ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (2 ωρες)

Πρόβλημα 1

(a) Αν X, Y χώροι Banach, X ανακλαστικός και $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, δείξτε ότι $A(\bar{B}_1) \subseteq Y$ κλειστό

(b) Δείξτε ότι ένας απειροδιάστατος B-χώρος με την ασθενή τοπολογία είναι κατηγορίας Baire 1.

Πρόβλημα 2

(a) Έστω X B-χώρος τ.ω $\forall x \in X$ $\forall C \subseteq X$ κλειστό, κυρτό $\exists$ $c_0 \in C$ που ικανοποιεί $\|x - c_0\| = \inf[\|x - c\| : c \in C]$. Δείξτε ότι ο X είναι ανακλαστικός.

(b) Έστω X B-χώρος, $Y \subseteq X$ κλειστός γραμμικός υποχώρος και $x_0 \notin Y$. Δείξτε ότι $\operatorname{span}\{Y, x_0\}$ είναι κλειστός γραμμικός υποχώρος του X.

Πρόβλημα 3.

(a) Έστω $1 < p < \infty$, $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq L^p[0,1]$ φραγμένη και $f_n(t) \to f(t)$ a.e. στο $[0,1]$. Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{w} f$ στο $L^p[0,1]$.

(b) Θέτουμε $\lambda_1 = \inf\left[\frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_p^p} : u \in W_0^{1,p}(0,1), u \neq 0\right]$. Δείξτε ότι $\lambda_1 > 0$ και υπάρχει $\hat{u}_1 \in W_0^{1,p}(0,1)$ τ.ω $\lambda_1 = \frac{\|\hat{u}_1'\|_p^p}{\|\hat{u}_1\|_p^p}$.

Πρόβλημα 4

(a) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ και $\int_A f(x)\,dx \leq M$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}^N$, $|A|_N < \infty$. Δείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx \leq M$.

(b) Έστω $\{u_n\}_{n \geq 1} \subseteq W^{1,1}(0,1)$ τ.ω $u_n(t) \to u(t)$ $\forall t \in [0,1]$ και $\exists$ $h \in L^1(T)_+$ τ.ω. $|u_n'(t)| \leq h(t)$ a.e. στο $[0,1]$ $\forall n \geq 1$. Δείξτε ότι $u_n \to u$ ομοιομορφα στο $[0,1]$.