ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ 2013 ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ, ΟΠΤΙΚΕΣ, ΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ» ΤΟΥ ΠΑΤΡΙΚ ΑΣΕΝΟΒ (OR STEVE HARRIS FOR MY FRIENDS FROM THE SHMMY FORUM)

Θέμα 1^{ον}: Έχουμε ιοντικό υλικό με δύο άτομα ανά μόριο. Θεωρούνται γνωστά τα εξής: Ανηγμένη μάζα ιόντων M, φορτίο e, πυκνότητα μορίων N και μια ιδιοσυχνότητα ω_0 με απώλειες γ.

(α) Από μια εναλλακτική μορφή της σχέσης Clausius-Mossotti έχουμε:

$$\frac{\varepsilon_r(\omega)-1}{\varepsilon_r(\omega)+2}=\frac{Na(\omega)}{3\varepsilon_0}\ (1)$$

Όμως για την πολωσιμότητα ισχύει στην περίπτωση ιόντων με δύο άτομα ανά μόριο ανηγμένης μάζας M ό,τι ισχύει και στην περίπτωση σωματιδίων ενός είδους μάζας m:

$$a(\omega)=\frac{e^2}{M}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}\,(2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{\varepsilon_r(\omega)-1}{\varepsilon_r(\omega)+2}=\frac{N}{3\varepsilon_0}\frac{e^2}{M}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}=>$$

$$\varepsilon_r(\omega)-1=\frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}(\varepsilon_r(\omega)+2)=>$$

$$\varepsilon_r(\omega)-\frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}\varepsilon_r(\omega)=1+2\frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}=>$$

$$\varepsilon_r(\omega)\frac{1}{3\varepsilon_0 M}\frac{3\varepsilon_0 M(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)-Ne^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}=\frac{1}{3\varepsilon_0 M}\frac{3\varepsilon_0 M(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)+2Ne^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}=>$$

$$\varepsilon_r(\omega)=\frac{3\varepsilon_0 M(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)+2Ne^2}{3\varepsilon_0 M(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)-Ne^2}=>$$

$$\varepsilon_r(\omega)=\frac{3\varepsilon_0 M(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)-Ne^2+3Ne^2}{3\varepsilon_0 M(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)-Ne^2}=>$$

$$\varepsilon_r(\omega) = \frac{3\varepsilon_0 M(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma) - Ne^2}{3\varepsilon_0 M(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma) - Ne^2} + \frac{3Ne^2}{3\varepsilon_0 M(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma) - Ne^2} =>$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M}\frac{1}{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2 - i\omega\gamma} \ (3)$$

Άρα η σχέση που περιγράφει τη διηλεκτρική σταθερά συναρτήσει της συχνότητας ω είναι:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\varepsilon_r(\omega) =>$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\left[1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M}\frac{1}{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2 - i\omega\gamma}\right](4)$$

(β) Από την (3) έχουμε:

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_r^{'}(\omega) + i\varepsilon_r^{''}(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M}\frac{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2 + i\omega\gamma}{\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} =>$$

$$\varepsilon_r^{'}(\omega) + i\varepsilon_r^{''}(\omega) =$$

$$1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M}\frac{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} + i\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M}\frac{\omega\gamma}{\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} =>$$

$$\varepsilon_r^{'}(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M}\frac{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} \ (5)$$

$$\varepsilon_r^{''}(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M}\frac{\omega\gamma}{\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}(6)$$

Ο μιγαδικός δείκτης διάθλασης συνδέεται με τη σχετική διηλεκτρική σταθερά ε_r με την εξής σχέση:

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_r^{'}(\omega) + i\varepsilon_r^{''}(\omega) = (n + ik)^2 = n^2 - k^2 + i2nk \ (7)$$

Από τις (5), (6) και (7) έχουμε λοιπόν:

$$\varepsilon_r^{'}(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M}\frac{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} = n^2 - k^2 \ (8)$$

$$\varepsilon_r^{''}(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M}\frac{\omega\gamma}{\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} = 2nk \ (9)$$

Επιπλέον η ανακλαστικότητα R δίνεται από τη σχέση:

$$R = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2} \ (10)$$

Στην περίπτωση που $\omega, \gamma \ll \omega_0$ έχουμε από τις (8) και (9):

$$\varepsilon_r^{'}(\omega) \cong 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}}{\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}\right)^2} = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{1}{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}} = n^2 - k^2 \ (11)$$

$$\varepsilon_r^{''}(\omega) \cong 0 = 2nk => n = 0 \text{ ή } k = 0 \ (12)$$

Έχοντας αντίληψη των τάξεων μεγέθους όμως, εύκολα συμπεραίνουμε ότι $\omega_0^2 > \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M} => \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{1}{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}} > 0 => \varepsilon_r^{'}(\omega) = n^2 - k^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{1}{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}} > 0$. Άρα αναγκαστικά πρέπει $k = 0$. Εξάλλου εφόσον δεν θα' χουμε απώλειες στο σύστημα (γ πολύ μικρό) είναι λογικό να έχουμε μόνο πραγματικό μέρος δείκτη διάθλασης. Έτσι σύμφωνα με την (11) έχουμε για τον μιγαδικό δείκτη διάθλασης:

$$\eta = n + ik \cong n \cong \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{1}{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}}} \ (13)$$

Επομένως έχουμε σύμφωνα με τις (10) και (13) για την ανακλαστικότητα:

$$R \cong \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{1}{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}}} - 1\right)^2}{\left(\sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{1}{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}}} + 1\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{1}{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{1}{\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}}} + 1}\right)^2 \ (14)$$

(γ) Στην περίπτωση που $\omega \gg \omega_0 \gg \gamma$ έχουμε από τις (8) και (9), εφόσον θα ισχύει αναγκαστικά και $\omega^2 \gg \omega_0^2, \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 M}$:

$$\varepsilon_r^{'}(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{-\omega^2}{(-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} = n^2 - k^2 =>$$

$$\varepsilon_r^{'}(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{\omega^2}{(\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} = n^2 - k^2 =>$$

$$\varepsilon_r^{'}(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} = n^2 - k^2 =>$$

$$\varepsilon_r^{'}(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M \omega^2} = n^2 - k^2 =>$$

$$\varepsilon_r^{'}(\omega) = 1 - \frac{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M}}{\omega^2} = n^2 - k^2 =>$$

$$\varepsilon_r^{'}(\omega) \cong 1 = n^2 - k^2 (15)$$

$$\varepsilon_r^{''}(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{\omega\gamma}{(-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} = 2nk =>$$

$$\varepsilon_r^{''}(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{\omega\gamma}{(\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} = 2nk =>$$

$$\varepsilon_r^{''}(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{\gamma}{\omega^3 + \omega\gamma^2} = 2nk =>$$

$$\varepsilon_r^{''}(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{\gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)} = 2nk =>$$

$$\varepsilon_r^{''}(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 M} \frac{\gamma}{\omega\omega^2} = 2nk =>$$

$$\varepsilon_r^{''}(\omega) \cong 0 = 2nk => n = 0 \text{ ή } k = 0 \ (16)$$

Όμοια με πριν βρίσκουμε ότι χρειάζεται να ισχύει $k = 0$. Άρα σύμφωνα με την (15) $n^2 \cong 1$. Έτσι σύμφωνα με την (11) έχουμε για τον μιγαδικό δείκτη διάθλασης:

$$\eta = n + ik \cong n = 1 \ (17)$$

Επομένως έχουμε σύμφωνα με τις (10) και (17) για την ανακλαστικότητα:

$$R \cong \frac{(1-1)^2}{(1+1)^2} = \left(\frac{0}{2}\right)^2 = 0$$

Θέμα 2ον: Η ελεύθερη ενέργεια μιας αλλαγής φάσης 1ης τάξης αναπτύσσεται σε δυνάμεις της πόλωσης ως εξής:

$$F(P,T) = F_0 + \frac{a}{2}(T-\theta)P^2 + \frac{c_2}{4}P^4 + \frac{c_3}{6}P^6 + \cdots, a, c_3 > 0, c_2 < 0 \ (1)$$

(α) Μελετάμε την αυθόρμητη πόλωση $P_s(T)$ που εμφανίζεται για $T<T_c$ κρατώντας μόνο τους πρώτους 3 όρους. Σύμφωνα με την (1) θα ισχύει:

$$\frac{\partial F}{\partial P} = a(T-\theta)P + c_2P^3 + c_3P^5 = P[a(T-\theta) + c_2P^2 + c_3P^4] \ (2)$$

Όμως δεδομένου ότι $\left.\frac{\partial F}{\partial P}\right|_{P=P_s} = 0$ και $P_s \neq 0$ για το ελάχιστο της F για $T<T_c$, τότε σύμφωνα με την (2) θα έχουμε:

$$a(T-\theta) + c_2P_s^2 + c_3P_s^4 = 0$$

Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση σαν τριώνυμο με μεταβλητή το P_s^2:

$$\Delta = c_2^2 - 4a(T-\theta)c_3$$

$$P_s^2 = \frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4a(T-\theta)c_3}}{2c_3} = \frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2\left(1 - \frac{4a(T-\theta)c_3}{c_2^2}\right)}}{2c_3}$$

$$= \frac{-c_2 \pm c_2\sqrt{1-\frac{4a(T-\theta)c_3}{c_2^2}}}{2c_3} = -\frac{c_2}{2c_3}\left\{1 \mp \left[1-\frac{4a(T-\theta)c_3}{c_2^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

Όμως αποδεκτή είναι μόνο η θετική λύση, αφού $P_s^2 > 0$. Κατά συνέπεια:

$$P_s^2(T) = -\frac{c_2}{2c_3}\left\{1 + \left[1-\frac{4ac_3}{c_2^2}(T-\theta)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \ (3)$$

(β) Στη γραφική παράσταση ($F\text{-}F_0$) – P όλες οι καμπύλες περνάνε από την αρχή των αξόνων ($F\text{-}F_0$, P) = (0, 0). Μελετάμε την μη τετριμμένη περίπτωση του μηδενισμού της ποσότητας $F\text{-}F_0$ για μη μηδενικό P, για την θερμοκρασία μετάβασης $T = T_c$. Από την (1) έχουμε λοιπόν:

$$F - F_0 = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{a}{2}(T_c-\theta)P^2 + \frac{c_2}{4}P^4 + \frac{c_3}{6}P^6 + \cdots = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{P^2}{2}\left[a(T_c-\theta) + \frac{c_2}{2}P^2 + \frac{c_3}{3}P^4 + \cdots\right] = 0 \Rightarrow$$
$$a(T_c-\theta) + \frac{c_2}{2}P^2 + \frac{c_3}{3}P^4 + \cdots = 0 \ (4)$$

Επίσης, ως γνωστόν η κλίση στα σημεία μηδενισμού της $F\text{-}F_0$ πάνω στον οριζόντιο άξονα θα είναι μηδενική, καθώς αυτά αντιστοιχούν σε ολικά ελάχιστα. Κατά συνέπεια έχουμε από την (2) για τα σημεία μηδενισμού της $F\text{-}F_0$ εκτός της αρχής των αξόνων:

$$a(T_c-\theta) + c_2P^2 + c_3P^4 + \cdots = 0 \ (5)$$

Αφαιρώντας την (4) από την (5) κατά μέλη προκύπτει για τους 3 πρώτους όρους του κάθε αναπτύγματος:

$$a(T_c-\theta) + c_2P^2 + c_3P^4 - a(T_c-\theta) - \frac{c_2}{2}P^2 - \frac{c_3}{3}P^4 = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{c_2}{2}P^2 + \frac{2c_3}{3}P^4 = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{c_2}{2} + \frac{2c_3}{3}P^2 = 0 \Rightarrow$$
$$P^2 = -\frac{3c_2}{4c_3} \ (6)$$

Από την (1) έχουμε για τα παραπάνω ελάχιστα, κρατώντας όρους μέχρι και τέταρτης δύναμης του P:

$$F - F_0 = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{a}{2}(T_c-\theta)P^2 + \frac{c_2}{4}P^4 + \frac{c_3}{6}P^6 = 0 \Rightarrow$$
$$a(T_c-\theta) + \frac{c_2}{2}P^2 + \frac{c_3}{3}P^4 = 0 \ (7)$$

Αντικαθιστώντας την (6) στην (7) βρίσκουμε:

$$a(T_c-\theta)+\frac{c_2}{2}\left(-\frac{3c_2}{4c_3}\right)+\frac{c_3}{3}\left(-\frac{3c_2}{4c_3}\right)^2=0 =>$$

$$a(T_c-\theta)-\frac{3c_2^2}{8c_3}+\frac{c_3}{3}\frac{9c_2^2}{16c_3^2}=0 =>$$

$$a(T_c-\theta)-\frac{6c_2^2}{16c_3}+\frac{3c_2^2}{16c_3}=0 =>$$

$$a(T_c-\theta)-\frac{3c_2^2}{16c_3}=0 =>$$

$$a(T_c-\theta)=\frac{3c_2^2}{16c_3}\ (8) =>$$

$$T_c-\theta=\frac{3c_2^2}{16ac_3} =>$$

$$T_c=\theta+\frac{3}{16}\frac{c_2^2}{ac_3}\ (9)$$

(γ) Για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$E=\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)_T\ (10)$$

Από τις (2) και (10) έχουμε:

$$E=a(T-\theta)P+c_2P^3+c_3P^5+\cdots(11)$$

Συνεπώς έχουμε ότι:

$$\frac{1}{\chi}=\varepsilon_0\frac{dE}{dP}=\varepsilon_0[a(T-\theta)+3c_2P^2+5c_3P^4+\cdots]\ (12)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (12) έχουμε ότι:

$$\frac{1}{\chi}=\varepsilon_0\left[a(T-\theta)+3c_2\left\{-\frac{c_2}{2c_3}\left\{1+\left[1-\frac{4ac_3}{c_2^2}(T-\theta)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\right\}\right.$$

$$\left.+5c_3\left\{-\frac{c_2}{2c_3}\left\{1+\left[1-\frac{4ac_3}{c_2^2}(T-\theta)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\right\}^2+\cdots\right]=$$

$$=\varepsilon_0\left[a(T-\theta)-\frac{3c_2^2}{2c_3}\left\{1+\left[1-\frac{4ac_3}{c_2^2}(T-\theta)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{5c_3c_2^2}{4c_3^2}\left\{1+2\left[1-\frac{4ac_3}{c_2^2}(T-\theta)\right]^{\frac{1}{2}}+1-\frac{4ac_3}{c_2^2}(T-\theta)\right\}+\cdots\right]=$$

$$= \varepsilon_0 \left[a(T-\theta) - \frac{3c_2^2}{2c_3} \left\{ 1 + \left[1 - \frac{4ac_3}{c_2^2}(T-\theta) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{5c_2^2}{4c_3} \left\{ 2 + 2\left[1 - \frac{4ac_3}{c_2^2}(T-\theta) \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{4ac_3}{c_2^2}(T-\theta) \right\} + \cdots \right] \quad (13)$$

Για $T < T_c$ κρατώντας μόνο τους 3 πρώτους όρους του αναπτύγματος, έχουμε:

$$\frac{1}{\chi} = \varepsilon_0 a(T-\theta) - \varepsilon_0 \frac{3c_2^2}{2c_3} \left\{ 1 + \left[1 - \frac{4ac_3}{c_2^2}(T-\theta) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} + \varepsilon_0 \frac{5c_2^2}{2c_3} \left\{ 1 + \left[1 - \frac{4ac_3}{c_2^2}(T-\theta) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$- 5\varepsilon_0 \alpha(T-\theta) =$$

$$= -4\varepsilon_0 \alpha(T-\theta) + \varepsilon_0 \frac{c_2^2}{c_3} \left\{ 1 + \left[1 - \frac{4ac_3}{c_2^2}(T-\theta) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Για $T > T_c$ η επαγόμενη πόλωση P είναι αρκετά μικρή για ηλεκτρικά πεδία μικρής έντασης, ώστε στο ανάπτυγμα (12) ως προς P να μπορεί να αγνοήσει κανείς όρους δεύτερης ή ανώτερης τάξης. Συνεπώς:

$$\frac{1}{\chi} = \varepsilon_0 a(T-\theta)$$

Θεωρώντας τα όρια $T \to T_c^- \equiv T_c - \eta, \eta > 0, \eta \ll$, βρίσκουμε θέτοντας τις (6) και (8) στην (12) και κρατώντας τους 3 πρώτους όρους:

$$\lim_{T \to T_c^-} \frac{1}{\chi} = \varepsilon_0 [a(T_c - \theta) + 3c_2 P_s^2(T_c) + 5c_3 P_s^4(T_c)] =>$$

$$\lim_{T \to T_c^-} \frac{1}{\chi} = \varepsilon_0 \left[a(T_c - \theta) + 3c_2 \left(-\frac{3c_2}{4c_3} \right) + 5c_3 \left(-\frac{3c_2}{4c_3} \right)^2 \right] =>$$

$$\lim_{T \to T_c^-} \frac{1}{\chi} = \varepsilon_0 \left[a(T_c - \theta) - \frac{9c_2^2}{4c_3} + 5c_3 \frac{9c_2^2}{16c_3^2} \right] =>$$

$$\lim_{T \to T_c^-} \frac{1}{\chi} = \varepsilon_0 \left[a(T_c - \theta) - \frac{36c_2^2}{16c_3} + \frac{45c_2^2}{16c_3} \right] =>$$

$$\lim_{T \to T_c^-} \frac{1}{\chi} = \varepsilon_0 \left[a(T_c - \theta) + \frac{9c_2^2}{16c_3} \right] =>$$

$$\lim_{T \to T_c^-} \frac{1}{\chi} = \varepsilon_0 \left[a(T_c - \theta) + 3\frac{3c_2^2}{16c_3} \right] =>$$

$$\lim_{T \to T_c^-} \frac{1}{\chi} = \varepsilon_0 [a(T_c - \theta) + 3a(T_c - \theta)] =>$$

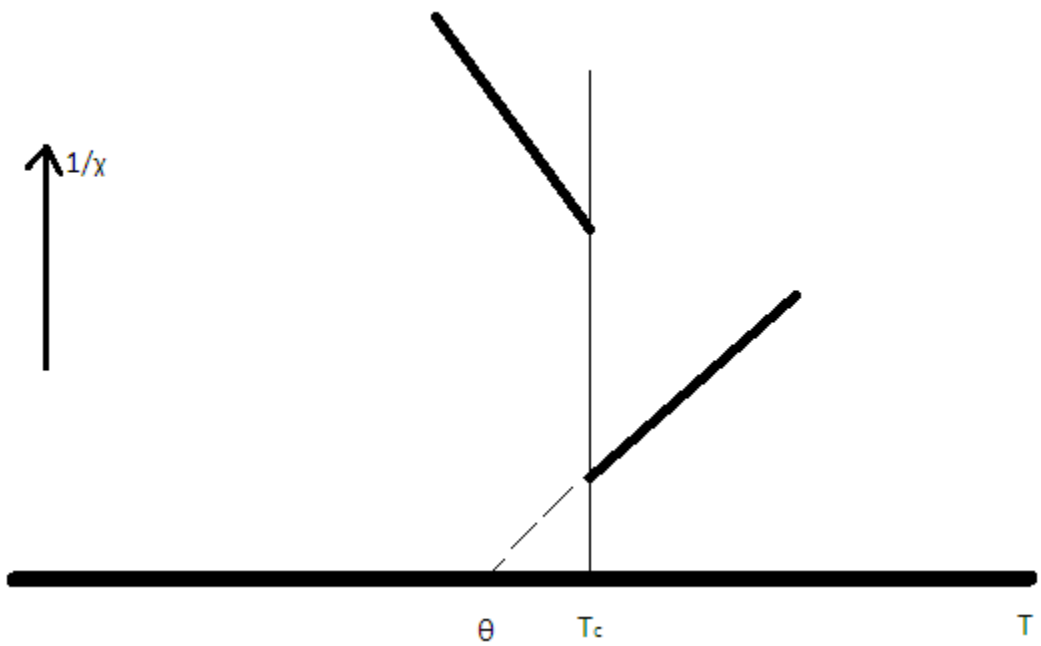
$$\lim_{T \to T_c^-} \frac{1}{\chi} = 4\varepsilon_0 a(T_c - \theta)$$

Προφανώς θα ισχύει για $T \to T_c^+ \equiv T_c + \eta, \eta > 0, \eta \ll$:

$$\lim_{T \to T_c^+} \frac{1}{\chi} = \varepsilon_0 a (T_c - \theta)$$

Με βάση τα παραπάνω σχεδιάζουμε την συνάρτηση 1/χ κοντά στην T_c. Από τα 2 παραπάνω όρια φαίνεται ότι υπάρχει μια απότομη μεταβολή στην θερμοκρασία αυτή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι κοντά στο T = 0 και μακριά από την T = T_c η καμπύλη δεν θα προσεγγίζει ευθεία, εξαιτίας του όρου $\varepsilon_0 \frac{c_2^2}{c_3} \left\{ 1 + \left[1 - \frac{4ac_3}{c_2^2} (T - \theta) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$.



Θέμα 3ον: Έχουμε ένα αγώγιμο υλικό που βρίσκεται σε θερμοκρασία T = 0 K υπό ασθενές μαγνητικό πεδίο B. Οι φορείς του είναι ηλεκτρόνια και μπορούν να θεωρηθούν ένα σύστημα πυκνότητας N μη αλληλεπιδρόντων φερμιονίων σπιν ½, με συγκεντρώσεις άνω-σπιν N_+ και κάτω-σπιν N_-, που περιγράφονται μέσω μιας παραμέτρου x ως εξής:

$$N_\pm = \frac{N(1 \pm x)}{2} \ (1)$$

Η πυκνότητα ενεργειακών καταστάσεων είναι ανάλογη του $\sqrt{E}$. Δηλαδή ισχύει:

$$g(E) = A\sqrt{E}, A = \sigma\tau\alpha\theta. (2)$$

Έχουμε δηλαδή για τα ηλεκτρόνια με σπιν ομόρροπο ως προς το πεδίο:

$$g_\uparrow(E) = g(E + \mu_B B) \ (3)$$

Ανάλογα έχουμε για σπιν αντίρροπο ως προς το πεδίο:

$$g_\downarrow(E) = g(E - \mu_B B) \ (4)$$

(α) Εφόσον βρισκόμαστε σε θερμοκρασία T = 0 K, θα ισχύει $E_F = \mu$, όπου μ το χημικό δυναμικό. Συνεπώς για τον αριθμό ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου θα έχουμε σύμφωνα με την (2):

$$n = \frac{N}{V} = \int dn(E) = \int_0^{E_F} 2g(E)dE = \int_0^{E_F} 2A\sqrt{E}dE = 2A\frac{E_F^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4A}{3}E_F^{\frac{3}{2}} =>$$

$$AV = \frac{3N}{4E_F^{\frac{3}{2}}} \ (5)$$

Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου θα ισούται με την εσωτερική ενέργεια των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου, δηλαδή θα έχουμε για μια τυχαία θερμοκρασία T:

$$K_\pm = \int_0^\infty Ef_0(E)Vdn(E) = \int_0^\infty Ef_0(E)V2g(E)dE \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$K_\pm = \int_0^\infty Ef_0(E)V2A\sqrt{E}dE = 2VA\int_0^\infty E^{\frac{3}{2}}f_0(E)dE,$$

όπου $f_0(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}}-1}$ η συνάρτηση κατανομής για τα ηλεκτρόνια. Σύμφωνα με το ανάπτυγμα Sommerfeld έχουμε για μια συνάρτηση H(E):

$$I = \int_0^\infty H(E)f_0dE = \int_0^\mu H(E)dE + G(E,T),$$

όπου $G(E,T)$ μια συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας και της ενέργειας, η οποία μηδενίζεται για T = 0 K. Συνεπώς για T = 0 K:

$$K_\pm = 2VA\int_0^\mu H(E)dE = 2VA\int_0^{E_F'} E^{\frac{3}{2}}dE = 2VA\frac{E_F'^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{4E_F'^{\frac{5}{2}}}{5}AV \overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$K_\pm = \frac{4E_F'^{\frac{5}{2}}}{5}\frac{3N_\pm}{4E_F'^{\frac{3}{2}}} = \frac{3N_\pm}{5}E_F' \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$K_\pm = \frac{3E_F'}{5}\frac{N(1\pm x)}{2} \ (6)$$

Όμως για τον κυματάριθμο Fermi γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$k_F' = (3\pi^2 N_\pm)^{\frac{1}{3}} =>$$

$$E_F' = \frac{\hbar^2 k_F'^2}{2m} = \frac{\hbar^2(3\pi^2 N_\pm)^{\frac{2}{3}}}{2m} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$E_F' = \frac{\hbar^2\left(3\pi^2\frac{N(1\pm x)}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{2m} = \frac{\hbar^2\left(3\pi^2\frac{N}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{2m}(1\pm x)^{\frac{2}{3}} \ (7)$$

Αν ορίσουμε την ενέργεια E_F ως την ενέργεια σε μηδενικό πεδίο, όταν δηλαδή $N_\pm = \frac{N}{2}$, τότε προφανώς θα ισχύει:

$$E_F = \frac{\hbar^2 \left(3\pi^2 \frac{N}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{2m} \ (8)$$

Αντικαθιστώντας την (8) στην (7) προκύπτει:

$$E_F^{'} = E_F(1 \pm x)^{\frac{2}{3}} \ (9)$$

Αντικαθιστώντας την (9) στην (6) προκύπτει:

$$K_{\pm} = \frac{3}{10} N E_F (1 \pm x)^{\frac{5}{3}} \ (10)$$

Για την δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου γνωρίζουμε ότι θα ισχύει:

$$U_{\pm} = -\frac{\overrightarrow{m_{\pm}} \cdot \vec{B}}{V} = -N_{\pm}\mu_B B(\pm)1 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$U_{\pm} = \mp \frac{N(1 \pm x)}{2} \mu_B B = \mp \frac{N}{2} \mu_B B(1 \pm x) \ (11)$$

Για την συνολική ενέργεια (κινητική και δυναμική) ανά μονάδα όγκου του κάθε υποσυστήματος (πάνω και κάτω σπιν) θα έχουμε:

$$E_{\pm} = K_{\pm} + U_{\pm} \overset{(10),(11)}{\Longrightarrow}$$

$$E_{\pm} = \frac{3}{10} N E_F (1 \pm x)^{\frac{5}{3}} \mp \frac{N}{2} \mu_B B(1 \pm x) \ (12)$$

(β) Η συνολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του συστήματος θα ισούται με:

$$E = E_+ + E_- \overset{(12)}{\Longrightarrow}$$

$$E = \frac{3}{10} N E_F (1 + x)^{\frac{5}{3}} - \frac{N}{2} \mu_B B(1 + x) + \frac{3}{10} N E_F (1 - x)^{\frac{5}{3}} + \frac{N}{2} \mu_B B(1 - x) =$$

$$= \frac{3}{10} N E_F \left[(1 + x)^{\frac{5}{3}} + (1 - x)^{\frac{5}{3}}\right] - \frac{N}{2} \mu_B B - \frac{N}{2} \mu_B B x + \frac{N}{2} \mu_B B - \frac{N}{2} \mu_B B x =$$

$$= \frac{3}{10} N E_F \left[(1 + x)^{\frac{5}{3}} + (1 - x)^{\frac{5}{3}}\right] - N \mu_B B x \ (13)$$

Είναι επιθυμητή η ελαχιστοποίηση της ενέργειας ανά μονάδα όγκου ως προς την παράμετρο x. Συνεπώς πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0 \overset{(13)}{\Longrightarrow} \frac{3}{10} N E_F \left[\frac{5}{3}(1 + x)^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{3}(1 - x)^{\frac{2}{3}}\right] - N \mu_B B = 0 =>$$

$$\frac{3}{10} N E_F \left[\frac{5}{3}(1 + x)^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{3}(1 - x)^{\frac{2}{3}}\right] = N \mu_B B =>$$

$$\frac{1}{2} E_F \left[(1 + x)^{\frac{2}{3}} - (1 - x)^{\frac{2}{3}}\right] = \mu_B B =>$$

$$(1 + x)^{\frac{2}{3}} - (1 - x)^{\frac{2}{3}} = \frac{2\mu_B B}{E_F}$$

Αναπτύσσουμε τα $(1 + x)^{2/3}$, $(1 - x)^{2/3}$ κατά Taylor, μια και το x είναι μια ποσότητα μικρότερη του 1, και έτσι βρίσκουμε:

$$\left(1 + \frac{2x}{3} + \cdots\right) - \left(1 - \frac{2x}{3} + \cdots\right) = \frac{2\mu_B B}{E_F} =>$$

$$\frac{2\mu_B B}{E_F} \cong 2\frac{2x}{3} =>$$
$$x \cong \frac{3\mu_B B}{2E_F} \ (14)$$

Για την μαγνήτιση γνωρίζουμε ότι θα ισχύει:

$$M = N_+\mu_B + N_-(-\mu_B) = \mu_B(N_+ - N_-) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$
$$M = \mu_B\left(\frac{N(1+x)}{2} - \frac{N(1-x)}{2}\right) = \mu_B\frac{N}{2}(1+x-1+x) = \mu_B\frac{N}{2}2x = \mu_B Nx \overset{(14)}{\Longrightarrow}$$
$$M = \mu_B N\frac{3\mu_B B}{2E_F} => M = \frac{3\mu_B^2 NB}{2E_F} \ (15)$$

(γ) Υπάρχει αλληλεπίδραση ανταλλαγής στους φορείς με ομόρροπα σπιν τιμής –V, όπου V>0.

Τότε, αν Ω ο συνολικός όγκος του υλικού, ο αριθμός των ζευγών ηλεκτρονίων με παράλληλα άνω-σπιν θα είναι $\frac{N_+\Omega(N_+\Omega-1)}{2} = \frac{(N_+\Omega)^2 - N_+\Omega}{2} \cong \frac{1}{2}(N_+\Omega)^2$, αφού μελετάμε πολύ μεγάλο αριθμό σωματιδίων. Άρα ο αριθμός των ζευγών ηλεκτρονίων με παράλληλα άνω-σπιν θα είναι, σύμφωνα με την (1), $\frac{\Omega^2}{2}\left(\frac{N(1+x)}{2}\right)^2 = \frac{\Omega^2}{2}\frac{1}{4}N^2(1+x)^2 = \Omega^2\frac{1}{8}N^2(1+x)^2$. Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι ο αριθμός των ζευγών ηλεκτρονίων με παράλληλα κάτω-σπιν θα είναι $\Omega^2\frac{1}{8}N^2(1-x)^2$. Θεωρούμε ότι η αλληλεπίδραση ανταλλαγής έχει τέτοιες διαστάσεις και είναι έτσι προσαρμοσμένη στον όγκο του υλικού μας, ώστε να υπολογίζουμε όλες τις ενέργειες ανά μονάδα όγκου. Συνεπώς η V θα πρέπει να έχει διαστάσεις ενέργειας επί όγκο, ώστε να βρούμε την ενέργεια ανταλλαγής ανά μονάδα όγκου. Έτσι, λοιπόν, η ενέργεια ανταλλαγής ανά μονάδα όγκου μεταξύ των άνω-σπιν και κάτω-σπιν αντίστοιχα θα είναι ίση με:

$$E_{exch\pm} = -\frac{1}{8}N^2V(1\pm x)^2 \ (16)$$

Επομένως η μεταβολή στην τιμή της συνολικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου θα είναι ίση με:

$$\Delta E = E_{exch+} + E_{exch-} \overset{(16)}{\Longrightarrow}$$
$$\Delta E = -\frac{1}{8}N^2V(1+x)^2 - \frac{1}{8}N^2V(1-x)^2 = -\frac{1}{8}N^2V[(1+x)^2 + (1-x)^2] =$$
$$= -\frac{1}{8}N^2V(1+2x+x^2+1-2x+x^2) = -\frac{1}{8}N^2V(2+2x^2) = -\frac{1}{4}N^2V - \frac{1}{4}N^2Vx^2 \ (17)$$

Η καινούργια συνολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του συστήματος θα είναι σύμφωνα με τις (13) και (17):

$$E' = E + \Delta E = \frac{3}{10}NE_F\left[(1+x)^{\frac{5}{3}} + (1-x)^{\frac{5}{3}}\right] - N\mu_B Bx - \frac{1}{4}N^2V - \frac{1}{4}N^2Vx^2 \ (18)$$

Είναι επιθυμητή η ελαχιστοποίηση της ενέργειας ανά μονάδα όγκου ως προς την παράμετρο x. Συνεπώς πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\partial E'}{\partial x} = 0 \overset{(18)}{\Longrightarrow} \frac{3}{10} N E_F \left[\frac{5}{3}(1+x)^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{3}(1-x)^{\frac{2}{3}}\right] - N\mu_B B - \frac{1}{2}N^2 V x = 0 =>$$

$$\frac{1}{2} N E_F \left[(1+x)^{\frac{2}{3}} - (1-x)^{\frac{2}{3}}\right] - N\mu_B B - \frac{1}{2}N^2 V x = 0$$

Αναπτύσσουμε τα $(1 + x)^{2/3}$, $(1 - x)^{2/3}$ κατά Taylor, μια και το x είναι μια ποσότητα μικρότερη του 1, και έτσι βρίσκουμε:

$$\frac{1}{2} N E_F \left[\left(1 + \frac{2x}{3} + \cdots\right) - \left(1 - \frac{2x}{3} + \cdots\right)\right] - N\mu_B B - \frac{1}{2}N^2 V x = 0 =>$$

$$\frac{1}{2} N E_F 2\frac{2x}{3} - \frac{1}{2}N^2 V x \cong N\mu_B B =>$$

$$\left(E_F \frac{2}{3} - \frac{1}{2}NV\right) x \cong \mu_B B =>$$

$$\left(2E_F - \frac{3}{2}NV\right) x \cong 3\mu_B B =>$$

$$x \cong \frac{3\mu_B B}{2E_F - \frac{3}{2}NV} \quad (19)$$

Για την καινούργια μαγνήτιση γνωρίζουμε ότι θα ισχύει:

$$M' = N_+\mu_B + N_-(-\mu_B) = \mu_B(N_+ - N_-) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$M' = \mu_B \left(\frac{N(1+x)}{2} - \frac{N(1-x)}{2}\right) = \mu_B \frac{N}{2}(1 + x - 1 + x) = \mu_B \frac{N}{2} 2x = \mu_B N x \overset{(19)}{\Longrightarrow}$$

$$M' = \mu_B N \frac{3\mu_B B}{2E_F - \frac{3}{2}NV} => M' = \frac{3\mu_B^2 N B}{2E_F - \frac{3}{2}NV} \quad (20)$$

Η μεταβολή της μαγνήτισης θα είναι ίση με:

$$\Delta M = M' - M \overset{(15),(20)}{\Longrightarrow} \Delta M = \frac{3\mu_B^2 N B}{2E_F - \frac{3}{2}NV} - \frac{3\mu_B^2 N B}{2E_F} =>$$

$$\Delta M = \frac{2E_F 3\mu_B^2 N B}{2E_F\left(2E_F - \frac{3}{2}NV\right)} - \frac{3\mu_B^2 N B\left(2E_F - \frac{3}{2}NV\right)}{2E_F\left(2E_F - \frac{3}{2}NV\right)} =>$$

$$\Delta M = \frac{2E_F 3\mu_B^2 N B - 2E_F 3\mu_B^2 N B + 3\mu_B^2 N B \frac{3}{2}NV}{2E_F\left(2E_F - \frac{3}{2}NV\right)} = \frac{3\mu_B^2 N B \frac{3}{2}NV}{2E_F\left(\frac{4E_F}{2} - \frac{3}{2}NV\right)} =>$$

$$\Delta M = \frac{9\mu_B^2 N^2 B V}{2E_F(4E_F - 3NV)}$$

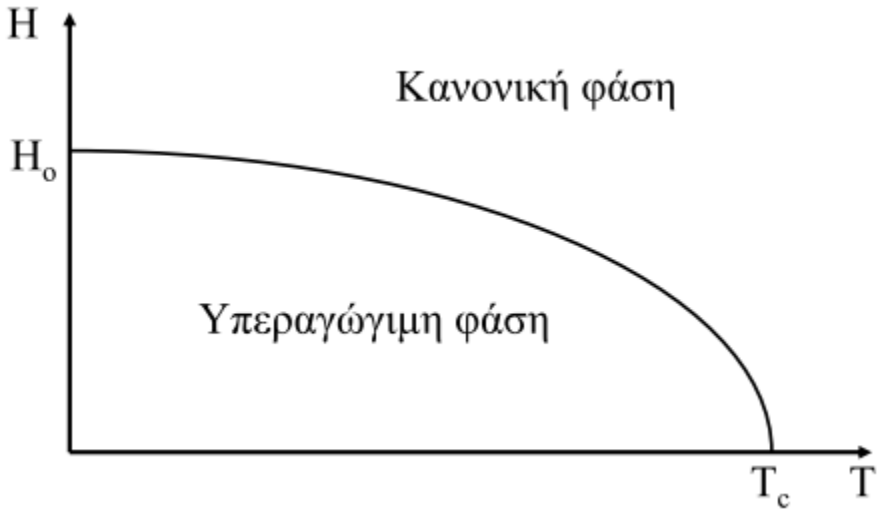
Σημείωση: Στην παραπάνω άσκηση όλα τα μεγέθη που είναι εκφρασμένα ανά μονάδα όγκου μπορούν να υπολογισθούν επακριβώς αν θεωρηθεί γνωστός, ή αν δοθεί από την υπόθεση, ο όγκος που καταλαμβάνει το σύστημα.

Θέμα 4^{ον}: (α) Η βασική διαφορά ανάμεσα σε έναν υπεραγωγό και έναν τέλειο αγωγό μηδενικής αντίστασης έγκειται στο γεγονός ότι μετά την ψύξη του σε χαμηλές θερμοκρασίες, ο τέλειος αγωγός παραμένει στην αρχική κατάσταση που είχε πριν την ψύξη, ενώ ένας κοίλος υπεραγωγός μπορεί να γίνει μόνιμος μαγνήτης, ή να θωρακίσει την κοιλότητά του από ένα εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο.

(β) Γνωρίζουμε ότι σε έναν υπεραγωγό η ιδιότητα του διαμαγνητισμού εξαφανίζεται για κάποιο οριακό μαγνητικό πεδίο H_c. Η εξάρτησή του από την θερμοκρασία δίνεται από την εξής εμπειρική σχέση:

$$H_c(T) \cong H_0\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right] (1)$$

Το H_0 και η κρίσιμη θερμοκρασία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Η κατάσταση της μαγνήτισης ενός υλικού εξαρτάται από την τιμή της απόλυτης θερμοκρασίας T και της έντασης του μαγνητικού πεδίου H, και όχι από το πώς κατέληξε στην κατάσταση αυτή. Επομένως οι θερμοδυναμικές μεταβλητές του υπεραγωγού είναι η T και το H. Από την Θερμοδυναμική γνωρίζουμε ότι η ελεύθερη ενέργεια G ενός σώματος με μαγνήτιση M δίνεται από την σχέση:

$$G = U - TS - \mu_0 VHM \ (2),$$

όπου U η εσωτερική ενέργεια του συστήματος, S η εντροπία και P η πίεση. Από την (2) συμπεραίνουμε ότι όταν ένα υπεραγώγιμο υλικό αποκτά μαγνήτιση M υπό την επίδραση πεδίου έντασης H, η ελεύθερη ενέργεια αλλάζει κατά

$$dG_s = -\mu_0 VMdH \ (3)$$

Ας λάβουμε έναν μακρύ κυλινδρικό υπεραγωγό, αρκετά παχύ ώστε να αγνοούνται τα φαινόμενα στα λεπτά στρώματα διείσδυσης.

Έχουμε δηλαδή στη διάθεσή μας ένα τέλειο διαμαγνητικό υλικό. Ως γνωστόν, η ένταση του μαγνητικού πεδίου μηδενίζεται στο εσωτερικό του, δηλαδή ισχύει:

$$B = 0 => \mu_0(H + M) = 0 => M = -H \ (4)$$

Θεωρούμε $G_s(0)$ την ελεύθερη ενέργεια κατά Gibbs για μηδενικό πεδίο H στην υπεραγώγιμη κατάσταση. Με αντικατάσταση της (4) στην (3) και ολοκλήρωση της (3) κατά μέλη προκύπτει:

$$G_s(H,T) - G_s(0,T) = \int_0^H \mu_0 V H dH = \frac{1}{2}\mu_0 V H^2 \ (5)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι κατά τη μετάβαση από την κανονική στην υπεραγώγιμη κατάσταση, ή αντίστροφα, υπό την επίδραση του κρίσιμου πεδίου H_c, η ελεύθερη ενέργεια Gibbs δεν μεταβάλλεται, δηλαδή:

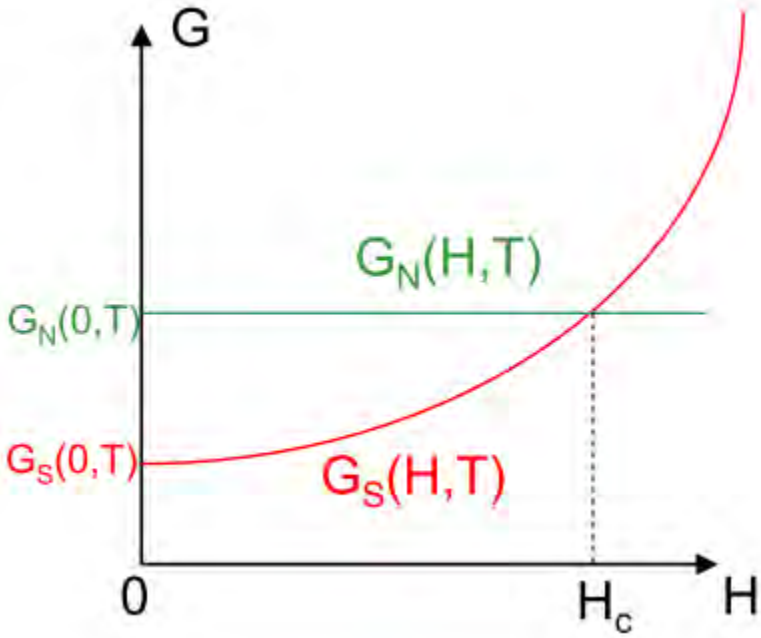
$$G_s(H_c,T) = G_n(H_c,T) \ (6)$$

Επιπρόσθετα για ένα κανονικό μέταλλο ισχύει $M \approx 0$, επομένως έχουμε από την (2):

$$G_n(H,T) = G_n(0,T) (7)$$

Αν για $H = 0$, $G_s(0,T) < G_n(0,T)$ για ένα κρίσιμο πεδίο $H_c \neq 0$, τότε εφαρμόζοντας τις (6) και (7) στην (5) για $H = H_c$ προκύπτει:

$$G_s(H_c,T) = G_s(0,T) + \frac{1}{2}\mu_0 V H_c^2$$
$$= G_n(H_c,T) \approx G_n(0,T) \ (8)$$



Συνεπώς το κρίσιμο πεδίο H_c θα είναι:

$$H_c(T) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 V}[G_n(0,T) - G_s(0,T)]} \ (9)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{H,P} (10) \overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$S_n - S_s = -\mu_0 V H_c \frac{dH_c}{dT} \ (11)$$

Συνεπώς εφόσον $\frac{dH_c}{dT} > 0$, έχουμε ότι $S_n > S_s$. Δηλαδή η υπεραγώγιμη κατάσταση είναι κατάσταση με μεγαλύτερη τάξη σε σχέση με την κανονική κατάσταση.

(γ) <u>Θερμοκρασία μετάβασης χωρίς την ύπαρξη εξωτερικού μαγνητικού πεδίου:</u>

Όταν δεν υπάρχει εφαρμοζόμενο πεδίο H, το σύστημα δεν απορροφά λανθάνουσα θερμότητα L. Συνεπώς ισχύει στην θερμοκρασία $T = T_c$:

$$L|_{T=T_c} = T_c\left(S_n|_{T=T_c} - S_s|_{T=T_c}\right) = 0 =>$$

$$S_n|_{T=T_c} - S_s|_{T=T_c} = 0 \overset{(10)}{\Longrightarrow} -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{n,T=T_c} = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{s,T=T_c} => \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{n,T=T_c} = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{s,T=T_c} (12)$$

Επίσης από την (6) έχουμε ότι:

$$G_n(H_c, T_c) = G_s(H_c, T_c)(13)$$

Από τις (12) και (13) συμπεραίνουμε ότι έχουμε αλλαγή φάσης 2^{ης} τάξης στην θερμοκρασία μετάβασης, με $dQ|_{T=T_c} = TdS|_{T=T_c} = 0$, δηλαδή με απουσία λανθάνουσας θερμότητας.

<u>Θερμοκρασία μετάβασης με την ύπαρξη εξωτερικού μαγνητικού πεδίου:</u>

Σύμφωνα με την (6) θα ισχύει και πάλι $G_n(H_c, T_c) = G_s(H_c, T_c)$. Όταν όμως υπάρχει εφαρμοζόμενο πεδίο H, το οποίο αυξάνεται στην τιμή H_c ή σε τιμή μεγαλύτερη από αυτήν, το σύστημα απορροφά λανθάνουσα θερμότητα L, καθότι αυτό συμβαίνει χωρίς μεταβολή της θερμοκρασίας του. Για την λανθάνουσα θερμότητα ισχύει:

$$L|_{T=T_c} = T_c\left(S_n|_{T=T_c} - S_s|_{T=T_c}\right) \neq 0 \overset{(11)}{\Longrightarrow}$$

$$L|_{T=T_c} = -\mu_0 T_c V \left(H_c \frac{dH_c}{dT}\right)\Big|_{T\,=\,T_c} \neq 0$$

επομένως ισχύει απαραίτητα $\frac{dH_c}{dT}\Big|_{T\,=\,T_c} \neq 0$. Άρα σύμφωνα με την (11) θα ισχύει ότι $S_n|_{T=T_c} - S_s|_{T=T_c} \neq 0$. Με αντικατάσταση των S από την έκφρασή τους συναρτήσει της ελεύθερης ενέργειας (10) έχουμε ότι $\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{n,T=T_c} \neq \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{s,T=T_c}$. Δηλαδή η αλλαγή φάσης στην θερμοκρασία μετάβασης είναι 1^{ης} τάξης.