ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
2η Σειρά Ασκήσεων στη "Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ"

ακαδ. έτος 2010–11

1. Εξετάστε αν τα παρακάτω όρια υπάρχουν και αν υπάρχουν να υπολογιστούν:

$$(i) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}\ln(1+x) \qquad (ii) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2}\,.$$

2. Για ποια $\alpha \geq 0$ η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{\alpha}\frac{\sin y}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0,0)$;
<u>*Υπόδειξη*</u>. Χρησιμοποιείστε πολικές συντεταγμένες

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2\sin(x/y) & \text{αν } y \neq 0\ , \\ 0 & \text{αν } y = 0\ . \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Είναι η συνάρτηση $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ συνεχής στο $(0,0)$;

4. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \ln\left(x^2+2y+1\right) + \int_0^x \cos t^2\, dt\,, \qquad y > -\frac{1}{2}\,.$$

Να βρεθεί το διαφορικό $df(x,y)(h,k)$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η τιμή της $f(0,03, 0,03)$.

5. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-3y^2x}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$. Είναι η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο $(0,0)$;

6. Έστω η συνάρτηση $z = f(x+\varphi(y))$, όπου η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,.$$

7. Έστω η συνάρτηση $u = u(x,y)$ είναι κλάσης C^2. Αν $s = x_0+ax+by$ και $t = y_0-bx+ay$, όπου $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$ και $a^2+b^2 = 1$, η συνάρτηση u μετασχηματίζεται στη συνάρτηση $U = U(s,t)$. Να αποδειχθεί ότι

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = U_{ss}U_{tt} - U_{st}^2\,.$$

8. Έστω η συνάρτηση $f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου G ανοικτό σύνολο. Λέμε ότι η f είναι **θετικά ομογενής βαθμού** $p \in \mathbb{R}$ στο G, αν

$$f(t\mathbf{x}) = t^p f(\mathbf{x}) \text{ για κάθε } t > 0 \text{ και για κάθε } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G \text{ για το οποίο } t\mathbf{x} \in G.$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο G, να αποδειχθεί ότι

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = pf(\mathbf{x}) \,. \qquad \text{(θεώρημα του Euler)}$$

Υπόδειξη. Για $\mathbf{x}$ σταθερό θεωρείστε τη συνάρτηση $g(t) := f(t\mathbf{x})$ και υπολογίστε την παράγωγο $g'(1)$.
Εφαρμογή. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^6 + x^2y^4 + 3x^4y^2 + y^6}{x^4 + x^2y^2 + y^4}}\,, \qquad xy \neq 0\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$f_{xy}^2 = f_{xx} \cdot f_{yy}\,, \qquad xy \neq 0\,.$$

9. Έστω $\mathbf{r} = (x,y,z)$ και έστω $r = \|\mathbf{r}\|_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

   (α′) Αν $u = \cos r$, να υπολογιστεί η παράγωγος της u κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{r}$.

   (β′) Να βρεθούν όλες οι διαφορίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $\operatorname{div}(f(r)\,\mathbf{r}) = 0$.

10. Υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία σε κάθε σημείο (x,y,z) του $\mathbb{R}^3$ δίνεται από τον τύπο

$$T(x,y,z) = x^2y + yz - e^{xy}\,.$$

Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας στο σημείο $P(1,1,1)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v} = \overrightarrow{PO}$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. Ποιά είναι η κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού αύξησης της θερμοκρασίας στο σημείο $P(1,1,1)$;

Παράδοση των ασκήσεων έως 16/6/2011