ΣΕΜΦΕ: ***Ανάλυση Πινάκων και Εφαρμογές***

6° Εξάμηνο

12/7/05

1. Έστω ο νxν πίνακας A, ώστε detA=0. Αποδείξατε

$$\text{rank}(\text{adj}A) \leq 1 \qquad (2\ \mu)$$

2. Βρείτε ένα ορθογώνιο πίνακα Q, ώστε ο πίνακας Q^TAQ είναι άνω τριγωνικός, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Σημειώστε ότι λ=0 είναι ιδιότιμη του A. (2,5 μ)

3. I. Έστω x, y είναι μη συγγραμμικά διανύσματα του IR^v,ώστε $\|x\|_2 = \|y\|_2$.

Αν $u = (1/\|x-y\|_2)(x-y)$ και $Q = I - 2uu^T$, αποδείξατε

$$\|x-y\|_2^2 = 2(x-y)^Tx \quad , \quad Qx = y \quad , \quad Qy = x \qquad (1\ \mu)$$

II. Αν για τον πίνακα $A \in IR_{vxv}$ είναι $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$, όπου Q_1, Q_2 είναι ορθογώνιοι πίνακες και R_1, R_2 άνω τριγωνικοί και αντιστρέψιμοι, αποδείξατε ότι $Q_1^TQ_2$ και $Q_2^TQ_1$ είναι διαγώνιοι πίνακες.
Σχολιάστε την σχέση των R_1 και R_2. (1,5 μ)

4. Έστω οι νxν πίνακες A και B είναι κανονικοί και λ_i, μ_i (i=1,2,…,ν) είναι αντίστοιχα οι ιδιοτιμές τους. Αποδείξατε:

I. ο πίνακας $M = A \otimes I - I \otimes B$ είναι κανονικός, (0,5 μ)

II. $\sigma(M) = \{ \lambda_i - \mu_j : i, j = 1,2,\ldots,v \}$, (0,5 μ)

III. $\|M\|_2 = \max_{i,j} |\lambda_i - \mu_j|$, (1 μ)

IV. αν για τον πίνακα K έχουμε $MK = KM \rightarrow M^*K = KM^*$ (1 μ)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 3Ω

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. Άσκηση 2.7.

2. Ακολουθώντας την διαδικασία απόδειξης του Θεωρήματος Schur βρίσκουμε

$$Q = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -4 \\ 2\sqrt{2} & -3 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3. α. Επειδή $\|x\|_2 = \|y\|_2$ έχουμε

$$\|x-y\|_2^2 = (x-y)^T(x-y) = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2\,x\circ y = 2\|x\|_2^2 - 2\,x\circ y$$
$$= 2\,x^Tx - 2\,y^Tx = 2(x-y)^Tx$$

και

$$Qx = x - 2\frac{1}{\|x-y\|_2^2}(x-y)(x-y)^Tx = x - (x-y) = y$$

Επειδή Q είναι ορθογώνιος και συμμετρικός πίνακας $Q^2 = I$ και από την ισότητα $Qx = y \Rightarrow x = Q^2x = Qy$.

<u>Διαφορετικά</u>

Επειδή $\|x-y\|_2^2 = 2\|y\|_2^2 - 2\,x\circ y = -2(x-y)^Ty$ έχουμε

$$Qy = y + (x-y) = x.$$

β. Από την ισότητα $Q_1R_1 = Q_2R_2 \Rightarrow Q_1^TQ_2 = R_1R_2^{-1} = T$.

Ο πίνακας T είναι ορθογώνιος, διότι είναι γινόμενο ορθογωνίων πινάκων και άνω τριγωνικός, διότι R_1 και R_2^{-1} είναι άνω τριγωνικοί πίνακες. Από τις ιδιότητες αυτές του T, βρίσκουμε

(άσκηση 7.1) $T = \mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$

Όμοια για τον $Q_2^T Q_1$.

Συνεπώς, $R_1 = T R_2 = \mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1) R_2$.

4.1 $M = A \otimes I - I \otimes B \Rightarrow M^* = A^* \otimes I - I \otimes B^*$ και

$$\begin{aligned} MM^* &= AA^* \otimes I - A^* \otimes B - A \otimes B^* + I \otimes BB^* \\ &= A^*A \otimes I - A^* \otimes B - A \otimes B^* + I \otimes B^*B \\ &= M^*M. \end{aligned}$$

II. Αν $Ax_i = \lambda_i x_i$ και $By_i = \mu_i y_i$ έχουμε

$$\begin{aligned} M(x_i \otimes y_j) &= Ax_i \otimes y_j - x_i \otimes By_j = \lambda_i x_i \otimes y_j - x_i \otimes \mu_j y_j \\ &= (\lambda_i - \mu_j)(x_i \otimes y_j) \end{aligned}$$

δηλ. $\sigma(M) = \{ \lambda_i - \mu_j : i, j = 1, \dots, \nu \}$.

III. Επειδή M είναι κανονικός έχουμε $M^*(x_i \otimes y_j) = (\overline{\lambda_i - \mu_j})(x_i \otimes y_j)$ και $M^*M(x_i \otimes y_j) = |\lambda_i - \mu_j|^2 (x_i \otimes y_j)$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \|M\|_2 &= \max \{ \sqrt{z} : z \in \sigma(M^*M) \} \\ &= \max_{i,j} \{ |\lambda_i - \mu_j| : |\lambda_i - \mu_j|^2 \in \sigma(M^*M) \}. \end{aligned}$$

IV. Άσκηση 7.9.