ΚΥΡΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004

Θέμα 1. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ κυρτή.

(1) Διατυπώστε τις ιδιότητες της αριστερής f'_- και δεξιάς f'_+ παραγώγου της f. Τι γνωρίζετε για το σύνολο $A = \{x \in \mathbf{R} : \nexists f'(x)\}$;

(2) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

Θέμα 2. (1) Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbf{R}^n$. Δώστε τον ορισμό και διατυπώστε τις ιδιότητες της κυρτής θήκης του A, $\operatorname{conv} A$.

(2) Αν A φράγμένο και $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ γραμμική συνάρτηση, δείξτε ότι:

(α) $\operatorname{conv} f[A] = f[\operatorname{conv} A]$.

(β) $\sup\{f(x) : x \in A\} = \sup\{f(x) : x \in \operatorname{conv} A\}$ και $\inf\{f(x) : x \in A\} = \inf\{f(x) : x \in \operatorname{conv} A\}$

Θέμα 3. (1) Έστω $K \subseteq \mathbf{R}^n$ κυρτό. Για κάθε $\epsilon > 0$ θέτουμε

$$(K)_\epsilon = \{x \in \mathbf{R}^n : \exists y \in K \text{ ώστε } d(x,y) = \|x - y\| < \epsilon\}.$$

Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$, το $(K)_\epsilon$ είναι κυρτό, ανοιχτό, και περιέχει το K. Ποιό σύνολο είναι η τομή $\cap_{\epsilon>0}(K)_\epsilon$;

(2) Έστω $K \subseteq \mathbf{R}^n$ κυρτό με $0 \in \operatorname{Int} K$ και $\lambda > 1$.Δείξτε ότι $K \subseteq \lambda \operatorname{Int} K$.

Θέμα 4. (1) Διατυπώστε το θεώρημα διαχωρισμού κλειστού κυρτού υποσυνόλου του $\mathbf{R}^n$ απο σημείο εκτός αυτου. Αν $x_1 \neq x_2$ διαφορετικά σημεία του $\mathbf{R}^n$ δείξτε ότι υπάρχει $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ γραμμική ώστε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(2) Δώστε τον ορισμό και διατυπώστε τις ιδιότητες της απεικόνισης του πλησιέστερου σημείου $p_K : \mathbf{R}^n \to K$ όπου $K \subseteq \mathbf{R}^n$ κλειστό κυρτό.

Θέμα 5. (1) Δώστε τον ορισμό του ακραίου σημείου και του ακραίου υποσυνόλου ενός κυρτού υποσυνόλου του $\mathbf{R}^n$. Περιγράψτε όλα τα ακραία υποσύνολα και σημεία του κύβου $K = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : \max\{|x_i|, i = 1, 2, 3\} \leqslant 1\}$ του $\mathbf{R}^3$.

(2) Διατυπώστε το θεώρημα Krein-Milman-Minkowski για συμπαγή κυρτά υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$. Δώστε παράδειγμα κυρτου και φραγμένου υποσυνόλου του $\mathbf{R}^n$ που δεν έχει ακραία σημεία.

(3) Αν F ακραίο υποσύνολο ενός κυρτου K και x_0 ακραίο σημείο του F δείξτε ότι το x_0 είναι και ακραίο σημείο του K.

Θέμα 6. Έστω $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ γραμμική συνάρτηση και $K \subseteq R^n$ κυρτό. Θέτουμε $K' = T[K]$. Δείξτε ότι:

(1) Το K' είναι κυρτό.

(2) Αν $F' \subseteq K'$ ακραίο υποσύνολο του K' τότε το $F = T^{-1}(F')$ είναι ακραίο υποσύνολο του K.

(3) Αν το K είναι επιπλέον και συμπαγές δείξτε ότι για κάθε ακραίο σημείο $x'_0 \in K'$ υπάρχει ακραίο σημείο $x_0 \in K$ ώστε $T(x_0) = x'_0$. (Υποδ: Χρησιμοποιήστε ότι το $T^{-1}(x_0)$ είναι συμπαγές)