ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ
ΟΜΑΔΑ: Β

20 Ιουνίου, 2011

Θέμα 1. (α′) Να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_2^\infty \frac{1}{(2+x)\sqrt{x}}\,dx$$

συγκλίνει και αν ναι να υπολογιστεί. (1 μον.)

(β′) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+3^{-n}\right)x^n\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α′) Για κάθε $x \geq 2$ είναι

$$0 < \frac{1}{(2+x)\sqrt{x}} < \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^\infty \left(1/x^{3/2}\right)\,dx = \sqrt{2}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^\infty \left(1/\left(2+x\right)\sqrt{x}\right)\,dx$ θα συγκλίνει. Είναι

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{(2+x)\sqrt{x}}\,dx &= 2\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{(\sqrt{2})^2+t^2}\,dt \qquad (\text{αντικατάσταση } t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2)\\ &= \sqrt{2}\left(\lim_{t\to\infty}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} - \arctan 1\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

(β′) Αν $a_n = n+3^{-n}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1+3^{-n-1}}{n+3^{-n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n+1/n3^{n+1}}{1+1/n3^n} = 1\,.$$

Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=1$. Δηλαδή, η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x|<1$.
Ως γνωστόν, για $|x|<1$ είναι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad \text{και} \quad \frac{x/3}{1-x/3} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\,.$$

Άρα, για $|x|<1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+3^{-n}\right)x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\\ &= x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{3-x}\,.\end{aligned}$$

■

Θέμα 2. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$.

(α′) Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ και να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$. (1,5 μον.)

(β′) Αν $y = x\varphi(x)^3$, όπου $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\varphi(0) = 1$, ορίζουμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) := f\left(x,\, x\varphi(x)^3\right) .$$

Υπολογίστε την παράγωγο $F'(0)$ με δύο τρόπους, κατευθείαν και μετά χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Δίνουν οι δύο διαφορετικοί τρόποι το ίδιο αποτέλεσμα; Αν όχι, τί λάθος κάνετε; (1 μον.)

Λύση.

(α′) Είναι

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0, \text{ για κάθε } x \neq 0 \text{ και επομένως } f_x(0,0) = 0.$$

Παρόμοια,

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0, \text{ για κάθε } y \neq 0 \text{ και επομένως } f_y(0,0) = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$, θα πρέπει να είναι

$$\begin{aligned} f(h,k) &= f(0,0) + f_x(0,0)\,h + f_y(0,0)\,k + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \\ &= \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}\,. \qquad (\text{με } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0) \end{aligned}$$

Τότε,

$$\varepsilon(h,k) = \frac{\sqrt[3]{h^2 k}}{\sqrt{h^2+k^2}}\,, \quad \text{για κάθε } (h,k) \neq (0,0).$$

Όμως κατά μήκος της ευθείας $k = h$ έχουμε

$$\varepsilon(h,h) = \frac{h}{\sqrt{2}\,|h|}\,, \qquad h \neq 0\,,$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0^+} \varepsilon(h,h) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0^-} \varepsilon(h,h) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Το $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k)$ δεν υπάρχει και επομένως η συνάρτηση f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$.

(β′) Επειδή $F(x) := x\varphi(x)$, είναι $F'(x) = \varphi(x) + x\varphi'(x)$ και επομένως $F'(0) = \varphi(0) = 1$.
Αν όμως χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα αλυσίδας για συναρτήσεις δύο μεταβλητών, τότε

$$F'(x) = \frac{d}{dx} f\left(x,\, x\varphi(x)^3\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d}{dx}\left(x\varphi(x)^3\right) .$$

Επειδή από το (α′) είναι $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, τελικά έχουμε

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,\frac{d}{dx}\left(x\varphi(x)^3\right)\Big|_{x=0} = 0\,.$$

Ο δεύτερος τρόπος μας δίνει λάθος αποτέλεσμα και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$. Ο κανόνας αλυσίδας χρησιμοποιείται εφόσον η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη.

■

Θέμα 3. (α′) Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

Αν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ είναι ένα οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου, αποδείξτε ότι η παράγωγος της f στο $(0,0)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u}$ υπάρχει. Για ποια $\mathbf{u}$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u}\,;$$

Τί συμπεραίνετε για τη διαφορισιμότητα της συνάρτησης f στο $(0,0)$; (1,5 μον.)

(β′) Έστω οι επιφάνειες $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$, $xyz = 1$ και έστω (x_0, y_0, z_0) σημείο της τομής των. Αποδείξτε ότι τα εφαπτόμενα επίπεδα των επιφανειών στο σημείο (x_0, y_0, z_0) είναι κάθετα μεταξύ τους. (1 μον.)

Λύση.

(α′) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t^3 u_1^3 / t^2 \left(u_1^2 + u_2^2\right)}{t} \\ &= \frac{u_1^3}{u_1^2 + u_2^2} \\ &= u_1^3\,. \qquad (\|\mathbf{u}\|_2^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1) \end{aligned}$$

Δηλαδή η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ υπάρχει σε κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και ισούται με u_1^3.
Οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{x^3/x^2}{x} = 1$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0\,.$$

Επομένως,

$$\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, u_2 = u_1\,.$$

Η ισότητα $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u}$ ισχύει αν και μόνο αν $u_1^3 = u_1$. Δηλαδη $u_1 = 0, \pm 1$. Άρα, η ισότητα ισχύει μόνο αν $\mathbf{u} = \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}$.
Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$. Αν η συνάρτηση f ήταν διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$, τότε για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ θα έπρεπε να ισχύει $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u}$.

(β′) Έχουμε τις επιφάνειες $f(x,y,z) = 0$ και $g(x,y,z) = 1$ όπου οι συναρτήσεις $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ και $g(x,y,z) = xyz$ είναι διαφορίσιμες στο $\mathbb{R}^3$. Τα διανύσματα

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, -4z_0) \quad \text{και} \quad \nabla g(x_0, y_0, z_0) = (y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0)$$

είναι κάθετα στις επιφάνειες $x^2+y^2-2z^2=0$ και $xyz=1$ αντίστοιχα, στο σημείο (x_0,y_0,z_0). Επειδή

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot\nabla g(x_0,y_0,z_0) &= (2x_0,2y_0,-4z_0)\cdot(y_0z_0,x_0z_0,x_0y_0)\\ &= 2x_0y_0z_0+2x_0y_0z_0-4x_0y_0z_0=0\,,\end{aligned}$$

τα εφαπτόμενα επίπεδα είναι κάθετα μεταξύ τους.

■

Θέμα 4. (α′) Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι κλάσης C^1 και τέτοιες ώστε

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\quad \text{για κάθε } x,y\in(0,\infty). \tag{1}$$

Αν $g(\rho,\theta):=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$, με $\rho>0$ και $\theta\in(0,\pi/2)$, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\partial g}{\partial\rho}(\rho,\theta)=\frac{\sin\theta}{\rho}$$

και στη συνέχεια να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f που ικανοποιούν την (1). (1,5 μον.)

(β′) Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας $z^2=xy+4$ που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων $O(0,0,0)$. (1 μον.)

Λύση.

(α′) Είναι

$$\{x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta\}\Leftrightarrow\left\{\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\arctan\frac{y}{x}\right\}.$$

Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial\rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho}\\ &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\\ &= \frac{y}{\rho\sqrt{x^2+y^2}} && \text{(λόγω της (1))}\\ &= \frac{\sin\theta}{\rho}\,.\end{aligned}$$

Επομένως

$$g(\rho,\theta)=\sin\theta\ln\rho+C_1(\theta)\,,$$

όπου η συνάρτηση $C_1:(0,\pi/2)\to\mathbb{R}$ είναι κλάσης C^1. Άρα, όλες οι συναρτήσεις f που ικανοποιούν την (1) είναι

$$f(x,y)=\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\ln\left(x^2+y^2\right)+C_2\left(\frac{y}{x}\right)\,,$$

όπου η συνάρτηση $C_2:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι κλάσης C^1.

(β′) Η απόσταση d του σημείου (x,y,z) της επιφάνειας από την αρχή των αξόνων είναι

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+xy+4}\,.$$

Πρέπει λοιπόν να βρούμε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x,y) := d^2 = x^2 + y^2 + xy + 4\,.$$

Είναι

$$\left\{\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x + y = 0 \\ f_y(x,y) = 2y + x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{ (x,y) = (0,0) \right\}\,.$$

Για $x = y = 0$ είναι $z = \pm 2$ και επομένως έχουμε τα σημεία $(0,0,\pm 2)$ της επιφάνειας. Επειδή $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ και $\Delta = f_{xx}(0,0)\, f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 2 \cdot 2 - 1 > 0$, στο σημείο $(0,0)$ η f έχει ελάχιστο. Άρα, τα σημεία $(0,0,\pm 2)$ της επιφάνειας είναι αυτά που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

■

Θέμα 5. Έστω $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$ η Ευκλείδια νόρμα του $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ και έστω $\|\cdot\|$ μία οποιαδήποτε άλλη νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

(α′) Αν $M = \max\{\|\mathbf{e}_i\| : i = 1, \ldots, n\}$, αποδείξτε ότι

$$\|\mathbf{x}\| \le M\sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2\,, \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(1 μον.)

(β′) Αν $f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|$, αποδείξτε πρώτα ότι η συνάρτηση f(δηλαδή η νόρμα $\|\cdot\|$) είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^n$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\mathbf{z}\|_2 = 1$, τέτοιο ώστε αν θέσουμε $m := \|\mathbf{z}\| > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$\|\mathbf{x}\| \ge m\|\mathbf{x}\|_2\,, \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Να συμπεράνετε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta > 0$, τέτοια ώστε

$$\alpha\|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\| \le \beta\|\mathbf{x}\|_2\,, \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Δηλαδή, στον $\mathbb{R}^n$ κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδια νόρμα. (2 μον.)

Απόδειξη.

(α′) Για κάθε $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\| &= \|x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n\| \\
&\le |x_1|\|\mathbf{e}_1\| + \cdots + |x_n|\|\mathbf{e}_n\| && \text{(τριγωνική ανισότητα για τη νόρμα)} \\
&\le M\left(|x_1| + \cdots + |x_n|\right) \\
&\le M\left(1^2 + \cdots + 1^2\right)^{1/2}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2} && \text{(ανισότητα Cauchy–Schwarz)} \\
&= M\sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2\,.
\end{aligned}$$

(β′) Για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| &= |\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \\
&\le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| && \text{(τριγωνική ανισότητα για τη νόρμα)} \\
&\le M\sqrt{n}\,\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 && \text{(από το (α′))}
\end{aligned}$$

και επομένως η συνάρτηση f(δηλαδή η νόρμα $\|\cdot\|$) είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^n$.(Πράγματι, έστω $\mathbf{y}$ σταθερό. Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ επιλέξουμε το $\delta := 1/M\sqrt{n} > 0$, τότε για κάθε $\mathbf{x}$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 < \delta$ είναι $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$.) Επειδή η σφαιρική επιφάνεια

$$S(\mathbf{0}, 1) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$$

είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, η συνεχής συνάρτηση f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο $S(\mathbf{0}, 1)$, έστω στο $\mathbf{z} \in S(\mathbf{0}, 1)$. Θέτουμε $m := \|\mathbf{z}\| > 0$(είναι $m > 0$ επειδή $\mathbf{z} \neq 0$). Τότε, για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \|\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2\| \cdot \|\mathbf{x}\|_2 && \text{(ιδιότητα της νόρμας)} \\ &\geq m\|\mathbf{x}\|_2 . && \text{(το } \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2 \in S(\mathbf{0}, 1)) \end{aligned}$$

Επομένως, $\|\mathbf{x}\| \geq m\|\mathbf{x}\|_2$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, όπου $m > 0$.
Τέλος, αν πάρουμε το $\alpha := m > 0$ και το $\beta := M\sqrt{n} > 0$, τότε

$$\alpha\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\| \leq \beta\|\mathbf{x}\|_2 , \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες