ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ // ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ «ΕΙΣΑΓΩΓΗ στις ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ».
ΑΘΗΝΑ 02 / 07/ 2012, ΩΡΑ: 08:30

Θέμα 1°:

(α). (Μον. 0,5). Να δοθεί ένα συγκεκριμένο παράδειγμα μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης ημιγραμμικής 2ης τάξης με ανεξάρτητη μεταβλητή στον $\mathbb{R}^3$.

(β). (Μον. 0,5). Να προσδιοριστεί ο τύπος της εξίσωσης

$$u_{xx}(x,y)+xu_{yy}(x,y)-u_x(x,y)+u_y^2(x,y)=0.$$

(γ). (Μον. 1,25). Να προσδιοριστεί η σταθερά A ώστε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών να είναι επιλύσιμο:

$$\Delta u(\rho,\varphi)=A+4\rho^2\cos 2\varphi,\quad 1<\rho<3,\quad 0\le\varphi<2\pi,$$

$$\frac{\partial u(1,\varphi)}{\partial\rho}=sin\varphi,\quad \frac{\partial u(3,\varphi)}{\partial\rho}=2\cos\varphi,\quad 0\le\varphi<2\pi.$$

Θέμα 2°:

(α). (Μον. 1). Η επίλυση ενός προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών για το κυκλικό τύμπανο οδηγεί σε λύση με αρχική συνθήκη:

$$u(\rho,\varphi,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n(\lambda_{nm}\frac{\rho}{\alpha})(\alpha_{nm}\cos n\varphi+b_{nm}\sin n\varphi)=f(\rho,\varphi),$$

$$0\le\rho\le\alpha,\ 0\le\varphi<2\pi$$

όπου $f(\rho,\varphi)$ γνωστή συνάρτηση. Να υπολογιστεί ο συντελεστής a_{23} αν γνωρίζουμε τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\int_0^{\alpha}J_n(\lambda_{nm}\frac{\rho}{\alpha})J_n(\lambda_{nk}\frac{\rho}{\alpha})\rho d\rho=\frac{\alpha^2}{2}\left[J_{n+1}(\lambda_{nm})\right]^2\delta_{mk},$$

$$\int_0^{2\pi}\cos n\varphi\,\cos m\varphi\,d\varphi=\pi\delta_{nm},\ \int_0^{2\pi}\sin n\varphi\,\sin m\varphi\,d\varphi=\pi\delta_{nm},\ \int_0^{2\pi}\cos n\varphi\,\sin m\varphi\,d\varphi=0$$

(β). (Μον. 1.75). Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τη σφαίρα

$$\Delta u(r,\theta,\varphi)=0,\quad 0\le r<5,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le\varphi<2\pi,$$

$$u(5,\theta,\varphi)=5+3cos\theta+cos^2\theta.$$

(Δίνεται η εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\Delta u(r,\theta,\varphi)=u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}u_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}=0,$$

και τα πολύωνυμα Legendre, $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$).

Θέμα 3° : **(Μον. 1,7)**

(α). Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$x^2y''(x)+xy'(x)+\lambda y(x)=0, \qquad 1<x<e^L, \quad y'(1)=y(e^L)=0.$$

(β). Είναι η εξίσωση σε μορφή αυτοσυζυγή (Sturm-Liouville); Ποια είναι η συνάρτηση βάρους; Να δώσετε τη σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από αυτό το πρόβλημα.

(γ). Στη συνέχεια να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα για $L\in\mathbb{Q}_+$,

$$x^2y''(x)+xy'(x)+3y(x)=g(x)=3, \qquad 1<x<e^L, \quad y'(1)=y(e^L)=0.$$

Θέμα 4° : **(Μον. 1,8)**

(α) (μον. 1,3). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$\begin{cases} u_t(x,t)=3u_{xx}(x,t)-3x, & 0<x<1,\ t>0,\\ u(0,t)=u(1,t)=1, & t>0,\\ u(x,0)=\dfrac{1}{6}x(x^2-1)+2, & 0<x<1. \end{cases}$$

Δώστε μία φυσική ερμηνεία αυτού του προβλήματος, αν $u=u(x,t)$ παριστάνει (αδιάστατη) θερμοκρασία.

(β) (μον. 0,5). Περιγράψτε το τρόπο επίλυσης του προηγουμένου προβλήματος αν η συνοριακή τιμή 1 αντικατασταθεί από την $\cos t$.

Θέμα 5° : **(Μον. 1,5)**

Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να διαπιστώσετε (τυπικά) ότι η λύση για το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_{xxxx}+u_{tt}=0, & -\infty<x<\infty, \quad t>0, \quad u=u(x,t),\\ u(x,t)\to 0, & u_x(x,t)\to 0, \quad |x|\to\infty,\\ u(x,0)=f(x)=e^{-x^2/4}, & u_t(x,0)=0, \quad -\infty<x<\infty, \end{cases}$$

είναι η $$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-x^2/4(1+it)}}{(1+it)^{1/2}}+\frac{e^{-x^2/4(1-it)}}{(1-it)^{1/2}}\right].$$

Δίνονται, (υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier):

1. $F\{u(x,t)\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{isx}\,dx=\hat{u}(s,t),$

2. $F^{-1}\{\hat{u}(s,t)\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(s,t)e^{-isx}\,ds=u(x,t),$

3. $F\{u_{xxxx}(x,t)\}=(-is)^4\hat{u}(s,t),$

4. $F^{-1}\{e^{-s^2/4a^2}\}=\sqrt{2}\,a\,e^{-a^2x^2},\ a>0,\ (a=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2(1+it)^{1/2}},\ \dfrac{1}{2(1-it)^{1/2}}),$

$-s^2(1\pm it)=-s^2/4[1/2(1\pm it)^{1/2}]^2=-s^2/4[a]^2, \quad \cos A=(e^{iA}+e^{-iA})/2$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**