Εξέταση στα «Μαθηματική Προτυποποίηση», Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών 2 Σεπτεμβρίου 2014, Διάρκεια: 3h

Διδάσκοντες: Α. Χαραλαμπόπουλος, Ι. Καραφύλλης

Θέμα 1°: Να ελαχιστοποιήσετε το συναρτησιακό $J(y)=\int_0^1\left(2y^2(t)-y(t)\dot{y}(t)+\dot{y}^2(t)\right)dt$ με περιορισμούς $y(0)=0$, $y(1)=1$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 1).

Θέμα 2°: Να δώσετε το μοντέλο Lotka-Volterra για ένα κλειστό οικοσύστημα με τρεις πληθυσμούς, στο οποίο ισχύει η ακόλουθη τροφική αλυσίδα: το είδος 1 τρέφεται αποκλειστικά από το είδος 3, το είδος 2 τρέφεται αποκλειστικά από το είδος 3 και το είδος 3 τρέφεται από ένα σταθερό φυσικό πόρο του οικοσυστήματος. (ΜΟΝΑΔΕΣ 1).

Θέμα 3°: Έστω η διαφορική εξίσωση $\ddot{y}(t)+y(t)+\varepsilon\, y^5(t)=0$, όπου $\varepsilon>0$ είναι μία σταθερά με $\varepsilon<<1$. (α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $H(t)=\frac{1}{2}\dot{y}^2(t)+\frac{1}{2}y^2(t)+\frac{\varepsilon}{6}y^6(t)$ είναι σταθερή (αναλλοίωτη). (β) Να δώσετε τη προσέγγιση $1^{ης}$ τάξεως της λύσης με αρχική συνθήκη $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$ με τη μέθοδο Poincare-Lindstedt (χρησιμοποιήστε τον τύπο $\cos^5(x)=\frac{1}{16}\cos(5x)+\frac{5}{16}\cos(3x)+\frac{5}{8}\cos(x)$). (ΜΟΝΑΔΕΣ 3).

Θέμα 4°: Να προσδιορίσετε τη σχέση διασποράς υδάτινων διαδιδόμενων επιφανειακών κυμάτων $\eta(x,t)$ κατά τη διεύθυνση $-x$, στην επιφάνεια ποταμού βάθους b $(-b<z\le 0)$. Υπενθυμίζεται ότι η θεωρία προβλέπει την ύπαρξη μιας συνάρτησης δυναμικού $\Phi(x,z,t)$, που ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\Delta\Phi=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad -b<z<0,\quad t\in R$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,-b,t)=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t\in R$$

και διαμέσου της οποίας υπολογίζεται η ταχύτητα του ρευστού ($\mathbf{v}=\nabla\Phi$) καθώς επίσης η μορφή των επιφανειακών κυμάτων από τις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+g\eta=0,\quad z=0$$

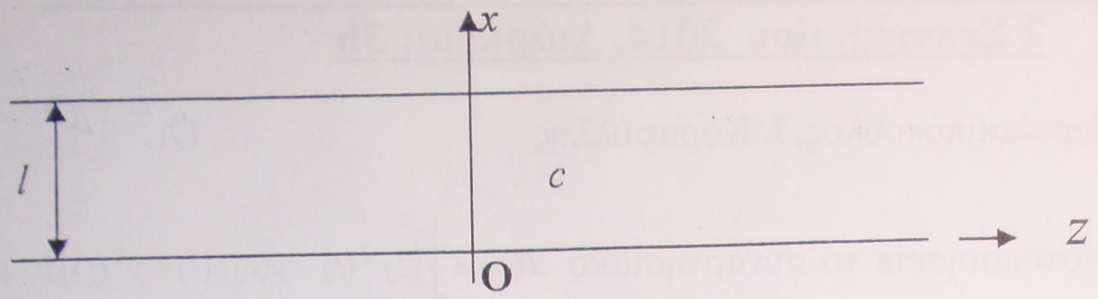
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\eta}{\partial t},\quad z=0.$$

(g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας).

Η υπόθεση διαδιδόμενων κυμάτων επιβάλει την επιλογή $\Phi(x,z,t)=e^{i(kx-\omega t)}Z(z)$.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 2.5).

Θέμα 5°: Έστω ο κυματοδηγός ηχητικών κυμάτων που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα



όπου c η ταχύτητα διάδοσης των ηχητικών κυμάτων και ρ η πυκνότητα του ρευστού στην περιοχή του κυματοδηγού. Υποθέτουμε ανεξαρτησία των υπεισερχομένων μεγεθών από τη μεταβλητή y. Η θεωρία εξασφαλίζει την ύπαρξη της βαθμωτής συνάρτησης δυναμικού $\Phi(x,z,t) = A(x)e^{i(kz-\omega t)}$ που επιλύει την κυματική εξίσωση $\Delta\Phi(x,z,t) = c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi\ (x,z,t)$ και χρησιμοποιείται στην αναπαράσταση της ταχύτητας και της πίεσης του ρευστού ως $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ και $p = -\rho\frac{\partial}{\partial t}\Phi$ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τους ρυθμούς διάδοσης (αρμονικών ως προς το χρόνο) επιπέδων ηχητικών κυμάτων κατά την κατεύθυνση z, εάν

α) Το οριζόντιο πέτασμα $x = 0$ είναι ελεύθερο πίεσης $(p(0,z,t) = 0)$

β) Το πέτασμα $x = l$ είναι ακινητοποιημένο ($v_x(l,z,t) = 0$).

(ΜΟΝΑΔΕΣ 2.5).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!