδικές ιδιοτιμές. Ωστόσο, στην Ενότητα 11.3 θεωρούμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια μια ευρεία κλάση προβλημάτων που περιλαμβάνει αυτό το παράδειγμα.

Εκεί δείχνουμε ότι κάθε πρόβλημα σε αυτή την κλάση έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές. Συνεπώς παραλείπουμε εδώ την εξέταση της μη ύπαρξης μιγαδικών ιδιοτιμών. Άρα συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος (14), (15) δίνονται από τις Εξ. (21) και (22).

:α

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 1 έως 4, να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του δοθέντος προβλήματος συνοριακών τιμών. Υποθέστε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές.

1. $y'' + \lambda y = 0,$
   $y(0) = 0, \qquad y'(1) = 0$

2. $y'' + \lambda y = 0,$
   $y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0$

3. $y'' + \lambda y = 0,$
   $y'(0) = 0, \qquad y'(1) = 0$

4. $y'' - \lambda y = 0,$
   $y(0) = 0, \qquad y'(1) = 0$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 5 έως 8, να προσδιορισθεί η μορφή των ιδιοσυναρτήσεων και η εξίσωση ορίζουσας που ικανοποιείται από τις μη μηδενικές ιδιοτιμές. Να προσδιορισθεί αν $\lambda = 0$ είναι μία ιδιοτιμή, και να βρεθούν προσεγγιστικές τιμές για τα λ_1 και λ_2, τις μη μηδενικές ιδιοτιμές με τις μικρότερες απόλυτες τιμές. Να εκτιμηθεί το λ_n για μεγάλες τιμές του n. Υποθέστε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές.

5. $y'' - \lambda y = 0,$
   $y(0) + y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0$

6. $y'' + \lambda y = 0,$
   $y(0) = 0, \qquad y(\pi) + y'(\pi) = 0$

70

4. $y''+\lambda y=0, \quad y'(0)=0, \quad y'(1)+y(1)=0.$, βλ. Ενότητα 11.2, Πρόβλημα 7.

5. $y''-2y'+(1+\lambda)y=0, \quad y(0)=0, \quad y(1)=0.$, βλ. Ενότητα 11.2, Πρόβλημα 9.

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 6 έως 9 να βρεθεί το ανάπτυγμα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)$ σε ιδιοσυναρτήσεις της δοθείσας συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις του Προβλήματος 1.

6. $f(x)=1, \quad 0\le x\le 1$

7. $f(x)=x, \quad 0\le x\le 1$

8. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 10 έως 13 να βρεθεί το ανάπτυγμα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)$ σε ιδιοσυναρτήσεις της δοθείσας συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις του Προβλήματος 4.

10. $f(x)=1, \quad 0\le x\le 1$

11. $f(x)=x, \quad 0\le x\le 1$

12. $f(x)=1-x, \quad 0\le x\le 1$

13. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 14 έως 18 να προσδιορισθεί κατά πόσον το πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι αυτοσυζυγές.

14. $y''+y'+2y=0, \quad y(0)=0, \quad y(1)=0$

15. $(1+x^2)y''+2xy'+y=0, \quad y'(0)=0, \quad y(1)+2y'(1)=0$

16. $y''+y=\lambda y, \quad y(0)-y'(1)=0, \quad y'(0)-y(1)=0$

17. $(1+x^2)y''+2xy'+y=\lambda(1+x^2)y, \quad y(0)-y'(1)=0, \quad y'(0)+2y(1)=0$

18. $y''+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad y(\pi)+y'(\pi)=0$

19. Να δειχθεί ότι, αν οι συναρτήσεις u και v ικανοποιούν τις Εξ. (2) και είτε $a_2=0$ είτε $b_2=0$ ή και τα δύο, τότε
$$p(x)[u'(x)v(x)-u(x)v'(x)]\Big|_0^1=0.$$

20. Στο πρόβλημα αυτό δίνουμε το περίγραμμα μιας απόδειξης του πρώτου μέρους του Θεωρήματος 11.3.3, ότι οι ιδιοτιμές του προβλήματος Sturm-Liouville (1), (2) είναι απλές. Για δοθείσα τιμή του λ, έστω ϕ_1 και ϕ_2 δύο γραμμικώς ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις. Να υπολογισθεί η ορίζουσα Wronski $W(\phi_1,\phi_2)(x)$ και να χρησιμοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες (2), ώστε να δειχθεί ότι $W(\phi_1, \phi_2)(0)=0$. Ακολούθως να χρησιμοποιηθούν τα Θεωρήματα 3.3.2 και 3.3.3, ώστε να δειχθεί ότι τα ϕ_1 και ϕ_2 δεν μπορούν να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα όπως υποθέσαμε.

21. Έστω το πρόβλημα Sturm-Liouville
$$-[p(x)y']'+q(x)y=\lambda r(x)y,$$
$$a_1y(0)+a_2y'(0)=0, \qquad b_1y(1)+b_2y'(1)=0,$$
όπου τα p, q, r ικανοποιούν τις συνθήκες που διατυπώθηκαν στο κείμενο.

(α) Να δειχθεί ότι, αν λ είναι μια ιδιοτιμή και ϕ η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση, τότε

Προβλήματα

Να λυθεί κάθε ένα από τα Προβλήματα 1 έως 5 με χρήση αναπτυγμάτων σε ιδιοσυναρτήσεις.

1. $y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
2. $y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$· βλ. Ενότητα 11.3, Πρόβλημα 7.
3. $y'' + 2y = -x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$· βλ. Ενότητα 11.3, Πρόβλημα 3.
4. $y'' + 2y = -x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$· βλ. Ενότητα 11.3, Πρόβλημα 11.
5. $y'' + 2y = -1 + |1 - 2x|, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 6 έως 9 να προσδιορισθεί ένα ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων για τη λύση του δοθέντος προβλήματος. Να υποτεθεί ότι η f ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 11.4.1. Να δοθούν οι τιμές του μ για τις οποίες υπάρχει η λύση.

6. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
7. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
8. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
9. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 10 έως 13 να προσδιορισθεί κατά πόσον υπάρχει τιμή της σταθεράς a για την οποία το πρόβλημα έχει μια λύση και να βρεθεί η λύση αυτή για τη συγκεκριμένη τιμή του a.

10. $y'' + \pi^2 y = a + x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
11. $y'' + 4\pi^2 y = a + x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
12. $y'' + \pi^2 y = a, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
13. $y'' + \pi^2 y = a - \cos \pi x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
14. Έστω $\phi_1, ..., \phi_n, ...$ οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της διαφορικής εξίσωσης (3) που υπόκειται στις συνοριακές συνθήκες (2). Εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ συγκλίνει στην $f(x)$, όπου $f(x) = 0$ για κάθε x στο $0 \le x \le 1$, να δειχθεί ότι $c_n = 0$ για κάθε n.
    Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε επί $r(x)\phi_m(x)$, ολοκληρώστε και χρησιμοποιήστε την ιδιότητα ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων.
15. Έστω L ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης. Να δειχθεί ότι η λύση $y = \phi(x)$ του προβλήματος

$$L[y] = f(x),$$
$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = \alpha, \qquad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = \beta$$

μπορεί να γραφεί ως $y = u + v$, όπου τα $u = \phi_1(x)$ και $v = \phi_2(x)$ είναι λύσεις των προβλημάτων

$$L[u] = 0,$$
$$a_1 u(0) + a_2 u'(0) = \alpha, \qquad b_1 u(1) + b_2 u'(1) = \beta$$

και

φυλλάδιο 2° / Β

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΙΣ Μ.Δ.Ε. & ΣΤΑ ΠΡΟΒ. ΣΥΝ/ΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ :

1. Για τα παρακάτω προβλήματα συνοριακών τιμών να δείξετε ότι :

(α) το $\{ y''+9y=0,\ 0<x<\pi,\ y(0)=1,\ y(\pi)=\beta \}$, δεν έχει λύση αν $\beta \neq -1$:

(β) το $\{ y''+16y=32x,\ 0<x<\frac{\pi}{8},\ y(0)=y(\frac{\pi}{8})=0 \}$ έχει μοναδική λύση και να βρεθεί.

(γ) το $\{ y''+\pi^2 y = a+x,\ y(0)=y(1)=0 \}$, έχει άπειρες λύσεις μόνο για $a=-\frac{1}{2}$.

---

2. Αν $\Delta = |B_i(y_j)|$, $i,j=1,2$, $B_i(y_j)=a_{ij}y_j(a_i)+a_{ij}y_j'(a_i)$, $a_1=a$, $a_2=\beta$, με χρήση της ορίζουσας Δ διαπιστώστε αν τα παρακάτω προβλήματα έχουν ή όχι λύση :
(y_j είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξισώσεω

(α) $y''+\lambda y=0$, $y(0)=y(1)=0$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(β) $y''+y=0$, $y(0)=3$, $y(\pi)=-2$,

(γ) $y''-y=0$, $3y(0)+y'(0)=0$, $y(1)+y'(1)=1$.

---

3. Να τεθούν σε μορφή Sturm (αυτοσυζυγή μορφή) οι παρακάτω εξισώσεις:

(α) $xy''+(1-x)y'+ky=0$, $x>0$ (εξίσωση Laguerre)
απ. $(xe^{-x}y')'+ke^{-x}y=0$.

(β) $y''-2xy'+2\lambda y=0$, $-\infty<x<\infty$, (εξίσωση Hermite)
απ. $(e^{-x^2}y')'+2k\,e^{-x^2}y=0$.

(γ) $x^2y''+xy'+(\lambda x^2-n^2)y=0$, $x>0$,
απ. $(xy')'+\left(\lambda x-\frac{n^2}{x}\right)y=0$.

4. Δίνονται τα σύνολα συναρτήσεων: $\{\sin \nu x\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, $\{\cos \nu x\}_{\nu\in\mathbb{N}_0}$, $0<x<\pi$. Είναι ορθογώνια; Είναι κανονικά; αν όχι να κανονικοποιηθούν. (Θεωρείστε συνάρτηση βάρους $r(x)=1$, οπότε $(\varphi,g)=\int_\alpha^\beta \varphi(x)g(x)dx$ και $\|\varphi\|_2=\left(\int_\alpha^\beta \varphi^2(x)\,dx\right)^{1/2}$. Απ. $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\nu x\right\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\nu x\right\}$

---

5. Να βρεθούν τα ιδιοζεύγη (ιδιοτιμή, ιδιοσυνάρτηση) των παρακάτω προβλημάτων Sturm-Liouville:

(α) $x^2y''+3xy'+\lambda y=0$, $1<x<e$, $y(1)=y(e)=0$, (οριακό)
απ. $\lambda_\nu=1+\nu^2\pi^2$, $\varphi_\nu(x)=\sin(\nu\pi\ln x)\,x^{-1}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

(β) $y''-3y'+\lambda y=0$, $0<x<\pi$, $y'(0)=0$, $y'(\pi)=0$, (οριακό)
απ. $(0,1)$ και $\left(\nu^2+\frac{9}{4}, e^{3x/2}\left(\sin\nu x-\frac{2}{3}\nu\cos\nu x\right)\right)$, $\nu=1,2,\dots$

(γ) $y''+\lambda y=0$, $-1<x<1$, $y(-1)=y(1)$, $y'(-1)=y'(1)$.
απ. $\lambda_\nu=\nu^2\pi^2$, $\varphi_\nu(x)=\cos\nu\pi x$, $\psi_\nu(x)=\sin\nu\pi x$, $\nu\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ (περιοδικό)

(δ) $x^2y''+xy'+\lambda y=0$, $0<x<1$, $y(1)=0$, (ιδιάζον)
απ. $\lambda>0$, $\varphi_\lambda(x)=\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$, y, y' φραγμένα καθώς $x\to 0+$.

(ε) $y''+\lambda y=0$, $0<x<e$, $y'(e)=y(0)=0$.

---

6. Να λυθούν τα παρακάτω ιδιόμορφα προβλήματα με την εναλλακτική μέθοδο Fredholm:

(α) $x^2y''+xy'+16\pi^4y=\pi^2$, $1<x<e^{1/\pi}$
$y'(1)=y'(e^{1/\pi})=0$.

(β) $y''+\pi^2y=x+a$, $0<x<1$, $y(0)=y(1)=0$
$a\in\mathbb{R}$.

(γ) $y''-y'+\Lambda y=e^{-x/2}$, $0<x<1$, $y(0)=y(1)=0$,
όπου $\Lambda=\pi^2$, $\pi^2+\frac{1}{4}$, $4\pi^2+\frac{1}{4}$ (3 περιπτώσεις).

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3°

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΙΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

① Να βρείτε τις σταθερές λύσεις $w(x)$ της εξίσωσης θερμότητος με συνοριακές συνθήκες:

(α) $u(0,t)-u_x(0,t)=\theta_1$, $u(L,t)=0$, $t>0$, $L>0$.

(β) $u(0,t)=\theta_1$, $u(L,t)+u_x(L,t)=\theta_2$, $L>0$, $t>0$.

{Απάντηση: (β) $w(x)=\theta_1+(\theta_2-\theta_1)x/(1+L)$.}

② Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$u_t=a^2u_{xx}$, $0<x<1$, $t>0$ {Υποδ: Μέθοδος Χ.Μ.}

(α) $u(0,t)=u(1,t)=0$, $t>0$, $u(x,0)=3\sin(\pi x)-5\sin(4\pi x)$, $0<x<1$.

{Απαν.: $u(x,t)=3\sin(\pi x)e^{-a^2\pi^2t}-5\sin(4\pi x)e^{-16a^2\pi^2t}$}

(β) $u(0,t)=1$, $u(1,t)=0$, $u(x,0)=1+x$, $t>0$, $0<x<1$.

{Απαν.: $u(x,t)=1-x+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\sin(\nu\pi x)e^{-a^2\nu^2\pi^2t}$}

(γ) $u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$, $u(x,0)=\theta_0\sin^2(\pi x/L)$

$t>0$ και $0<x<L$.

{Απαν.: $u(x,t)=\frac{1}{2}\theta_0\left[1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)e^{-4a^2\pi^2t/L^2}\right]$}

③ Να λυθούν τα Προβλήματα Αρχικών και Συνοριακών Τιμών (Π.Α.Σ.Τ):

(α) $u_t=u_{xx}-6x$, $0<x<1$, $t>0$

$u_x(0,t)=0$, $u(1,t)=1$, $t>0$, $u(x,0)=x^3$, $0<x<1$.

{Υποδ.: $u(x,t)=S(x)+v(x,t)$, $S''+6x=0$, $S'(0)=0$, $S(1)=1$,

Απαν.: $u(x,t)=x^3$.}

(β) $u_t=u_{xx}+2x-5\sin t$, $0<x<1$, $t>0$

$u(0,t)=u(1,t)=u(x,0)=0$, $0<x<1$, $t>0$

{Απαν.: $u(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\nu^3\pi^3}(-1)^{\nu+1}(1-e^{-\nu^2\pi^2t})-\frac{10}{\nu\pi}\frac{[1-(-1)^\nu]}{1+\nu^4\pi^4}\cdot(\nu^2\pi^2\sin t-\cos t+e^{-\nu^2\pi^2t})\right]\sin\nu\pi x$.}

(γ) $u_t = u_{xx} + 2xt - x$, $0<x<1$, $t>0$

$u(0,t) = t^2$, $u(1,t) = 2t$, $u(x,0) = x^2/2$, $0<x<1$, $t>0$.

{Απαν.: $u(x,t) = t + (t^2 - t)x + \frac{x}{2}(x-1) + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \sin(\nu\pi x) e^{-\nu^2\pi^2 t}$.}

{Υποδ.: Για τις (β),(γ), ανάπτυξη σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων δηλ. $u(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(t) X_\nu(x)$ κ.λ.π.}

---

(4) Αν $u = u(x,t)$ λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<\infty, \ t>0, \\ u_x(0,t) = -f(t), & u(x,t) \to 0 \text{ όταν } x \to \infty, \\ u(x,0) = 0, & 0<x<\infty, \end{cases}$$

να δείξετε ότι $u(x,t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau$,

στη συνέχεια θέτοντας $z = x/2a\sqrt{t-\tau}$ να δείξετε ότι η u γράφεται: $u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2a\sqrt{t}}^{\infty} f(t - x^2/4a^2z^2) z^{-2} e^{-z^2} dz$.

---

(5) Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα με τη χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών:

(α) $u_t = a^2 u_{xx}$, $0<x<1$, $t>0$

$u(0,t) = \theta$, $u_x(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $0<x<1$, $t>0$.

{Υποδ.: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh(x\sqrt{s})}{s\cosh\beta\sqrt{s}} : s \to t\right\} = 1 + \frac{4}{\nu}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu-1} \cdot \cos\left[\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{\beta}\right] \exp\left[-\frac{(2\nu-1)^2\pi^2 t}{4\beta^2}\right]$.}

(β) $$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<\infty, \ t>0 \\ u(0,t) = 0, \ u(x,t) \to 0, \ u_x(x,t) \to 0 \text{ όταν } x \to \infty, \\ u(x,0) = f(x), & 0<x<\infty \end{cases}$$

{Υποδ.: Χρησιμοποιείστε τον Ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier,

$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]\right\} d\xi$}

Εφαρμογή: $f(x) = 0$ για $0<x<\beta$, $f(x) = \theta$ για $x>\beta$.

(6) Να λυθούν τα Π.Α.Σ.Τ. για την κυματική εξίσωση:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0<x<1, \; t>0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad t>0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0<x<1$$

(α) $f(x)=0$, $g(x)=a$, $0<x<1$

(β) $f(x) = x(1-x)$, $g(x) = 0$ $\quad 0<x<1$

{Απαν.: (α) $u(x,t) = \dfrac{4a}{c\pi^2} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2} \sin(\nu c\pi t)\sin(\nu\pi x)$ (ν περιττός)

(β) $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi^3} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-3} \cos(\nu c\pi t)\sin(\nu\pi x)$ (ν περιττός) .}

{Υποδ.: Μέθοδος Χ.Μ.}

---

(7) Να λυθούν τα Π.Α.Σ.Τ.

(α) $u_{tt} = u_{xx} + 10$, $0<x<1$, $t>0$

$u(0,t) = u_x(1,t) = 0$, $t>0$

$u(x,0) = 2$, $u_t(x,0) = \sin\dfrac{3\pi x}{2}$, $0<x<1$.

{Υποδ.: Θέστε $u(x,t) = S(x) + v(x,t)$ κ.λ.π. Απαν.: $u(x,t) = 2 + \dfrac{2}{3\pi}\sin\left(\dfrac{3\pi t}{2}\right)\sin\dfrac{3\pi x}{2} + \dfrac{160}{\pi^3}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2\nu-1)^3}\left[1-\cos\dfrac{(2\nu-1)\pi t}{2}\right]\cdot\sin\dfrac{2\nu-1}{2}\pi x$.}

(β) $u_{tt} = c^2 u_{xx} - c^2 P\cos\omega t$, $0<x<\pi$, $t>0$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t>0$

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $0<x<\pi$.

{Υποδ.: $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, v λύση του ομογενούς, w μερική λύση της μορφής $w(x,t) = Y(x)\sin\omega t + Z(x)\cos\omega t$}

(γ) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x\cos t, & 0<x<\frac{\pi}{2}, \; t>0 \\ u(0,t) = u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0, & t>0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0<x<\pi/2 \end{cases}$

{Υποδ.: Ανάπτυξη σε σειρές ιδιοσυναρτήσεων $u(x,t) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(t)\, X_\nu(x)$ κ.λ.π. Απαν.: $u(x,t) = \dfrac{1}{2}x\cos x\cos t + \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^\nu \nu}{(4\nu^2-1)^2}\cos(2\nu t)\sin(2\nu x)$.}

(8) Να βρείτε τη λύση των προβλημάτων:

(α) $u_{tt} = u_{xx}$, $0<x<\infty$, $t>0$

$u_x(0,t)=0$, $u(x,t)\to 0$ όταν $x\to\infty$, $t>0$

$u(x,0)=e^{-x}$, $u_t(x,0)=0$

{Απαν.: $u(x,t) = e^{-t}\cosh x$ για $x<t$ και $u(x,t)=e^{-x}\cosh t$ για $x>t$}

(β) $\begin{cases} u_{tt}=c^2 u_{xx}, & -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ u(x,t),\ u_x(x,t)\to 0 & \text{όταν } |x|\to\infty,\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=e^{-|x|}, & x\in\mathbb{R} \end{cases}$

{Απαν.: $u(x,t)=\frac{1}{\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-isx}\sin cst}{s(s^2+1)}\,ds = \frac{2}{\pi c}\int_0^{\infty}\frac{\cos sx\sin sct}{s(s^2+1)}\,ds.$

Υποδ.: Μετασχηματισμός Fourier, $(e^{iA}=\cos A+i\sin A)$.}

(γ) Να λύσετε τη (β) με χρήση του ολοκληρώματος Fourier.

---

(9) Αν η $u=u(x,t)$ είναι λύση του Π.Α.Τ.,

$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}, & -\infty<x<\infty,\ t>0 \quad (\text{ή } -\infty<t<\infty) \\ u(x,t)=u_x(x,t)\to 0 & \text{όταν } |x|\to\infty,\ t>0, \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x), & -\infty<x<\infty, \end{cases}$

Να δείξετε, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier, ότι

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy,\quad c>0.$$

τύπος D'Alembert

Εφαρμογή:

(α) $f(x)=x$, $g(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(β) $f(x)=0$, $g(x)=e^{-|x|}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(γ) $f(x)=0$, $g(x)=\frac{2}{1+x^2}$, στη συνέχεια να βρείτε το $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$.

(δ) Να δείξετε ότι άρτια (περιττά) αρχικά δεδομένα παράγουν άρτιες (περιττές) λύσεις.

(10) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$u_t = 6(u_{xx}+u_{yy}),\ 0<x<2,\ 0<y<3,\ t>0$$

$$u(x,0,t)=u(x,3,t)=u(0,y,t)=u(2,y,t)=0$$

$$u(x,y,0)=4\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\sin(\pi y)-2\sin(\pi x)\sin\left(\frac{2\pi y}{3}\right)$$

{Υποδ.: Μέθοδος Χ.Μ., ... Ιδιοτιμές της $(-\Delta)$. Απαν.:
$u(x,y,t)=4\exp\left[-\pi^2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2\right)6t\right]\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\sin(\pi y)-2\exp\left[-\pi^2\left(1^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)\right.$
$\left.\cdot 6t\right]\sin(\pi x)\sin\left(\frac{2\pi y}{3}\right)$. }

---

(11) Να λυθεί το πρόβλημα Σ.Τ.

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\ 0<x<3\pi,\ 0<y<2\pi,\ 0<z<1,$$

$u(x,y,0)=\sin x\sin y$ και $u=0$ στις έδρες

$z=1,\ x=0,\ x=3\pi,\ y=0,\ y=2\pi$

{Υποδ.: Μέθοδος Χ.Μ.. Απαν.: $u(x,y,z)=\dfrac{1}{\sinh(\sqrt{2})}\cdot$
$\sin(x)\sin(y)\sinh\left(\sqrt{2}(1-z)\right)$. }

---

(12) Με τη μέθοδο της ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων, να λυθούν τα προβλήματα:

(α) $u_{xx}+u_{yy}=-1,\ 0<x<\pi,\ 0<y<1$

$u=0$ στις πλευρές $x=0,\ x=\pi,\ y=0$

$u(x,1)=\sin x$

{Απαν.: $u(x,y)=\dfrac{\sinh y}{\sinh 1}\sin x+\dfrac{16}{\pi^2}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(mx)\sin(n\pi y)}{nm(m^2+n^2\pi^2)}$ (m, n περιττοί) }

(β) $u_{xx}+u_{yy}=-x,\ 0<x<\pi,\ 0<y<\pi$

$u(0,y)=u(\pi,y)=0,\ u(x,0)=1,\ u(x,\pi)=1$

{Υποδ.: Θέστε $u=w+z$ όπου $w_{xx}+w_{yy}=-x$ και $w=0$ για $x=0,\ x=\pi,\ y=0,\ y=\pi$ ενώ $z_{xx}+z_{yy}=0$ και $z=0$ για $x=0,\pi$, $z=1$ για $y=0,\pi$.
Απαν.: $u(x,y)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sinh(ny)+\sinh(n(\pi-y))}{n\sinh(n\pi)}\sin(nx)+\dfrac{4\sin 3y}{\pi}\sum_{m=1}\dfrac{\sin(mx)}{m(m^2+9)}$ (περιττός) (περιττός) }

(13) Τύπος Poisson στο ημιεπίπεδο:

Αν η $u=u(x,y)$ είναι λύση του προβλήματος:

$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad -\infty<x<\infty \quad , \quad 0<y<\infty$

$u(x,0)=f(x) \quad , \quad -\infty<x<\infty$ και $u(x,y)\to 0$ όταν $x^2+y^2\to\infty$

τότε $u(x,y)=\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2}$, $y>0$, (Poisson).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρείτε την $u(x,y)$ αν $f(x)=\begin{cases}\theta & \text{για } |x|<\beta\\ 0 & \text{για } |x|>\beta.\end{cases}$

---

(14) Τύπος Poisson για τον κυκλικό δίσκο:

Αν $u=u(r,\theta)$ είναι λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \quad , \quad 0<r<R, \quad -\pi<\theta<\pi, \\ u(R,\theta)=f(\theta) \quad , \quad -\pi<\theta<\pi \end{cases}$$

, ($u(r,\theta)$ φραγμένη όταν $r\to 0+$),

τότε η $u(r,\theta)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}(a_\nu\cos\nu\theta+\beta_\nu\sin\nu\theta)$,

όπου τα a_ν, $\nu=0,1,2,\dots$, β_ν, $\nu=1,2,$ δίνονται από τους τύπους Euler-Fourier, μπορεί να γραφτεί και υπό τη μορφή:

$$u(r,\theta)=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(R,\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi$$

(Poisson)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρείτε την $u(r,\theta)$ αν

$u(R,\theta)=T$, $0<\theta<\pi$ και $u(R,\theta)=0$, $-\pi\le\theta\le 0$, $R=1$.

{Απαν.: $u(r,\theta)=T-\dfrac{T}{\pi}\arctan\left(\dfrac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right)$, Υποδ.: θέστε $\varphi-\theta=\tan\dfrac{z}{2}$.}
