ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στην Μαθηματική Ανάλυση Ι
(Φυλ. 3)
(Παράδοση: μέχρι και την Τρίτη 22 Νοεμβρίου 2011)

Ασκηση 1. *Έστω A, B μη κενά άνω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών με $\sup A = \inf B$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τέτοια ώστε $\beta - \alpha < \varepsilon$.*
(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό για τα $\sup$ και $\inf$ ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$.)

Ασκηση 2. *Να δείξετε ότι το σύνολο*

$$\left\{ \frac{\mu}{2^\nu} : \mu \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{N} \right\}$$

είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Μπορείτε να βρείτε και άλλα υποσύνολα του $\mathbb{Q}$, τα οποία να είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$;
(Υπόδειξη: να τροποποιήσετε κατάλληλα την απόδειξη της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$.)

Ασκηση 3. *Έστω $A \subseteq (0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\inf A = 0$ και ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα $\max, \min, \sup$ και $\inf$ του συνόλου*

$$\left\{ \frac{x}{x+1} : x \in A \right\}.$$

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Ασκηση 4. *Να δείξετε ότι*

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} = 0.$$

Ασκηση 5. *(ι) Δείξτε ότι αν η ακολουθία (α_ν) είναι μηδενική και η ακολουθία (β_ν) είναι φραγμένη, τότε η ακολουθία $(\alpha_\nu \beta_\nu)$ είναι μηδενική.*
(ιι) Δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{\nu \to \infty} \frac{\cos(2 \ln \nu^4 - 7\sqrt{\nu}) + (-1)^{\nu+1}}{7\nu^8 + 1} = 0.$