ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

26 Φεβρουαρίου, 2008

Θέμα 1. (α′) Από τον ορισμό, η Borel σ- άλγεβρα $\mathfrak{B}$ παράγεται από τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}$. Ζητείται να αποδειχθεί ότι η Borel σ- άλγεβρα παράγεται επίσης από τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα $\mathcal{E} = \{[a,b] : a < b\}$. (0,7 μον.)

(β′) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι $1-1$ και επί, δηλαδή αμφιμονοσήμαντη. Αν

$$\mathfrak{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f(A) \in \mathfrak{B}\} ,$$

να αποδειχθεί ότι η $\mathfrak{M}$ είναι μια σ- άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ η οποία περιέχει τα σύνολα Borel. Δηλαδή, η f απεικονίζει σύνολα Borel σε σύνολα Borel. (1,5 μον.)

Λύση.

(α′) Έστω $\sigma(\mathcal{E})$ η σ- άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{E}$. Επειδή κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών και φραγμένων διαστημάτων, τα ανοικτά σύνολα ανήκουν στη σ- άλγεβρα $\sigma(\mathcal{E})$ και επομένως $\mathfrak{B} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Όμως τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα είναι κλειστά σύνολα και επομένως ανήκουν στη σ- άλγεβρα $\mathfrak{B}$. Επομένως $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{B}$. Άρα, $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{E})$.

(β′) Επειδή η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι $1-1$ και επί, για κάθε $A, B \subseteq \mathbb{R}$ είναι

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \text{και} \quad f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

Θα αποδείξουμε ότι η $\mathfrak{M}$ είναι μια σ- άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ η οποία περιέχει τα σύνολα Borel. Πράγματι, επειδή $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, το $\mathbb{R} \in \mathfrak{M}$. Αν $E \in \mathfrak{M}$, επειδή

$$f(E^c) = f(\mathbb{R} \setminus E) = \mathbb{R} \setminus f(E) ,$$

τότε $E^c \in \mathfrak{M}$. Επίσης, αν (E_n) είναι ακολουθία συνόλων του $\mathfrak{M}$, τότε $f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ και αυτό αποδεικνύει ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$. Άρα, η $\mathfrak{M}$ είναι μια σ- άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.

Τέλος, επειδή η f είναι γνήσια μονότονη και συνεχής, για κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ είναι $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ ή $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$. Επομένως, η σ- άλγεβρα $\mathfrak{M}$ περιέχει τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα τα οποία από την (α′) παράγουν τη Borel σ- άλγεβρα. Άρα, η σ- άλγεβρα $\mathfrak{M}$ περιέχει όλα τα σύνολα Borel.

■

Θέμα 2. (α′) Διατυπώστε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και αποδείξτε ότι αν (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm .$$

(0,8 μον.)

(β′) Έστω η $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση και έστω $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow [0,\infty]$, με

$$\varphi(E) := \int_E f \, dm ,$$

όπου $E \in \mathcal{M}$. Να αποδειχθεί ότι το φ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. (0,7 μον.)

(γ′) Έστω η συνάρτηση $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, όπου το E είναι ένα μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$ και έστω

$$E_n = \{x \in E : n-1 \leq |f(x)| < n\}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

με $m(E_n) > 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, με

$$g(x) = \frac{1}{n^2 m(E_n)}, \quad \text{αν } x \in E_n.$$

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο E και να εξεταστεί αν η συνάρτηση fg είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο E. (2 μον.)

Λύση.

(α′) Βλέπε τις σημειώσεις του μαθήματος.

(β′) Βλέπε τις σημειώσεις του μαθήματος.

(γ′) Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τα σύνολα E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι μετρήσιμα και ξένα μεταξύ τους με $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Είναι

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m(E_n)} \chi_{E_n}(x)$$

και επομένως η g είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Επειδή,

$$\begin{aligned}
\int_E |g(x)| \, dm(x) &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} |g(x)| \, dm(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |g(x)| \, dm(x) && \text{(από τη (β′))} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m(E_n)} m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,
\end{aligned}$$

η $g \in L_1(E)$.
Επειδή

$$(n-1)\chi_{E_n}(x) \leq |f(x)| \chi_{E_n}(x) \leq n\chi_{E_n}(x),$$

τότε και

$$(n-1)|g(x)| \chi_{E_n}(x) \leq |f(x) g(x)| \chi_{E_n}(x) \leq n |g(x)(x)| \chi_{E_n}, \tag{1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)\, g(x)|\, dm(x) &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} |f(x)\, g(x)|\, dm(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)\, g(x)|\, dm(x) && \text{(από τη (β'))} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f(x)\, g(x)|\, \chi_{E_n}(x)\, dm(x) \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \int_E |g(x)|\, \chi_{E_n}(x)\, dm(x) && \text{(από την (1))} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \int_{E_n} |g(x)|\, dm(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{1}{n^2 m(E_n)} m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2} = \infty\,.
\end{aligned}$$

Άρα, η συνάρτηση fg δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο E.

■

Θέμα 3. (α') (**Λήμμα των Borel– Cantelli**) Αν (E_n) είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, με $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < +\infty$, να αποδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε άπειρο το πλήθος E_n, δηλαδή το $\limsup E_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, έχει μέτρο μηδέν. (1 μον.)

(β') Έστω $f : E \longrightarrow [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, $E \in \mathcal{M}$ και έστω $\alpha > 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$m(\{x \in E : |f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_E |f(x)|\, dm(x)\,.$$

(0,5 μον.)

(γ') Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[0,1]$. Υποθέτουμε ότι

$$\int_{[0,1]} f_n(x)\, dm(x) = c_n > 0\,, \quad \text{με } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{c_n} < \infty\,.$$

Αν $E_n = \left\{x \in [0,1] : f_n(x) > \sqrt{c_n}\right\}$, να αποδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < +\infty$ και ότι σχεδόν για όλα τα $x \in [0,1]$ υπάρχει $N = N(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f_n(x) \leq \sqrt{c_n}$, για κάθε $n \geq N$.

(1 μον.)

Λύση.

(α') Βλέπε τις σημειώσεις του μαθήματος.

(β') Βλέπε τις σημειώσεις του μαθήματος (ανισότητα του Chebyshev).

(γ') Από την ανισότητα Chebyshev

$$m(E_n) \leq \frac{1}{\sqrt{c_n}} \int_{[0,1]} f_n(x)\, dm(x) = \frac{1}{\sqrt{c_n}} c_n = \sqrt{c_n}\,,$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{c_n} < \infty\,.$$

Επομένως, από το λήμμα των Borel– Cantelli είναι $m(\limsup E_n) = 0$. Αν $x \notin \limsup E_n$, τότε υπάρχει $N = N(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x \notin \bigcup_{k=N}^{\infty} E_k$ και κατά συνέπεια $x \notin E_n$, για κάθε $n \geq N$. Άρα, σχεδόν για όλα τα $x \in [0,1]$ και για κάθε $n \geq N$ είναι $f_n(x) \leq \sqrt{c_n}$.

■

Θέμα 4. (α′) Αν η $f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$, είναι μετρήσιμη συνάρτηση και το F είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι το $f^{-1}(F)$ είναι μετρήσιμο σύνολο. (0,5 μον.)

(β′) Έστω $f \in L_1[0,1]$ και $A = \{x \in [0,1] : f(x) = 2k+1\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Να αποδειχθεί ότι το A είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)\right|^n dx = m(A)\ .$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α′) Επειδή το F^c είναι ανοικτό σύνολο, το $f^{-1}(F^c)$ είναι μετρήσιμο σύνολο. Άρα, το $f^{-1}(F) = \left(f^{-1}(F^c)\right)^c$ θα είναι μετρήσιμο σύνολο.

(β′) Επειδή το $\mathbb{Z}$, καθώς επίσης και κάθε υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ είναι ένα κλειστό σύνολο, από το (α′) το $A \in \mathcal{M}$. Παρατηρούμε ότι $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)\right| = 1$ αν και μόνο αν $x \in A$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)\right|^n dx &= \int_A \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)\right|^n dx + \int_{[0,1]\setminus A} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)\right|^n dx \\ &= m(A) + \int_{[0,1]\setminus A} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)\right|^n dx\,.\end{aligned}$$

Επειδή $f \in L_1[0,1]$, είναι $|f| < \infty$ $\sigma.\pi.$ Επίσης,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)\right|^n = 0 \quad \text{και} \quad \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)\right|^n < 1\,,\ \text{σχεδόν παντού στο } x \in [0,1] \setminus A\,.$$

Κατά συνέπεια, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]\setminus A} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)\right|^n dx = 0\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)\right|^n dx = m(A) + \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]\setminus A} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)\right|^n dx = m(A)\ .$$

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες