Ιούλιος 2012

Θέμα 1

α) Να βρεθεί η λύση του Π.Α.Τ.
$a(z)z_x + z_y = 0$, $z(x,0) = f(x)$.
Να βρεθεί συνθήκη που εξασφαλίζει τοπικά την ύπαρξη μοναδικής λύσης.
Να δειχθεί ότι η λύση παραμένει σταθερή σε ευθείες στο xy-επίπεδο και αξιοποιώντας την εκτίμηση αυτή να δικαιολογηθεί ότι είναι δυνατόν η λύση να μην ορίζεται καθολικά σε σχέση με το xy-επίπεδο. (1.5 μον).

β) Να δειχθεί ότι αν το πεδίο $\underset{\sim}{V} = (P, Q, R)$ δεν εφάπτεται στην καμπύλη, $C: x = x_0(t), y = y_0(t), z = z_0(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, στο χωρίο, $\underline{\Omega}$, και στο σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in C$, τότε υπάρχει περιοχή $\underline{\Omega}_0$ του (x_0, y_0, z_0) στην οποία υπάρχει μοναδική ολοκληρωτική επιφάνεια του $\underset{\sim}{V}$ που περιέχει το τμήμα της C στο $\underline{\Omega}_0$. (1.5 μον).

Θέμα 2

α) Να βρεθεί η κανονική μορφή της $u_x + 2xyu_y = x$ και στη συνέχεια να λυθεί. (1 μον.).

β) Να δοθεί ο ορισμός των χαρακτηριστικών καμπυλών και επιφανειών για τελεστή διαφ. τελ. $P(\underset{\sim}{x}, D)$, $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$. Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες του $P(\underset{\sim}{x}, D) = x_2 D_1^2 + D_2^2$, $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. (1 μον.)

Θέμα 3

α) Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$u_t = e^{tx} u_x \quad , \quad u(0,x) = 1 - x + x^2 .$$

Να δειχθεί ότι ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος Cauchy-Kowalevsky και να βρεθούν οι όροι της σειράς Taylor της λύσης έως δεύτερης τάξης. (1.5 μον.)

β) Να διατυπωθεί η αρχή του μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις και στη συνέχεια να αποδειχθεί για φραγμένο χωρίο Ω του $\mathbb{R}^n$. (1.5 μον.)

Θέμα 4

Δίνεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta u(x_1,x_2) = 0 \quad , \quad (x_1,x_2) \in (-\infty,+\infty) \times (0,\infty)$$
$$u(x_1,0) = e^{-x_1^2} \cos x_1 , \quad x_1 \in (-\infty,+\infty) .$$

Να βρεθεί η συνάρτηση Green του προβλήματος (να δικαιολογηθεί) και στη συνέχεια να λυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο της συνάρτησης Green (να δοθεί η λύση σε ολοκληρωτική μορφή). (2 μον.)

Δίνεται ότι η θεμελιώδης λύση είναι

$$E(x_1,x_2;y_1,y_2) = \frac{1}{4\pi} \ln\left[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right].$$