ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ - ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2012 - 2013

[ΧΡΗΣΤΟΣ ΗΠΑΚΑΝΗΣ
ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ
ge08011@central.ntua.gr]

Μηχανική ΙΙ – Παραμορφώσιμο

Ακαδ. Έτος (2012 – 2013)

[Ασκήσεις – Μεθοδολογία]

[Χρήστος Μπακάλης
Προπτυχιακός φοιτητής ΣΕΜΦΕ
e-mail: ge08011@central.ntua.gr]

Εισαγωγή: Αυτές οι σημειώσεις έχουν σκοπό να υποδείξουν τη σωστή μεθοδολογία επίλυσης ασκήσεων στη Μηχανική του Παραμορφωσίμου. Θα καλυφθεί όλη η ύλη και αν κάποιος καταλάβει τη φιλοσοφία της κάθε άσκησης, έχει μεγάλες πιθανότητες να περάσει το μάθημα.

Θα επιλυθούν οι περισσότερες από τις ασκήσεις των 12 φυλλαδίων που μοιράστηκαν στις διαλέξεις του κ. Κουρκουλή το εαρινό εξάμηνο του 2013 στη ΣΕΜΦΕ. Άλλες Πολυτεχνικές σχολές έχουν στο πρόγραμμα σπουδών τους το αντίστοιχο μάθημα και φοιτητές αυτών των τμημάτων μπορούν να συμβουλευτούν τις εν λόγω ασκήσεις για κατανόηση του μαθήματός τους, αφού η ύλη είναι παρόμοια με αυτή της ΣΕΜΦΕ.

Σε καμία περίπτωση δεν μπορούν οι ασκήσεις αυτές να αντικαταστήσουν την παρακολούθηση του μαθήματος από τον φοιτητή. Μπορούν όμως να βοηθήσουν τη μελέτη και να την κάνουν πιο αποδοτική.

Το κάθε φυλλάδιο ασκήσεων καλύπτει και διαφορετικό τέρος της ύλης. Στην αρχή κάθε φυλλαδίου, αφιερώνονται τεμάχια σελίδες με γενικές οδηγίες ~~...~~ για την επίλυση της κάθε άσκησης.

→ Οι ασκήσεις αυτές έχουν δοθεί από προπτυχιακό φοιτητή και μπορεί να υπάρχουν μικρά (συμβολικά) λάθη σε τεμάχια σημεία. Οι ασκήσεις δεν έχουν ελεγχθεί από τον διδάσκοντα. Παρόλα αυτά, οι μεθοδολογίες επίλυσης της κάθε άσκησης είναι λίγο-πολύ σωστές και αποδοτικές.

Για οποιαδήποτε παρατήρηση, ή πρόταση επίλυσης κάποιας άλλης άσκησης, μπορείτε να στείλετε ένα e-mail, στη διεύθυνση που καταγράφεται στην πρώτη σελίδα.

→ Ύλη / Τίτλοι Δεκών Ασκήσεων.

1. Οι έννοιες της "τάσης" και της "παραμόρφωσης" (1-D) – Το διάγραμμα σ–ε
2. "Τάση" και "Παραμόρφωση" – Το διάγραμμα σ–ε
3. Στατικά Αξονικά Προβλήματα
4. Υπερστατικά Αξονικά Προβλήματα
5. Αυτενεργά Αξονικά Προβλήματα
6. Θερμοκρασιακά Αξονικά Προβλήματα
7. Διαξονικές Εντατικές και Παραμορφωσιακές Καταστάσεις
8. Εφαρμογή σε Χεντόκλιχα Δοχεία Πίεσης – Χείρητες
9. Σχέσεις Μετατοπίσεων – Ανηγμένων Παραμορφώσεων
10. + 11. Ασκήσεις επί του τανυστή των Τάσεων
15. Ασκήσεις επί των κριτηρίων αστοχίας ολκίμων υλικών (Mises, Tresca)

Υ.Γ. Οι τελευταίες σειρές Ασκήσεων έχουν κάποιες ελλείψεις καθώς τοποθετήθηκαν στο τέλος του εξαμήνου όπου και οι υποχρεώσεις αυξάνονται.

Υ.Γ. 2) Είναι πολύ σημαντικό να διαβάζονται οι Ασκήσεις μαζί με τις σημειώσεις του μαθήματος.

Ο τίτλος του .pdf των σημειώσεων από τις διαλέξεις είναι mechan2_2013_bak.pdf και μπορείτε να τις βρείτε στο site του semfe.gr.

Το αρχείο των σημειώσεων βρίσκεται στο .zip αρχείο που κατεβάσατε, αν το κατεβάσετε από το site που είναι ανεβασμένο μεχρι στιγμή από το semfe.gr.

Χρήσιμη Βιβλιογραφία: Γ.Ι. Τσαμασφύρος

Μηχανική Παρ/λων Σωμάτων Ι
Συμμετρία

Μηχανική Παρ/λων Σωμάτων Ι
Προβλήματα-Ασκήσεις
Συμμετρία

και Beer Johnston - Μηχανική των Υλικών.
Τμήμα.

Στο τέλος του αρχείου υπάρχει συνοδήγω.

Δίνεται και σε ξεχωριστό αρχείο .pdf.

Για οποιαδήποτε παρατήρηση - πρόταση; στείλτε mail στο geo8011@central.ntua.gr.

Μέρος Α'

Μονοαφορικά Προβλήματα

Το Διάγραμμα σ-ε

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

Ακαδημαϊκό Έτος 2012-2013

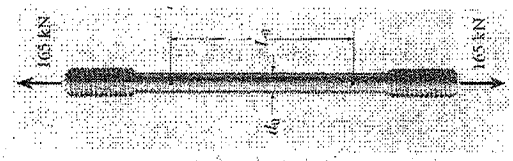
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ)

1η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ «ΤΑΣΗΣ» ΚΑΙ ΤΗΣ «ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ» (ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ) – ΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ σ-ε

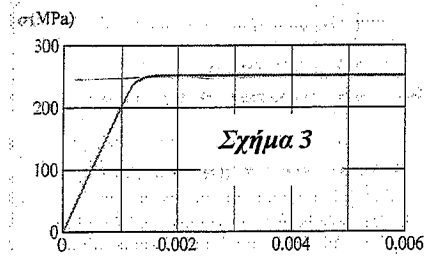
Άσκηση 1
Εφελκυστική δύναμη P=50 kN ασκείται σε κυλινδρική ράβδο από αλουμίνιο με όριο διαρροής σ_y=100 MPa. Πόση πρέπει να είναι η διάμετρος της ράβδου ώστε να μπορεί να φέρει με ασφάλεια τη δεδομένη φόρτιση;

Άσκηση 2
Το δοκίμιο αλουμινίου του Σχ.2 έχει διάμετρο d_o=25 mm και μήκος αναφοράς L_o=250 mm. Δύναμη 165 kN επιμηκύνει το μήκος αναφοράς 1.2 mm. Θεωρώντας το υλικό γραμμικώς ελαστικό να υπολογίστε:
α. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού.
β. Πόσο μειώθηκε η διατομή του δοκιμίου.
Δίνεται ν=0.35 και σ_y=440 MPa.



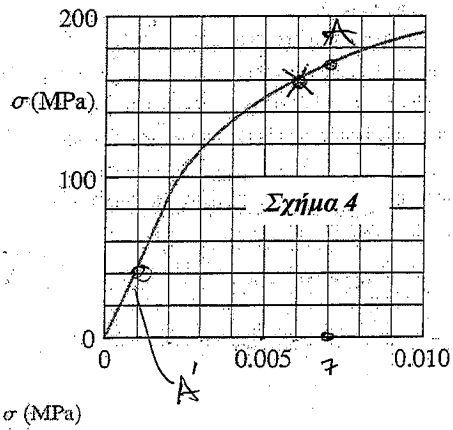
Σχήμα 2

Άσκηση 3
Το διάγραμμα αξονικών τάσεων - αξονικών παραμορφώσεων χάλυβα φαίνεται στο Σχ.3. Ράβδος μήκους 2 m από το χάλυβα αυτό φορτίζεται αξονικά έως ότου επιμηκυνθεί κατά 6.5 mm και στη συνέχεια αποφορτίζεται πλήρως. Πόσο είναι το τελικό μήκος της ράβδου (μετά την αποφόρτιση);



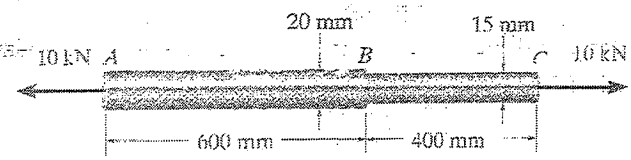
Σχήμα 3

Άσκηση 4
Κυλινδρική ράβδος μήκους 0.8 m είναι κατασκευασμένη από κράμα αλουμινίου. Το διάγραμμα αξονικών τάσεων - αξονικών παραμορφώσεων του υλικού φαίνεται στο Σχ.3. Η ράβδος υποβάλλεται σε εφελκυσμό μέχρι να επιμηκυνθεί κατά 5.6 mm και μετά αποφορτίζεται πλήρως.
α. Πόση είναι η παραμένουσα παραμόρφωση της ράβδου;
β. Εάν η ράβδος επαναφορτιστεί σε εφελκυσμό, ποιο είναι το νέο όριο αναλογίας;

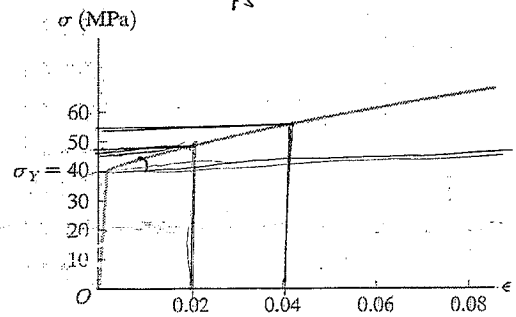


Σχήμα 4

Άσκηση 5
Ράβδος αλουμινίου (Σχ.5α) με E_{al}=70 GPa, έχει κυκλική διατομή και φορτίζεται με εφελκυστική δύναμη 10 kN. Το Σχ.5β απεικονίζει το διάγραμμα αξονικών τάσεων - αξονικών παραμορφώσεων του υλικού.
α. Υπολογίστε προσεγγιστικά την επιμήκυνση της ράβδου όταν ασκείται σε αυτήν η δύναμη 10 kN.
β. Αν η ράβδος αποφορτιστεί, πόση είναι η παραμένουσα παραμόρφωσή της;



Σχήμα 5α

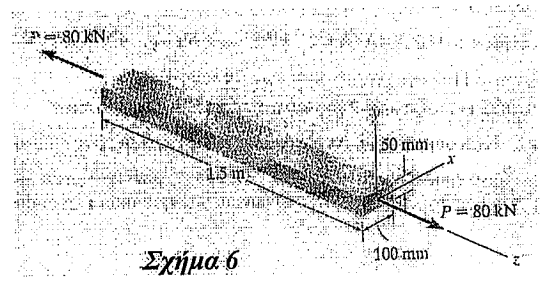


Σχήμα 5β

Άσκηση 6

Δοκίμιο από χάλυβα Α-36 (μέτρο ελαστικότητας E=200 GPa, λόγος Poisson ν=0.32) έχει τις διαστάσεις που φαίνονται στο Σχ.7. Θεωρώντας ότι το υλικό συμπεριφέρεται γραμμικώς ελαστικά και ότι ασκείται στο δοκίμιο αξονική δύναμη P=80 kN υπολογίστε:

α. Την αλλαγή του μήκους του δοκιμίου.
β. Την αλλαγή των διαστάσεων της διατομής του.
γ. Την ενέργεια που αποθηκεύθηκε στο δοκίμιο.



Σχήμα 6

Άσκηση 7

Κυλινδρικό δοκίμιο μήκους L_o=100 mm και ακτίνας r_o=5.63 mm υποβάλλεται σε εφελκυσμό. Η συμπεριφορά του υλικού (θεωρείται όλκιμο) περιγράφεται ικανοποιητικά από το γραμμικώς ελαστικό - γραμμικώς κρατυνόμενο μοντέλο με μέτρο ελαστικότητας E=200 GPa, όριο διαρροής σ_y=300 MPa, μέτρο κράτυνσης H= 40 GPa και λόγο Poisson ν=0.3.

α. Το δοκίμιο υφίσταται εφελκυσμό.
   1. Να ευρεθεί η δύναμη που απαιτείται για να αστοχήσει το υλικό.
   2. Να ευρεθεί η δαπανηθείσα ενέργεια.
   3. Να ευρεθεί το τρέχον μήκος και η τρέχουσα διάμετρος του δοκιμίου.

β. Η δύναμη αυξάνει κατά 25%.
   1. Να ευρεθεί η δαπανηθείσα ενέργεια. (+ Τ. προηγούμενο)
   2. Να ευρεθεί το τρέχον μήκος του δοκιμίου.

γ. Το δοκίμιο αποφορτίζεται πλήρως.
   1. Να ευρεθεί το τελικό μήκος του (αφόρτιστου) δοκιμίου.
   2. Να ευρεθεί η ανακτηθείσα ενέργεια. → Ατελ.
   3. Να ευρεθεί η απωλεσθείσα (με μορφή θερμότητας) ενέργεια.

δ. Στη συνέχεια το δοκίμιο επαναφορτίζεται θλιπτικά.
   1. Να ευρεθεί η δύναμη στην οποία το δοκίμιο θα αστοχήσει (υπό τη θλιπτική, πλέον, φόρτιση).
   2. Να ευρεθεί το μήκος του δοκιμίου τη στιγμή της διαρροής υπό θλίψη.

ε. Η θλιπτική δύναμη αυξάνει περαιτέρω.
   Να ευρεθεί η δύναμη υπό την οποία το δοκίμιο θα έχει επανακτήσει το αρχικό αφόρτιστο μήκος.

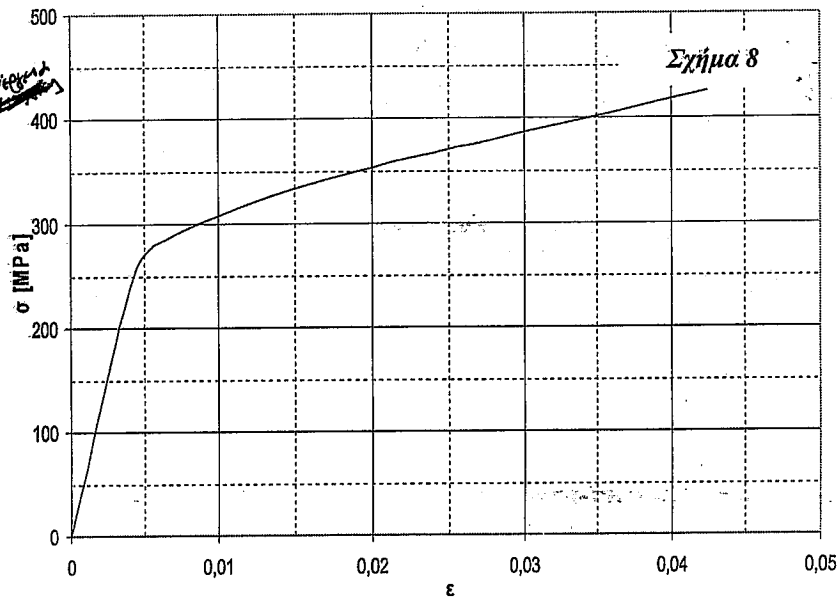
στ. Να ευρεθεί η θλιπτική δύναμη που απαιτείται, ώστε αν στη συνέχεια αυτή αφαιρεθεί, το δοκίμιο (αφόρτιστο πλέον) να έχει το αρχικό του μήκος.

Να αγνοηθεί κάθε παρασιτικό φαινόμενο καθώς και φαινόμενα λυγισμού, βαρελοποίησης και λαίμωσης.

Άσκηση 8

Το διάγραμμα τάσεων - παραμορφώσεων του Σχ.8 ελήφθη από τα δεδομένα πειράματος μονοαξονικού εφελκυσμού μεταλλικού δοκιμίου, αρχικού μήκους 100 mm. Στηριζόμενοι στο διάγραμμα εκτιμήστε την τιμή των κάτωθι μεγεθών για το υλικό του δοκιμίου:

α. Μέτρο ελαστικότητας.
β. Όριο αναλογίας.
γ. Συμβατική τάση διαρροής.
δ. Ελαστική ανάπαλση.
ε. Υπερελαστική ανάπαλση. → Αυξετώμενη ενέργεια η στιγμή της
στ. Ολκιμότητα.
ζ. Το τελικό μήκος του δοκιμίου ελάχιστα πριν τη θραύση.
η. Το μήκος του δοκιμίου μετά τη θραύση.
θ. Το μήκος του δοκιμίου αν αυτό αποφορτιζόταν τη στιγμή που η τάση ήταν 350 MPa.
ι. Τη συνολικώς δαπανηθείσα ενέργεια ανά μονάδα όγκου για την θραύση του δοκιμίου.

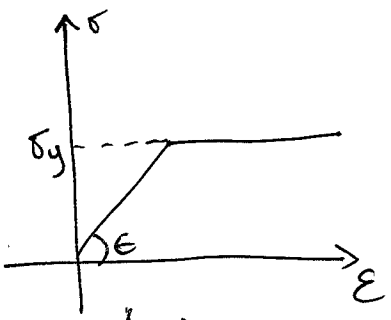


Σχήμα 8

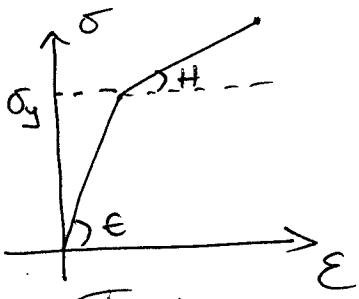
1η Ενότητα — Γενικές Οδηγίες

Οι ασκήσεις αυτές αποτελούν τη βάση για το τάλαντα. Ουσιαστικά είναι απλές εφαρμογές τύπων και απαιτούν πλήρη κατανόηση του διαγράμματος σ–ε.

→ Ένα υλικό έχει μία τάση διαρροής που συμβολίζεται με σ_y. Αν αυτή ξεπεραστεί, τότε επέρχεται διαρροή. Εφείς συνήθως μελετάμε όλκιμα υλικά, με αποτέλεσμα η τάση διαρροής να ταυτίζεται με την τάση θραύσης. Το τι συμβαίνει μετά τη διαρροή εξαρτάται από το αν το υλικό έχει χαρακτηριστεί ως γραμμικώς ελαστικό-απολύτως πλαστικό ή γραμμικώς ελαστικό-γραμμικός κρατυνάμενο. Στην πρώτη περίπτωση, μετά την τάση διαρροής, το υλικό χάνει τη φέρουσα ικανότητά του και παραμορφώνεται ανεξέλεγκτα. Στην περίπτωση που το υλικό είναι κρατυνόμενο, δεν χάνει τη φέρουσα ικανότητά του αλλά έχει πολύ μικρότερο μέτρο ελαστικότητας που συμβολίζεται συνήθως με H.



Απολύτως Πλαστικό



Γραμμικός Κρατυνάμενο.

σ_y, E, H

Μηχανικές Ιδιότητες και είναι ανεξάρτητες των συνθηκών φόρτισης

Στα προβλήματα αυτά μελετάμε δοκίμια σε σχήμα ράβδου. Η τάση δίνεται από τον τύπο $\sigma = \frac{F}{A}$

όπου F η ασκούμενη δύναμη και A το εμβαδό διατομής. Ισχύει επίσης ότι $\sigma = \varepsilon E$. Η τάση (σ) εκφράζεται σε MPa συνήθως, ενώ το E σε GPa. Η παραμόρφωση είναι αδιάστατο μέγεθος και συνήθως πολλαπλασιάζεται με το 10^{-3} για να μας δώσει "καλά" αποτελέσματα. Αυτό γιατί παραμόρφωση σημαίνει επιμήκυνση ή βράχυνση και από τον τύπο $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \rightarrow \Delta L = \varepsilon L$, εκφράζουμε εύκολα το ΔL σε χιλιοστά που είναι και το σύνηθες.

[Ασκήσεις]

(1) Απλή εφαρμογή τύπων.

(2) Ομοίως

(3)+(4) Σημαντικές ασκήσεις για να καταλάβουμε πως βρίσκουμε την παραμένουσα παραμόρφωση μετά το πέρας της τάσεως διαρροής. Ουσιαστικά συμβουλεύεστε το διάγραμμα σ-ε και κινούμαστε παράλληλα με το αρχικό μέτρο ελαστικότητας E κατά την αποφόρτιση.

(5) Συνδυασμός των από πάνω ασκήσεων. Προσοχή στην αλλαγή του εμβαδού διατομής ⟹ Άλλη τάση για ίδια F.

(6) Στο (1) φύλλο το εμβαδόν του τριγώνου δίνει την πυκνότητα ενέργειας ανά m^3. Για να βρούμε την ενέργεια πολλαπλασιάζουμε το εμβαδόν με τον όγκο του δοκιμίου.

(7) Η πιο σημαντική άσκηση. Εδώ συναντάμε το φαινόμενο Bauschinger. Αν κάποιος μπορεί να λύσει αυτή την άσκηση μπορεί να λύσει και τις προηγούμενες, αλλά και τις περισσότερες του φυλλαδίου 2.

(8) Ίδια άσκηση με τις από πάνω.

Μηχανική ΙΙ - Ασκήσεις Ενισχυτικής Διδασκαλίας (2013)

1η Σειρά

[redacted]

① $P = 50\,kN \rightsquigarrow P = 50\times10^{3} \rightsquigarrow \boxed{P = 5\times10^{4}\,N}$

$\sigma_y = 100\,MPa = 100\times10^{6} \Rightarrow \boxed{\sigma_y = 10^{8}\,Pa}$

$\sigma_y = \frac{P_y}{A} \rightsquigarrow A_y = \frac{P_y}{\sigma_y} \overset{P_y \equiv P}{\rightsquigarrow} A_y = \frac{5\times10^{4}}{10^{8}} \rightsquigarrow \boxed{A_y = 5\times10^{-4}\,m^2}$

Κυλινδρική ράβδος → Κυκλική διατομή $A_y = \pi R_y^2$

$R_y = \sqrt{\frac{A_y}{3.1416}} \rightsquigarrow R_y = \sqrt{\frac{5\times10^{-4}}{3.1416}} \rightsquigarrow R_y = 1.59\times10^{-2}\,m$

$2R = D \rightsquigarrow \boxed{D = 3.18\,cm}$

② (a) $d_o = 25\,mm \rightsquigarrow d_o = 25\times10^{-3}\,m \rightsquigarrow r_o = 12.5\times10^{-3}\,m \rightsquigarrow A_o = \pi r_o^2 \rightsquigarrow A_o = 3.1416 \times (156.25\times10^{-6})$

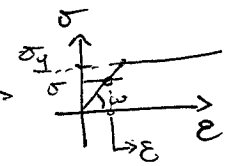
$L_o = 250\,mm \rightsquigarrow \boxed{L_o = 25\times10^{-2}\,m}$

↳ $\boxed{A_o = 491\times10^{-6}\,m^2}$

$\Delta L = 1.2\times10^{-3}\,m \rightsquigarrow \varepsilon_\ell = \frac{\Delta L}{L_o} = \frac{1.2\times10^{-3}}{25\times10^{-2}} \rightsquigarrow \boxed{\varepsilon_\ell = 48\times10^{-4}}$

$F = 165\times10^{3}\,N \rightsquigarrow \sigma = \frac{F}{A_o} \rightsquigarrow \sigma = \frac{165\times10^{3}}{491\times10^{-6}} \rightsquigarrow \sigma = 0.336\times10^{9} \rightsquigarrow \boxed{\sigma = 336\,MPa}$

$\sigma < \sigma_y \rightsquigarrow$ Το υλικό δεν έχει καταστραφεί →



$\tan\omega = E$

Βρισκόμαστε στη γραμμική περιοχή

↳ $\sigma = \varepsilon E \rightsquigarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_\ell} \rightsquigarrow E = \frac{336\times10^{6}}{48\times10^{-4}} \rightsquigarrow \boxed{E = 70\,GPa}$

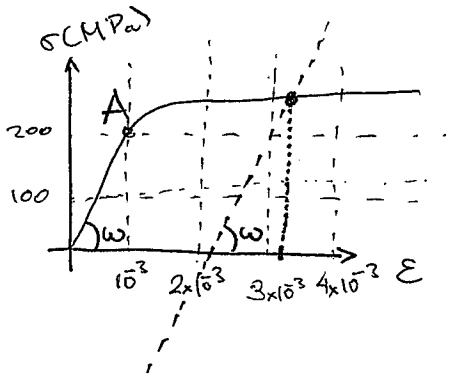
③ $\nu = 0.35$ $\quad \nu = -\frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_\ell} \rightsquigarrow \varepsilon_{tr} = -\nu\times\varepsilon_\ell \rightsquigarrow \varepsilon_{tr} = -0.35\times48\times10^{-4}$

$\varepsilon_{tr} = -1680\times10^{-6} \rightsquigarrow \boxed{\varepsilon_{tr} = -1.68\times10^{-3}}$

$\varepsilon_{tr} = \frac{\Delta D}{D_o} \rightsquigarrow \Delta D = \varepsilon_{tr}\times D_o \rightsquigarrow \Delta D = -1.68\times10^{-3}\times25\times10^{-3} = -42\times10^{-6}$

$\boxed{\Delta D = -42\,\mu m}$

③



$L_o = 2m \quad \Delta L = 6.5\times10^{-3}\,m$

$\varepsilon_\ell = \frac{\Delta L}{L_o} = \frac{6.5\times10^{-3}}{2} \rightsquigarrow \boxed{\varepsilon_\ell = 3.25\times10^{-3}}$

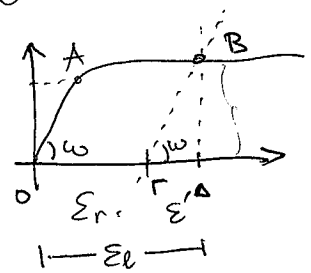
Επομένως, το υλικό φορτίζεται πέραν του ορίου της τάσεως διαρροής.

Για να βρούτε ποια θα είναι η παραμένουσα επιμήκυνση, πρέπει πρώτα να υπολογίσουτε το Ε.

Από το διάγραμμα: $\sigma = \varepsilon E \rightsquigarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \xrightarrow{\text{Σημείο A}} \begin{cases} \sigma = 200\,MPa = 2\times10^8\,Pa \\ \varepsilon = 10^{-3} \end{cases}$

$\rightsquigarrow E = \frac{2\times10^8}{10^{-3}} \rightsquigarrow \boxed{E = 200\,GPa}$

↳



$\tan\omega = E \rightsquigarrow B\hat{\Gamma}\Delta \rightsquigarrow \tan\omega = \frac{|B\Delta|}{|\Gamma\Delta|} \equiv E$

$|B\Delta| = |\sigma_y| = 250\,MPa$ (Σχήμα)

$\cancel{|\Gamma\Delta| = \frac{|B\Delta|}{E} = \frac{250\times10^6}{200\times10^9}}$

$|\Gamma\Delta| = \frac{250\times10^6}{200\times10^9} \Rightarrow \boxed{|\Gamma\Delta| = 1.25\times10^{-3} \equiv \varepsilon'} \rightsquigarrow \varepsilon_r = \varepsilon_\ell' - \varepsilon'$

$\varepsilon_r = (3.25 - 1.25)\times10^{-3}$

Η παραμένουσα παραμόρφωση λοιπόν ισούται με $\boxed{\varepsilon_r = 2\times10^{-3}}$

& $\varepsilon_{r,\ell} = \frac{\Delta L_r}{L_o} \rightsquigarrow \Delta L_r = \varepsilon_{r,\ell}\times L_o = 2\times10^{-3}\times2 \rightsquigarrow \boxed{\Delta L_r = 4\,mm}$

Παραμένουσα επιμήκυνση

$L_{final} = \Delta L_r + L_o = 2m + 4mm$

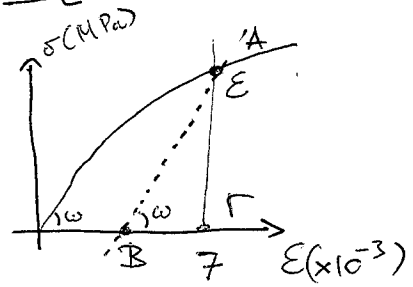
$\boxed{L_{final} = 2.004\,m}$

→

④ ⓐ $L_o = 0.8\,m$

$\Delta L = 5.6\times10^{-3}\,m$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_o} \rightarrow \varepsilon = \frac{5.6\times10^{-3}}{0.8} \rightsquigarrow \boxed{\varepsilon = 7\times10^{-3}}$$



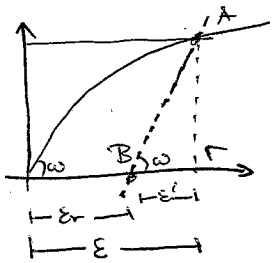
Όπως και πριν, πρέπει να βρούμε το μέτρο ελαστικότητας για να υπολογίσουμε την παραμένουσα παραμόρφωση.

★ Αν παρατηρήσουμε το σχήμα 4, θα βρούμε ένα σημείο στη γραφική περιοχή (A) με $\varepsilon = 0.001$ και $\sigma \cong 40\,MPa$

! Δεν είναι σωστό να υπολογίσουμε το E με κάποιο άλλο σημείο μετά το πέρας της τάσεως διαρροής.

$$\sigma = \varepsilon E \rightsquigarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightsquigarrow E = \frac{40\times10^{6}}{10^{-3}} \rightsquigarrow \boxed{E = 40\,GPa}$$

$$\tan\omega = E \overset{\Delta ABΓ}{\rightsquigarrow}$$



$|AΓ| \equiv \sigma_A$ $\quad \sigma_A \cong 170\,MPa$ (βλ. Σχήμα)

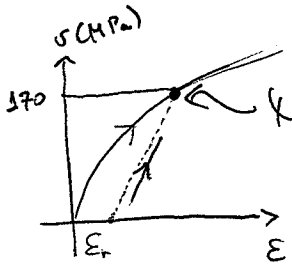
$|BΓ| \equiv \varepsilon'$

$$\tan\omega \equiv E = \frac{|AΓ|}{|BΓ|} = \cancel{\frac{170\times10^{6}}{}} \rightsquigarrow |BΓ| = \frac{170\times10^{6}}{40\times10^{9}} = 4.25\times10^{-3}$$

$$\varepsilon' = 4.25\times10^{-3} \rightsquigarrow \varepsilon_{remaining} \equiv \varepsilon_r = \varepsilon - \varepsilon' = (7 - 4.25)\times10^{-3} \rightsquigarrow \boxed{\varepsilon_r = 2.75\times10^{-3}}$$

Παραμένουσα παραμόρφωση

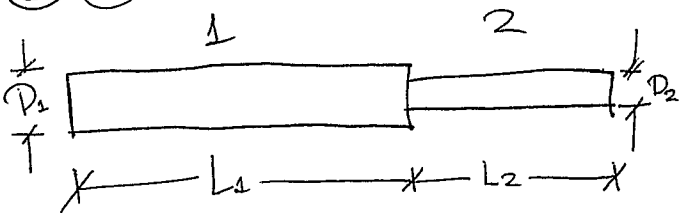
ⓑ



Νέο όριο αναλογίας

→

⑤ ⓐ



$L_1 = 0.6m$ $D_1 = 2\times10^{-2}m \xrightarrow{r=d/2} A_1 = 3.14\times10^{-4}m^2$ ($A=\pi r^2$)

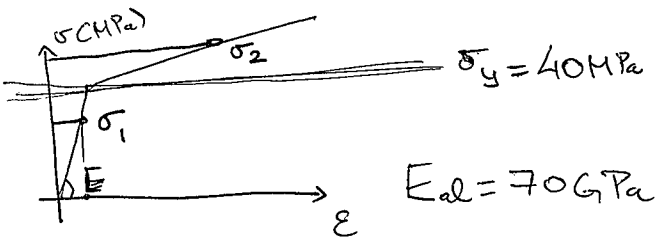
$L_2 = 0.4m$ $D_2 = 1.5\times10^{-2}m \rightsquigarrow A_2 = 1.77\times10^{-4}m^2$ ($A=\pi r^2$, $r=d/2$)

Η τάση είναι διαφορετική για το τμήμα 1, και διαφορετική για το τμήμα 2.

$F = 10KN = 10^4 N$

$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} \rightsquigarrow \sigma_1 = \frac{10^4}{3.14\times10^{-4}} \rightsquigarrow \sigma_1 = 0.318\times10^8 Pa \rightsquigarrow \boxed{\sigma_1 = 31.8 MPa}$ $\sigma_1 < \sigma_y$ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ

$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} \rightsquigarrow \sigma_2 = \frac{10^4}{1.77\times10^{-4}} \rightsquigarrow \sigma_2 = 0.565\times10^8 Pa \rightsquigarrow \boxed{\sigma_2 = 56.5 MPa}$ $\sigma_2 > \sigma_y$ ΑΣΤΟΧΙΑ



$E_{al} = 70GPa \rightsquigarrow \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \rightsquigarrow \varepsilon_1 = \frac{31.8\times10^6}{70\times10^9}$

$\boxed{\varepsilon_1 = 0.45\times10^{-3}}$

• Επομένως το τμήμα 1 που δεν αστοχεί και βρίσκεται ακόμα στη γραμμική του περιοχή, υπακούει στο ν. Hooke (άρα όντως παραπάνω επιλέξαμε ορθά τον τύπο $\sigma_1 = \varepsilon_1 E$ για τον υπολογισμό της παραμόρφωσης):

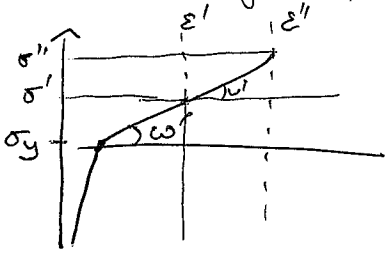
$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L_1}{L_1} \rightsquigarrow \Delta L_1 = 0.45\times10^{-3}\times0.6 \rightsquigarrow \boxed{\Delta L_1 = 0.27 mm}$ Επιμήκυνση πρώτης ράβδου

• Το τμήμα 2 αστοχεί. Στην εκφώνηση της άσκησης δεν μας δίνεται το μέτρο ελαστικότητας της δεύτερης γραμμικής περιοχής μετά το πέρας της αστοχίας. Θα προσπαθήσουμε να το υπολογίσουμε προσεγγιστικά μέσω του σχήματος.

$\rightsquigarrow$ Για $\varepsilon' = 0.02 \rightsquigarrow \sigma' \cong 47MPa$

$\rightsquigarrow$ Για $\varepsilon'' = 0.04 \rightsquigarrow \sigma'' \cong 55MPa$

$\tan\omega' = \frac{\sigma''-\sigma'}{\varepsilon''-\varepsilon'}$



$$\tan\omega' = \frac{(55-47)\times10^6}{0.04-0.02} = \frac{8\times10^6}{2\times10^{-2}} = 4\times10^8 = 0.4\times10^9 \rightarrow \boxed{E' = 0.4\ GPa}$$

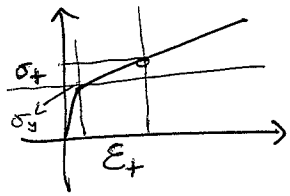
$$\boxed{E' \equiv H = 0.4\ GPa}$$ Μέτρο κράτυνσης

Μέχρι την τάση διαρροής, η ράβδος 2 επιμηκύνεται σύμφωνα με τον ν.Hooke.

$$\hookrightarrow \sigma_y = \varepsilon_y E \rightarrow \varepsilon_y = \frac{40\times10^6}{70\times10^9} \rightarrow \boxed{\varepsilon_y = 0.57\times10^{-3}}$$

Στη δεύτερη περιοχή, θα επιμηκυνθεί υπακούοντας τον ν.Hooke αλλά με E' αντί για E.

Η τάση μετά το πέρας της σ_y είναι ίση με:



$$\sigma_t = |\sigma_y - \sigma_1| = 56.5 - 40 \rightarrow \sigma_t = 16.5\ MPa$$

$$\sigma_t = \varepsilon_t E \rightarrow \varepsilon_t = \frac{16.5\times10^6}{4\times10^8} \rightarrow \varepsilon_t = 4.125\times10^{-2} = 41.25\times10^{-3}$$

$$\varepsilon_{2,total} = \varepsilon_y + \varepsilon_t = (0.57 + 41.25)\times10^{-3} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{2,total} = 41.82\times10^{-3}}$$

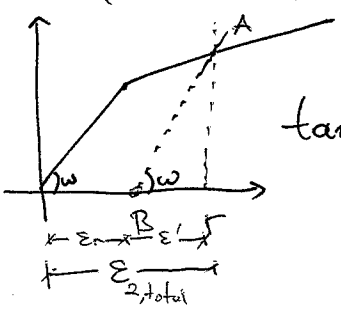
$$\Delta L_2 = \varepsilon_{2,total}\times L_2 \rightarrow \Delta L_2 = 41.82\times10^{-3}\times0.4 \rightarrow \boxed{\Delta L_2 = 16.73\ mm}$$

$$\Delta L_{total} = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 16.73 + 0.27 \rightarrow \boxed{\Delta L_{total} = 17\ mm}$$ Συνολική επιμήκυνση

(β) Αν η ράβδος αποφορτισθεί

→ Η ράβδος 1 θα επιστρέψει στην αρχική της κατάσταση, καθώς μηδενίστηκε που αποκήθηκε δεν ξεπέρασε την τάση διαρροής για τη δεδομένη διατομή της ράβδου 1.

→ Η ράβδος 2:



$\tan\omega = E$

$|A\Gamma| \equiv \sigma_2 = 56.5\ MPa$

$|B\Gamma| \equiv \varepsilon'$

$$\tan\omega \equiv E = \frac{|A\Gamma|}{|B\Gamma|} \Rightarrow \cancel{|B\Gamma| = 70\times10^9}$$

$$|B\Gamma| = \frac{56.5\times10^6}{70\times10^9} \rightarrow \boxed{|B\Gamma| = 0.81\times10^{-3}}$$ $\equiv \varepsilon'$

$$\varepsilon_{remaining} = \varepsilon_{2,total} - \varepsilon'$$

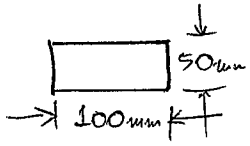
$$\varepsilon_r = (41.82 - 0.81)\times10^{-3} \rightarrow \boxed{\varepsilon_r \cong 41\times10^{-3}}$$

Παραμένουσα παραμόρφωση ράβδου 2 που ταυτίζεται με τη συνολική παραμένουσα παραμόρφωση.

⑥ $E = 200\,GPa$

$\nu = 0.32$

$L_o = 1.5\,m$



$A_o = (50 \times 100) \times 10^{-6}$

$\underline{A_o = 5 \times 10^{-3}\,m^2}$

α) $P = 80\,kN = 8 \times 10^4\,N$

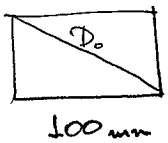
$\sigma_1 = \frac{P}{A_o} = \frac{8 \times 10^4}{5 \times 10^{-3}} \rightsquigarrow \sigma_1 = 1.6 \times 10^7 \rightsquigarrow \underline{\sigma_1 = 16\,MPa}$

$\sigma_1 = \varepsilon_1 E \rightsquigarrow \varepsilon_1 = \sigma_1 / E \rightsquigarrow \varepsilon_1 = \frac{16 \times 10^6}{200 \times 10^9} \rightsquigarrow \underline{\varepsilon_1 = 8 \times 10^{-5}}$

$\varepsilon_{1,l} = \frac{\Delta L_1}{L_o} \rightsquigarrow \Delta L = 8 \times 10^{-5} \times 1.5 \rightsquigarrow \Delta L = 12 \times 10^{-5}\,m \rightsquigarrow \boxed{\Delta L = 0.12\,mm}$ Επιμήκυνση

β) $\nu = -\frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_l} \rightsquigarrow \varepsilon_{tr} = -\nu \times \varepsilon_l \rightsquigarrow \varepsilon_{tr} = -0.32 \times 8 \times 10^{-5} \rightsquigarrow \underline{\varepsilon_{tr} = -2.56 \times 10^{-5}}$

$\varepsilon_{tr} = \frac{\Delta D}{D_o} \rightsquigarrow \Delta D = \varepsilon_{tr} \times D_o$

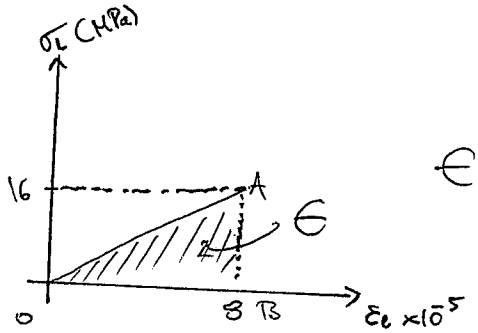


Πυθ/ρειο $\rightsquigarrow D_o = 0.112\,m$

$\Delta D = -2.56 \times 10^{-5} \times 0.112$

$\boxed{\Delta D = -0.287 \times 10^{-5}\,m}$ Συμπίεση.

γ)



$\epsilon \equiv A_{O\hat{A}B}$

$A_{O\hat{A}B} = [16 \times 10^6 \times 8 \times 10^{-5}]/2$

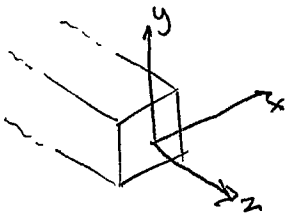
$\hookrightarrow \boxed{\epsilon = 640\,J}/m^3 \rightarrow$ Energy Density.

$\epsilon = 640\,J/m^3 \cdot V_{δοκιμίου}$.

(*) $\beta \rightsquigarrow \nu = -\frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_l}$

$\xrightarrow{x} 0.32 = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \Rightarrow \varepsilon_x = -0.256 \times 10^{-4} = \frac{\Delta L_x}{L_{o_x}} = -0.256 \times 10^{-2}\,mm$

$\xrightarrow{y} 0.32 = \underset{\text{ίδιο } \varepsilon}{\cdots} \quad \Delta L_y = -0.128 \times 10^{-2}\,mm$



1η Σειρά - ΜΙΙ - 2013

(7) $L_0 = 100\,mm = 100\times10^{-3}\,m \rightarrow \boxed{L_0 = 10^{-1}\,m}$

$r_0 = 5.63\,mm \Rightarrow A_0 = \pi r_0^2 = 3.14\times(5.63\times10^{-3})^2 \rightarrow \boxed{A_0 = 10^{-4}\,m^2}$ } $Volume = 10^{-4}\times10^{-1} = 10^{-5}\,m^3$

$E = 200\,GPa$

$H = 40\,GPa$ $\quad \sigma_y = 300\,MPa \quad \nu = 0.3$

(a) (1) $F_y = ? \rightarrow F_y = \sigma_y \times A \rightarrow F_y = 300\times10^{6}\times10^{-4} \rightarrow \boxed{F_y = 30\,KN}$

(2) $\sigma_y = \varepsilon_y E \rightarrow \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \rightarrow \varepsilon_y = \frac{300\times10^6}{200\times10^9} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_y = 1.5\times10^{-3}}$

$A_1 = \frac{\varepsilon_y\times\sigma_y}{2} = \frac{1.5\times10^{-3}\times300\times10^6}{2}\times[Pa] \rightarrow \boxed{A_1 = 225\times10^3\,[Pa]}$ $\qquad A_1 \equiv SED \rightarrow$ Strain Energy Density

$Energy = A_1\times Volume \longrightarrow$ $Volume = L_0\times A_0 = 10^{-5}\,m^3$ $\longrightarrow Energy = 225\times10^3\times10^{-5} \rightarrow \boxed{Energy = 2.25\,J}$

(3) $\varepsilon_l = \frac{\Delta L}{L_0} \rightarrow \Delta L_y = \varepsilon_{ly}\times L_0 \rightarrow \Delta L_y = 1.5\times10^{-3}\times10^{-1} \rightarrow \Delta L_y = 1.5\times10^{-4}\,m \rightarrow \Delta L_y = 0.15\,mm$

$\rightarrow \boxed{L_y = 100.15\,mm}$

$\nu = -\frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_l} \rightarrow \varepsilon_{tr} = -\nu\times\varepsilon_l \rightarrow \varepsilon_{tr} = 0.3\times1.5\times10^{-3} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{tr} \overset{\text{θετικο}}{=} 0.45\times10^{-3}}$

$\varepsilon_{tr} = \frac{\Delta D}{D_0} \rightarrow \Delta D_y = \varepsilon_{tr}\times D_0 \rightarrow \Delta D_y = -0.45\times10^{-3}\times11.26\times10^{-3} \rightarrow \boxed{\Delta D_y = -5.1\times10^{-6}\,m}$

$\boxed{D_y = 2\times r_0 - \Delta D_y}$

(B) (1) (2) $F_B = F_y\times\frac{25}{100} + F_y \rightarrow F_B = 7.5 + 30 \rightarrow \boxed{F_B = 37.5\,KN}$

$\sigma_B = \frac{F_B}{A_0} \rightarrow \sigma_B = \frac{37.5\times10^3}{10^{-4}} \rightarrow \boxed{\sigma_B = 375\,MPa}$

$\varepsilon_B = \tan\phi = H = \frac{\sigma_B - \sigma_y}{\varepsilon_B} \rightarrow \varepsilon_B = \frac{375-300}{40}\times10^{-3} \rightarrow \varepsilon_B = 1.875\times10^{-3}$

$\boxed{\varepsilon_{01} = \varepsilon_y + \varepsilon_B = 3.375\times10^{-3}}$

$\varepsilon_B = \frac{\Delta L_B}{L_0} \rightarrow \Delta L_B = 3.375\times10^{-3}\times10^{-1} \rightarrow \Delta L_B = 0.3375\,mm \rightarrow \Delta L_B = 0.34\,mm \longrightarrow \boxed{L_B = 100.34\,mm}$

$ABB'A' \rightarrow A_2 = \frac{\sigma_B + \sigma_y}{2}\varepsilon_B \rightarrow A_2 = \frac{300+375}{2}\times10^6\times1.875\times10^{-3} \rightarrow \boxed{A_2 = 632.08\,kPa}$

$Energy' = A_2\times Vol \rightarrow Energy' = 632.8\times10^3\times10^{-5} \rightarrow Energy' = 6.328\,J \rightarrow \boxed{Energy' = 6.33\,J}$

$Energy_B = Energy' + Energy \rightarrow \boxed{Energy_B = 8.58\,J}$

γ) ① Ελαστικά $\tan\omega = \frac{\sigma_B}{E} \rightarrow \varepsilon' = \frac{375\times10^6}{200\times10^9} \rightarrow \varepsilon' = 1.875\times10^{-3}$

$\varepsilon_{rem} = \varepsilon_{01} - \varepsilon' \rightarrow \underline{\varepsilon_{rem} = 1.5\times10^{-3} \equiv \varepsilon_y}$ Σύμπτωση

Επομένως φτάνουμε τώρα στο σημείο Α'.

$\varepsilon_{rem} = \frac{\Delta L_{rem}}{L_0} \rightarrow \Delta L_{rem} = 1.5\times10^{-3}\times L_0 \rightarrow \Delta L_{rem} = 0.15\,mm \rightarrow \boxed{L_\gamma = 100.15\,mm}$

② Ανακτηθείσα Ενέργεια $= A_{A'\Gamma'B}^{\Delta} \times V_0 l$ $\quad A_3 \equiv A_{A'\Gamma'B}^{\Delta}$

$A_3 = (\varepsilon' \times \sigma_B)/2 \rightarrow \underline{A_3 = 351.56\,kPa}$

$Energy_2 = 351.56\times10^3\times10^{-5} \rightarrow \boxed{Energy_2 = 3.51\,J}$

③ Η απωλεσθείσα ενέργεια ισούται με τη διαφορά της ανακτηθείσας μείον την αλική από όλα τα προηγούμενα ερωτήματα.

$E_{lost} = Energy_B - Energy_2 \rightarrow E_{lost} = 8.58 - 3.51 \rightarrow \boxed{E_{lost} = 5.07\,J}$

δ) Το δοκίμιο θα αστοχήσει πλαστικά όταν θα συναντήσει στο διάγραμμα την ευθεία κράτους υπό θλίψη. Αυτό το σημείο είναι το Δ και όχι το Ε.

• Bauschinger (Η τάση διαρροής υπό θλίψη είναι πάντα χαμηλότερη αφού υπό εφελκυσμό επήλθε διαρροή).

⟹ Η τάση διαρροής είναι πειραμένη ισούται με την αύξηση της τάσης υπό εφελκυσμό από το προηγούμενο ερώτημα. ⟹ $\sigma_{yc}' = 300 - 75 = 225\,MPa$.

(c: compression) $\sigma_{yc} = \sigma_{yt}$ (t: tension) → Αύξηση της τάσης λόγω της τάσεως διαρροής υπό εφ/μο.

$\cancel{F_{yc} = \frac{\sigma_{yc}}{A_0}} \rightarrow \sigma_{yc} = \frac{F_{yc}}{A_0} \rightarrow F_{yc}' = \sigma_{yc}' \times A_0 = 225\times10^6\times10^{-4} \rightarrow \boxed{F_{yc}' = 225\,kN}$

② $\varepsilon_{yc}' = |\Delta\Delta'|$ Παρατηρείται φαινόμενο κατά το οποίο το δοκίμιο αστοχεί υπό θλίψη ενώ είναι επιμηκυμένο.

$\varepsilon_{y2} = \frac{\sigma_{yc}'}{E} \Rightarrow \varepsilon_{y,2} = \frac{225\times10^6}{200\times10^9} \rightarrow \varepsilon_{y,2} = 1.125\times10^{-3}$

$\varepsilon_{yc}' = |\varepsilon_{y2} - \varepsilon_{rem}| \rightarrow \varepsilon_{yc}' = 1.125 - 1.5\times10^{-3} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{yc}' = 0.375\times10^{-3}} \rightarrow \varepsilon_{yc}' = \frac{\Delta L_{yc}}{L_0} \rightarrow L_{yc} = \ldots$ Επιμηκυμένο!

(ε) Για να επανέλθει το δοκίμιο στο αρχικό του μήκος, πρέπει να το συμπιέσουμε μέχρι και το σημείο Ε στο σχήμα.

$\sigma_{c,add} = \sigma_{yc}' + |\Delta'\epsilon|$

σ_{yc}': Τάση διαρ. υπο θλίψη

$|\Delta'\epsilon|$: Βλ. σχήμα

$\tan\phi = \frac{|\Delta'\epsilon|}{\varepsilon_{yc}'} \rightarrow |\Delta'\epsilon| = 40\times10^{9}\times0.375\times10^{-3}$

$\phi = \phi$

$|\Delta'\epsilon| = 15\,MPa$

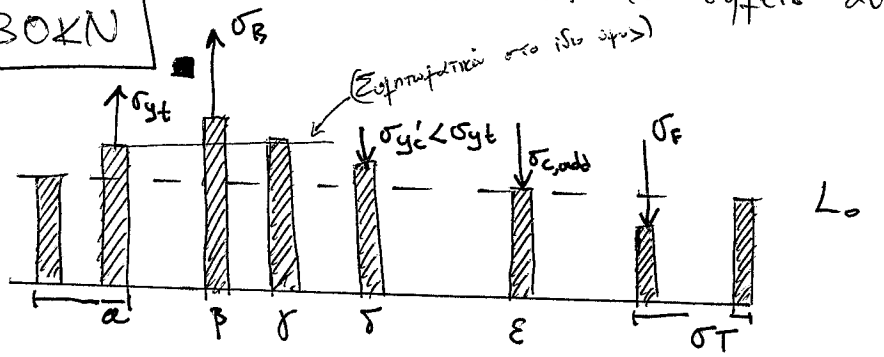
↳ Επιπλέον τάση για να επανέλθει στο αρχικό μήκος το δοκίμιο.

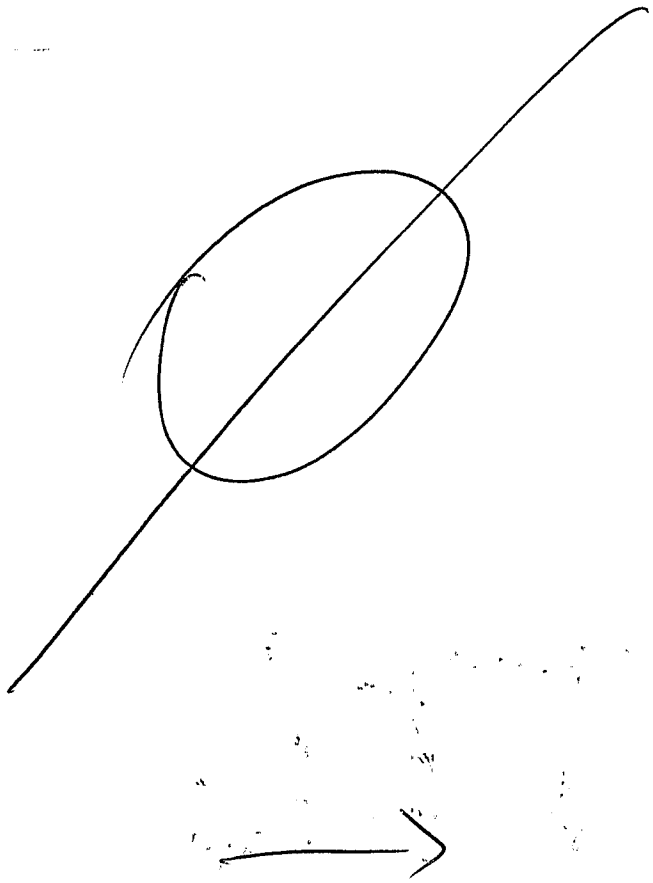
$\sigma_{c,add} = 225+15 \rightarrow \sigma_{c,add} = 240\,MPa \rightarrow F_{c,add} = 240\times10^{6}\times10^{-4}$

$F_{c,add} = 24\,KN$ → Για να παραμείνει το δοκίμιο στο αρχικό του μήκος αυτή η δύναμη δεν πρέπει να αφαιρεθεί.

(στ) Προκειμένου να επανέλθει το δοκίμιο στο αρχικό του μήκος αφόρτιστο, πρέπει να συμπιεστεί επιπλέον. Στο προηγούμενο ερώτημα, αν αφαιρέσουμε το φορτίο, το δοκίμιο θα έχει παραμένουσα παραμόρφωση ίση με ε_{yc}.
Επομένως, Θα συμπιέσουμε το δοκίμιο και άλλο, έτσι ώστε να τμήσουμε στο διάγραμμα σ-ε το σημείο F. Το σημείο αυτό έχει $\sigma_F = 300\,MPa \Rightarrow$

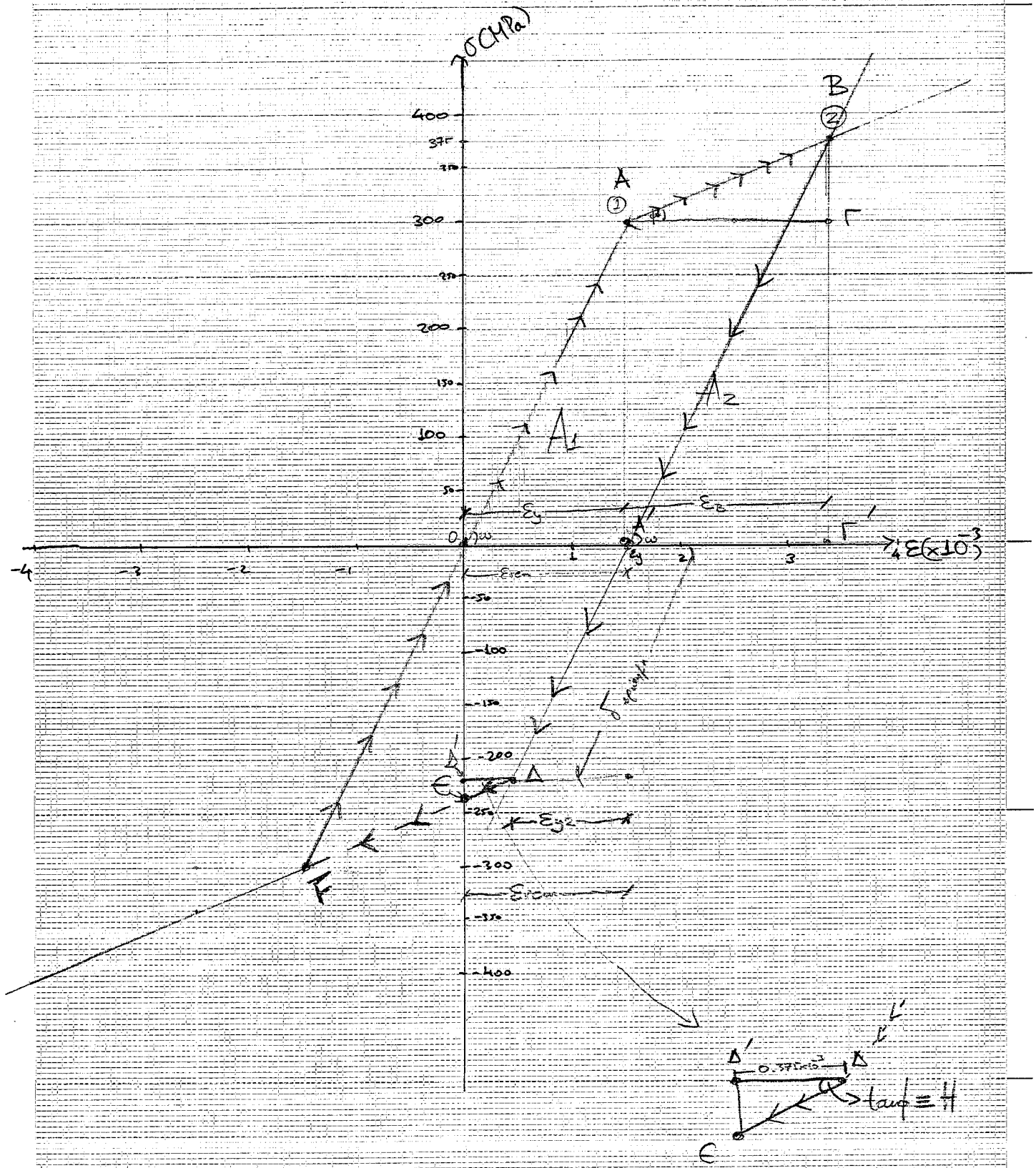
$F_{\sigma T} = 30\,KN$





ДІАГРАММА

MII – 1η Σελίδα – 7 (2013)



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

Ακαδημαϊκό Έτος 2012-2013

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ)

2η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

«ΤΑΣΗ» ΚΑΙ «ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ» – ΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ σ-ε

Άσκηση 1

Στο Εργαστηρίου Αντοχής Υλικών του ΕΜΠ εκτελέσθηκε πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού. Για τη μέτρηση των φορτίων χρησιμοποιήθηκε η βαθμονομημένη κλίμακα της μηχανής φορτίσεως ενώ για την μέτρηση των επιμηκύνσεων χρησιμοποιήθηκε μηχανικό μηκυνσιόμετρο (βάση μετρήσεως 10 mm, συντελεστή μεγεθύνσεως 2000 mm^{-1}. Το δοκίμιο, από όλκιμο υλικό, ήταν κυλινδρικό με ακτίνα διατομής 5 mm και ελεύθερο μήκος (μήκος μετρήσεως) 50 mm. Κατά τη διάρκεια του πειράματος κατεγράφησαν τα εξής δεδομένα:

- *Τη στιγμή της διαρροής* το φορτίο ήταν P_Δ=15700 N και η ένδειξη του μηκυνσιομέτρου 20.
- *Τη στιγμή της θραύσεως* το φορτίο ήταν P_Θ=18840 N.

Η θραύση επήλθε περίπου στη μέση του δοκιμίου και το τελικό μήκος των δύο τμημάτων του θραυσθέντος δοκιμίου, όπως αυτό μετρήθηκε *μετά* το πείραμα, ευρέθη να είναι συνολικώς ίσο με L_Θ=52 mm.

Θεωρώντας ότι το υλικό του δοκιμίου προσομοιώνεται ικανοποιητικά από το υπόδειγμα του *γραμμικώς ελαστικού - γραμμικώς κρατυνομένου* σώματος και αγνοώντας κάθε παρασιτικό φαινόμενο καθώς και φαινόμενα λυγισμού, λαίμωσης και βαρελοποίησης

Α. **1.** Να προσδιορισθεί το *μέτρο ελαστικότητας* του υλικού του δοκιμίου.
2. Να υπολογισθεί η *ελαστική ανάπαλση* του υλικού. → Ανακτώμενη ενέργεια τη στιγμή της διαρροής.
3. Να υπολογισθεί η *υπερελαστική ανάπαλση* του υλικού. → Ανακτώμενη ενέργεια κατά τη θραύση.
4. Να σχεδιασθεί το *πλήρες συμβατικό διάγραμμα συμβατικών τάσεων - συμβατικών παραμορφώσεων* τόσον στην περιοχή του *εφελκυσμού* όσον και στην περιοχή της *θλίψεως*.

Β. Από το ως άνω υλικό πρόκειται να κατασκευσθεί αμφίπακτο πρισματικό δομικό μέλος τετραγωνικής διατομής διαστάσεων 5cm x 5cm και μήκους 1 m. Να ελεγχθεί αν το συγκεκριμένο δομικό μέλος δύναται να φέρει επιτυχώς αξονικό θλιπτικό φορτίο ίσο με $P_{\Theta\Lambda}$=375 kN με συντελεστή ασφαλείας 1.25. Πόσο θα είναι τότε το μήκος του; → α ισχύει για τάσεις;

Άσκηση 2

Κυλινδρικό δοκίμιο σκυροδέματος διαμέτρου 0.15 m και ύψους 0.30 m καταπονείται με αξονικό θλιπτικό φορτίο. Στη διάρκεια του πειράματος κατεγράφη το φορτίο και οι ενδείξεις δύο αντιδιαμετρικώς τοποθετημένων ωρολογιακών βελομέτρων και συντάχθηκε ο Πίνακας Α2. Τα βελόμετρα είχαν βάση μετρήσεως 150 mm και εκάστη ένδειξη της κλίμακός τους αντιστοιχεί σε 0.01 mm. Το φορτίο αφαιρέθηκε ελάχιστα πριν εμφανισθεί η πρώτη ρωγμή.

α. Να σχεδιασθεί το συμβατικό διάγραμμα σ-ε.
β. Να υπολογισθεί το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του δοκιμίου.
γ. Να ευρεθεί το μήκος του δοκιμίου τη στιγμή της ρηγμάτωσης.
δ. Να ευρεθεί το μήκος του δοκιμίου μετά την αφαίρεση του φορτίου.
ε. Να εκτιμηθεί η ενέργεια που απαιτήθηκε για την φόρτιση.
στ. Να εκτιμηθεί η ανακτηθείσα ενέργεια κατά την αποφόρτιση.
ζ. Να εκτιμηθεί η απωλεσθείσα ενέργεια στον κύκλο φόρτιση-αποφόρτιση.
η. Το σκυρόδεμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή βραχέος κυλινδρικού δομικού μέλους το οποίο πρέπει να φέρει αξονικό θλιπτικό φορτίο ίσο με 5 MN με συντελεστή ασφαλείας 2. Να υπολογισθεί η ελάχιστη επιτρεπτή διάμετρος του δομικού μέλους.

Πίνακας Α2

Φορτίο [kN]	Ένδειξη βελομέτρων 1ου	Ένδειξη βελομέτρων 2ου
0	0.1	0.0
50	2.2	1.9
100	4.3	3.8
150	6.3	5.8
200	8.4	7.7
250	10.3	9.8
300	12.5	12.1
350	14.6	14.4
400	17.2	16.9
450	19.9	19.7
500	22.9	22.6
521.3	25.8	25.3(*)

(*) Εμφάνιση ρωγμής

$= 2\times10^{-5}$ m

$\varepsilon = \frac{2\times10^{-5}}{0,15}$

(Όταν η παραμένουσα παρόν μετά από επαναλαμβανόμενα πειράματα είναι 0.2% → εκεί ορίζουμε το συμβατικό)

0.2% ?

Άσκηση 3

Σε πείραμα εφελκυσμού κυλινδρικού δοκιμίου ακτίνας 10 mm και μήκους μετρήσεως 100 mm καταγράφηκαν τα φορτία και οι αντίστοιχες επιμηκύνσεις (Πίνακας Α3). Για το υλικό του δοκιμίου:

α. Να σχεδιασθεί το διάγραμμα τάσεων – παραμορφώσεων.

β. Να εκτιμηθούν (αφού δοθούν οι αντίστοιχοι ορισμοί) τα κάτωθι μεγέθη: Μέτρο ελαστικότητας, Συμβατική τάση διαρροής, Ελαστική ανάπαλση, Στερρότητα.

γ. Να σχεδιασθεί το προσομοίωμα του διαγράμματος τάσεων – παραμορφώσεων θεωρώντας το υλικό γραμμικώς ελαστικό - γραμμικώς κρατυνόμενο.

δ. Από το υλικό αυτό κατασκευάστηκε ράβδος μήκους 1m και διαμέτρου 20 cm:

δ1. Να εκτιμηθεί η μέγιστη αξονική εφελκυστική δύναμη η οποία μπορεί να ασκηθεί στη ράβδο χωρίς αστοχία του υλικού.

δ2. Στη συνέχεια το φορτίο αυτό αυξάνεται κατά 10%. Να ευρεθεί το μήκος του δοκιμίου για το συγκεκριμένο φορτίο.

δ3. Τέλος το φορτίο αφαιρείται. Να υπολογισθεί το τελικό μήκος της ράβδου και η ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά τη διάρκεια του κύκλου φόρτισης – αποφόρτισης.

ΔL [x 10^{-5} m]	F [kp] → 1 kP=10N
0	0
2	500
4	1000
6	1500
8	2000
10	2500
11	2740
12.5	2960
16	3025
32,5	3100
60	3190
98	3290
150	3450
190	3530

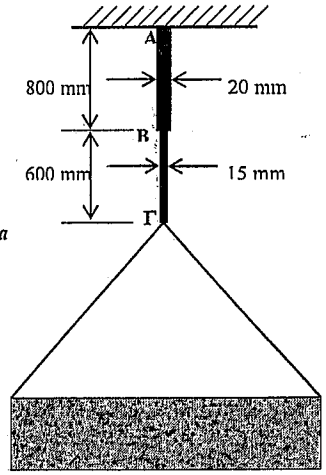
Πίνακας Α3

Άσκηση 4

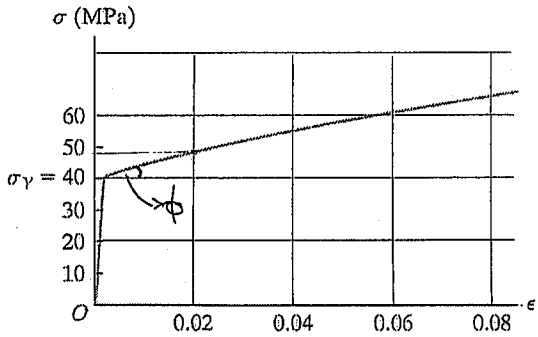
Μεταλλική ράβδος ΑΒΓ, κυκλικής διατομής, χρησιμοποιείται σε εργοτάξιο για ανάρτηση πρισματικού επιστυλίου διαστάσεων 0.4x0.4x1.2 m από μάρμαρο ειδικού βάρους 52.08 kN/m^3 (Σχ.4α). Το υλικό της ράβδου έχει μέτρο ελαστικότητας E=70 GPa ενώ το αξονικό διάγραμμα σ-ε φαίνεται στο Σχ.4β.

α. Υπολογίστε προσεγγιστικά την επιμήκυνση της μεταλλικής ράβδου όταν το επιστύλιο είναι αναρτημένο.

β. Αν η ράβδος αποφορτιστεί (αφαίρεση του αναρτημένου επιστυλίου) επανέρχεται στο αρχικό της μήκος ή υπάρχει παραμένουσα επιμήκυνση και πόση ;



Σχήμα 4α

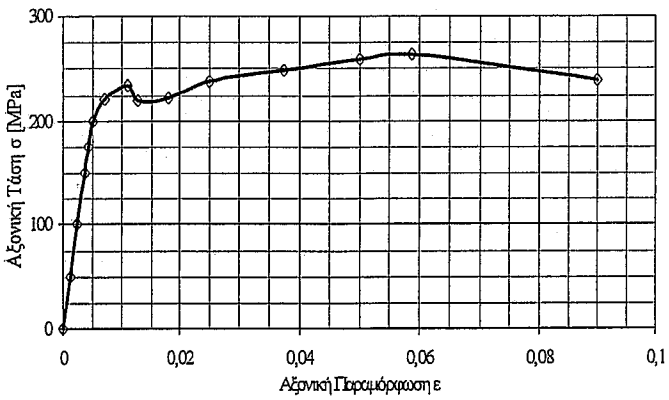


Σχήμα 4β

Άσκηση 5

Τα αποτελέσματα πειράματος εφελκυσμού με δοκίμιο από όλκιμο υλικό φαίνονται στο Σχ.5.

1. Εκτιμήστε το *μέτρο ελαστικότητας*, τη *συμβατική τάση διαρροής*, την *ελαστική ανάπαλση*, την *ολκιμότητα* και την *υπερελαστική ανάπαλση*.
2. Από το υλικό αυτό κατασκευάσθηκε κυλινδρική ράβδος με μήκος 1 m και διάμετρο εγκάρσιας διατομής 3 cm. Ποιο το μέγιστο αξονικό θλιπτικό φορτίο που επιτρέπεται να ασκηθεί στη ράβδο και ποιο είναι το μήκος της υπό τη συγκεκριμένη φόρτιση; Αν το φορτίο αυξηθεί κατά 15% και μετά το δοκίμιο αποφορτισθεί πλήρως ποιο είναι το τελικό του μήκος;



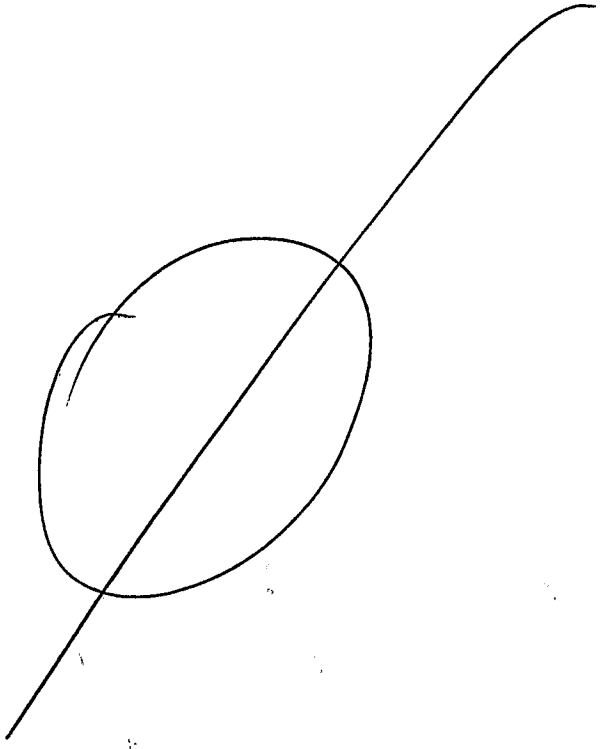
Σχ.5

2η Σειρά – Γενικές Οδηγίες

Ομοίως με την πρώτη σειρά. Εφαρμόζουμε τις ίδιες αρχές.

Στην τελική εξέταση ~~δεν θα~~ είναι πολύ πιθανό να την αναφερθούν τηλεκυνοτόμετρα και βελόμετρα. Μέσω αυτών των εργαλείων βρίσκουμε την παραμόρφωση του δοκιμίου που είναι και το μηχανικό. Ένας βιαστικός αναγνώστης μπορεί να "προσπεράσει" την ύπαρξη των τηλεκυνοτόμετρων και βελόμετρων στις ασκήσεις και να λάβει κατ'ευθείαν τα ε.

Από εδώ και πέρα οι ασκήσεις αυτές είναι όμοιες με της πρώτης σειράς. Η μελέτη και επίλυσή τους θα οδηγήσει σε καλύτερη κατανόηση του διαγράμματος σ-ε.



2η Σειρά Ασκήσεων Μηχανικής ΙΙ (2013)

(1) $L_\xi = 10mm \rightarrow L_\beta = 10^{-2} m$ (×2000)

(A) $r_o = 5mm \rightarrow A_o = \pi r_o^2 = 3.14 \times 25 \times 10^{-6} \rightarrow A_o = 78.5 \times 10^{-6} m^2$

$L_o = 50mm \rightarrow L_o = 5 \times 10^{-2} m$

$Volume = A_o \times L_o$

$\hookrightarrow Volume = 392.5 \times 10^{-9} m^3$

$P_y = 15700N \rightarrow$ Η ένδειξη του ηγκ/ρου είναι 20. Από τη στιγμή που έχει συντελεστή ηγεμόνευσης $2000 mm^{-1}$ $\Delta L = \frac{20}{2000} \rightsquigarrow \Delta L = 10^{-2} mm$

$\hookrightarrow \Delta L = 10^{-5} m$

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_\beta} \rightarrow \varepsilon = \frac{10^{-5}}{10^{-2}} \rightsquigarrow \boxed{\varepsilon_y = 10^{-3}}$

$\sigma_y = \frac{P_y}{A_o} \rightsquigarrow \sigma_y = \frac{P_y}{A_o} \rightarrow \sigma_y = \frac{15700}{78.5 \times 10^{-6}} \rightarrow \boxed{\sigma_y = 200 MPa}$

$P_u = 18840 \rightarrow \sigma_u = \frac{P_u}{A_o} \rightarrow \sigma_u = \frac{18840}{78.5 \times 10^{-6}} \rightarrow \boxed{\sigma_u = 240 MPa}$

$L_u = 52mm \longrightarrow \Delta L_u = 52 - 50 = 2mm \longrightarrow \varepsilon_u = \frac{2 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-3}} \rightsquigarrow \boxed{\varepsilon_u = 0.04}$

$\hookrightarrow 4 \times 10^{-2}$

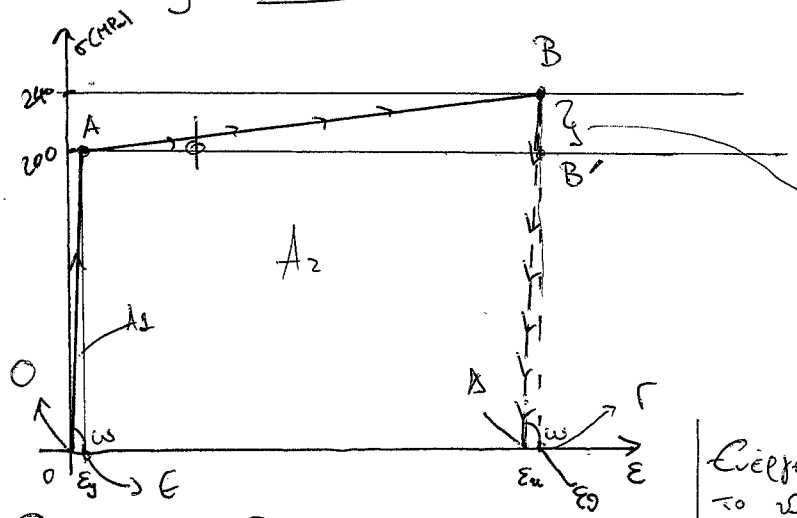
!Προσοχή! Η ε_u ΔΕΝ ισούται με την παραμόρφωση κατά τη θραύση αλλά μετά την αποφόρτιση αφού έχει επέλθει η θραύση. Το σ_u δε βρίσκεται στην τεταμένη που ορίζει η ε_u. Η ε_u βρίσκεται στο σημείο που τέμνει η παράλληλη ευθεία με την ευθεία του αρχικού μέτρου ελαστικότητας που ξεκινάει από το σ_u.

$E = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} \rightarrow \boxed{E = 200 GPa}$ Το υλικό είναι ΓΕΓΚ. $\tan\alpha = \frac{\sigma_\theta}{\varepsilon_\theta - \varepsilon_u}$

$|\varepsilon_\theta - \varepsilon_u| = \frac{240 \times 10^6}{200 \times 10^9} \rightarrow |\varepsilon_\theta - \varepsilon_u| = 0.12 \times 10^{-2}$

$\hookrightarrow \varepsilon_\theta = 4 \times 10^{-2} + 0.12 \times 10^{-2}$

$\boxed{\varepsilon_\theta = 4.12 \times 10^{-2}}$



$\tan\phi = \frac{240 - 200}{\varepsilon_\theta = 4.12 \times 10^{-2}} \times 10^6 \rightarrow \tan\phi = 9.71 \times 10^8 \equiv H$

$H = 0.98 GPa \rightsquigarrow \boxed{H \simeq 1 GPa}$

Ενέργεια που δαπανήθηκε για να σπάσει το δοκίμιο: (Energy3)

$A_{\varepsilon AB\Gamma} \equiv A_2 = \frac{B\Gamma + A\varepsilon}{2} \times O\Gamma = \frac{(240 + 200) \times 10^6}{2} \times 4.12 \times 10^{-2}$

$A_2 = 9064 kPa$

$\hookrightarrow Energy_2 = 9064 \times 10^3 \times 392.5 \times 10^{-9} = 35.58 J$

(τραχίφιο)

Ενέργεια που δαπανήθηκε για να αστοχήσει το υλικό: $A_{o\Delta\varepsilon} \equiv A_1 = \frac{10^{-3} \times 200 \times 10^6}{2} \rightarrow A_1 = 100 kPa$

$Energy_1 = A_1 \times Volume$

$Energy_1 = 392.5 \times 10^{-9} \times 100 \times 10^3 \rightarrow \boxed{Energy_1 = 0.39 J}$

(Ελαστική Ανάκαμψη)

Ενέργεια που δαπανήθηκε ~~[illegible]~~ για τη θραύση:

$Energy_1 + Energy_2 = 35.58 + 0.39 \rightarrow \boxed{Energy_3 \cong 36\,J}$

Η ανακτώμενη ενέργεια της στιγμή της θραύσης ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται κάτω την αποφόρτιση. Δεν ξέρω τον όγκο.

$A_3 \equiv A_{\Delta FB} = (0.12\times10^{-2} \times 240\times10^{6})/2 = 144\,kPa$ (Υπερελαστική Ανάπαλση)

$\hookrightarrow Energy_4 = A_3 \times V_0 = 144\times10^{3} \times 392.5\times10^{-8} \rightarrow \boxed{Energy_4 = 0.57\,J}$

Η ενέργεια που χάθηκε ισούται με τη διαφορά της ανακτώμενης από τη δαπανώμενη. $Energy_{lost} = \underset{36}{Energy_3} - \underset{0.57}{Energy_4} \rightarrow \boxed{Energy_{lost} = 35.43}$

(B) Το εμβαδόν της διατομής είναι: $A_B = (5\times10^{-2})^2 \rightarrow \boxed{A_B = 25\times10^{-4}\,m^2}$

$\boxed{L_B = 1\,m}$

Το υλικό χαρακτηρίστηκε ως ΓΕΓΚ, επομένως το διάγραμμα σ-ε είναι συμμετρικό. $\sigma_{y_c} = \sigma_{y_t} = 200\,MPa$ και $\sigma_{u_c} = \sigma_{ut} = 240\,MPa$.

$P_c = 375\times10^{3}\,N \rightarrow \sigma_c = \frac{375\times10^{3}}{25\times10^{-4}} \rightarrow \boxed{\sigma_c = 150\,MPa} < \sigma_{y_c}$.

Ο συντελεστής ασφαλείας ορίζεται ως: $\alpha = \frac{\text{Οριακό φορτίο}}{\text{Επιτρεπό φορτίο}}$

$\alpha = 1.25 = \frac{200}{\sigma_s} \rightarrow \sigma_s = 160\,MPa > \sigma_c$ Επομένως ικανοποιείται ο συντελεστής ασφαλείας για την άνωθι φόρτιση.

(2) $D_0 = 0.15\,m \rightarrow r_0 = 0.075\,m = 75\times10^{-3}\,m \rightarrow A_0 = \pi\times r_0^2 \rightarrow \boxed{A_0 = 1.77\times10^{-2}\,m^2}$

$L_0 = 0.3\,m$

$L_B = 0.15\,m$ Το μέτρο δεν έχει συντελεστή τεμάχισης. Η ένδειξη του αντιστοιχεί σε επιμήκυνση / συμπίεση. Η κλίμακα εδώ είναι 0.01 mm.

Θα πάρω το τέσσερο όρο από τα ~~[illegible]~~ μέλατρα για κάθε φορτίο.

$\sigma_{y_{conv}} \rightarrow$ Όταν η παραμένουσα παραμόρφωση για αυτή την τάση είναι 0.2%

Θα κάνω το φορτίο → τάση.

$\longrightarrow$ (π.χ. $F_1 = 50\,KN$ $\sigma_1 = \frac{F_1}{A_0} = \frac{50\times10^{3}}{1.77\times10^{-2}}$ $\sigma_1 = 2.83\,MPa$

$\frac{2.2+1.9}{2} \cong 2.05\times10^{-5}\,m \rightarrow \varepsilon_1 = \frac{2.05\times10^{-5}}{0.15} = 0.14\times10^{-3}$

Τάση (MPa)	Παραμόρφωση
0	0
2.83	0.14×10^{-3}
5.65	0.27×10^{-3}
8.48	0.4×10^{-3}
11.3	0.54×10^{-3}
14.12	0.67×10^{-3}
16.95	0.82×10^{-3}
19.77	0.97×10^{-3}
22.6	1.14×10^{-3}
25.42	1.32×10^{-3}
28.25	1.52×10^{-3}
29.45	1.70×10^{-3}

$$\sigma_1=\frac{F_1}{A_0}\ ,\quad \varepsilon_1=\frac{(P_1+P_2)\times10^5\times1/2}{L_\beta}$$

(α) Το διάγραμμα σ-ε είναι στο χαρτί milimetré #2-A

(β) Επιλέγω δύο τυχαία σημεία στο διάγραμμα σ-ε, στο εύρος $\varepsilon\in(0,0.8)\times10^{-3}$.

$A(0.48\times10^{-3},\ 10\times10^5)$

$B(0.76\times10^{-3},\ 16\times10^5)$

$$\tan\omega=\frac{16-10}{0.76-0.48}\times10^8\equiv E\rightsquigarrow \boxed{E=2.14\,GPa}$$

(γ) $\sigma_u=29.45\times10^6\,Pa$

$\varepsilon_u=1.7\times10^{-3}\rightsquigarrow \varepsilon_u=\frac{\Delta L_u}{L_0}\rightsquigarrow \Delta L_u=1.7\times10^{-3}\times0.3\rightsquigarrow \Delta L_u=0.51\times10^{-3}\,m$

$\Delta L_u=0.51\,mm$

$$\boxed{L_u=30.51\,cm}$$

(δ) Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, θα φέρουμε παράλληλη με την ευθεία Κλίσης Ε. Η ευθεία θα ξεκινάει από το σημείο της θραύσης και θα καταλήξει στον άξονα x.

$$\left.\begin{matrix}y_1=\alpha x_1+\beta\\ y_2=\alpha x_2+\beta\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}\alpha\equiv E\\ y_2=0\end{matrix}\right\}\rightarrow \left.\begin{matrix}y_1=Ex_1+\beta\\ \beta=-Ex_2\end{matrix}\right\}\rightsquigarrow y_1=Ex_1-Ex_2\rightsquigarrow \frac{Ex_1-y_1}{E}=x_2\rightarrow$$

$E(x_1\le x_2)$

$$x_2\equiv\varepsilon_{rem}\rightsquigarrow \boxed{\varepsilon_{rem}=\frac{E\times x_1-y_1}{E}}\rightsquigarrow \varepsilon_{rem}=\frac{2.14\times10^9\times1.7\times10^{-3}-29.45\times10^6}{2.14\times10^9}=\boxed{0.12\times10^{-3}}$$

(ε) Θα θεωρήσουμε προσεγγιστικά ότι το σχήμα ΟΘΘ' είναι τρίγωνο. $A_1\equiv A_{O\Theta\Theta'}$ $\quad A_1=(1.7\times10^{-3}\times29.45\times10^6)/2\rightsquigarrow A_1=25\,kPa$

$V_0=A_0\times L_0\rightsquigarrow V_0=1.77\times10^{-2}\times3\times10^{-1}\rightsquigarrow \boxed{V_0=3.54\times10^{-3}\,m^3}$

$Energy_1=A_1\times V_0\rightsquigarrow \boxed{Energy_1=88.58\,J}$

(στ) Η αναπτυσσόμενη ενέργεια ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΟΘΘ' επί τον όγκο.

$(\Theta\Theta')=(1.7-0.12)\times10^{-3}\rightsquigarrow(\Theta\Theta')=1.58\times10^{-3}\rightsquigarrow A_2=(29.45\times10^6\times1.58\times10^{-3})/2$

$A_2=23.27\,kPa$

$Energy_2=A_2\times V_0\rightsquigarrow \boxed{Energy_2=82.38\,J}$

(1) $Energy_3 = Energy_1 - Energy_2 = 82.38 - 88.5 \rightarrow \boxed{Energy_3 = 6.12\,J}$

Απωλεσθείσα ενέργεια.

(2) ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

→ Αν $F = 5\,MN$ και $\alpha = 2$, τότε η δύναμη που προκαλεί θραύση πρέπει να είναι διπλάσια της F.

$\boxed{F_u = 10 \times 10^6\,N.}$

Από τα προηγούμενα ερωτήματα βρήκαμε ότι $\sigma_u = 29.45\,MPa$.

$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow A_{min} = \frac{10 \times 10^6}{29.45 \times 10^6} \rightarrow \boxed{A_{min} \cong 0.34\,m.}$ ← Ελάχιστο εμβαδόν.

$A = \pi \times r^2 \quad d = \dots$

(3) $L_0 = 100\,mm \rightarrow \boxed{L_0 = 10^{-1}\,m}$

$r_0 = 10^{-2}\,m \rightarrow A_0 = \pi \times r_0^2 \rightarrow \boxed{A_0 = 3.14 \times 10^{-4}\,m^2}$

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \qquad \sigma = \frac{F}{A_0} = \frac{F_i}{3.14 \times 10^{-4}}$

$\varepsilon (\times 10^{-3})$	σ (MPa)
0	0
0.2	15.9
0.4	31.8
0.6	47.8
0.8	63.7
1	79.61
1.1	87.26
1.25	94.27
1.6	96.34
3.25	98.73
6	101.6
9.8	104.8
15	109.9
19	112.4

Το διάγραμμα σ-ε είναι σχεδιασμένο στο χαρτί μιλιμετρέ #2-B

Θα εκτιμήσουμε το E υπολογίζοντας την κλίση ~~[illegible]~~ της ευθείας OA στο διάγραμμα.

$B(0.4 \times 10^{-3}, 40 \times 10^6)$

$\Gamma(1.1 \times 10^{-3}, 100 \times 10^6)$

$\tan\omega = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{100 \times 10^6 - 40 \times 10^6}{1.1 \times 10^{-3} - 0.4 \times 10^{-3}} \equiv E$

$E = \frac{60}{0.7} \times 10^9 \rightarrow \boxed{E = 86\,GPa}$

• Η συμβατική τάση διαρροής ορίζεται εκεί που η παραλληλόγραμμα παραμόρφωση είναι 0.2% → 2×10^{-3}. Θα φέρουμε παράλληλη με το E, και βρίσκουμε ότι

$\boxed{\sigma_{y_{conv}} \cong 100\,MPa}$

• Η Ελαστική Ανάλαλου ορίζεται ως η αναλυθείσα ενέργεια του στιγμή της διαρροής.

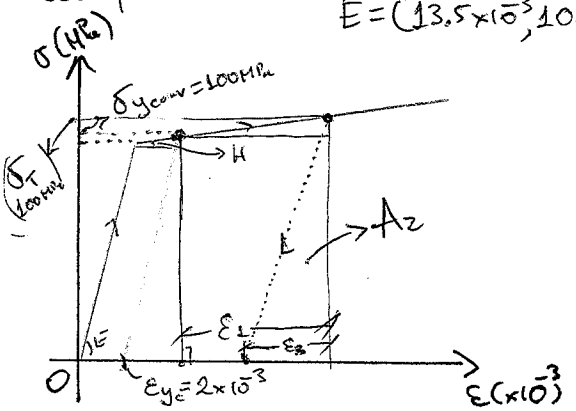
$A_1 = \frac{\beta \times \upsilon}{2} = \frac{(32-2.0)\times 10^{-3} \times 100\times 10^{6}}{2} = 60\,KPa$, $Volume = A_0 \times L_0 = 3.14\times 10^{-5}\,m^3$

$Energy = A_1 \times V_0 = 60\times 10^{3} \times 3.14\times 10^{-5} \rightsquigarrow \boxed{Energy = 1.88\,J}$

• Στερεότητα

$\tan\phi \equiv H$ $\quad A=(0,96\times 10^{6})$ $\quad E=(13.5\times 10^{-3}, 107\times 10^{6})$ $\quad \tan\phi = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{107\times 10^{6} - 96\times 10^{6}}{13.5\times 10^{-3}} \equiv H$

$\boxed{H = 0.8\,GPa}$



δ) $L_0 = 1\,m$ $\quad d_0 = 0.2\,m \rightsquigarrow r_0 = 0.1\,m$

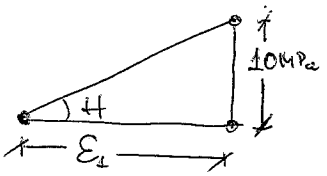
$A_0 = \pi r_0^2 \rightarrow \boxed{A_0 = 3.14\times 10^{-2}\,m^2}$

$F_y = \sigma_{yc} \times A_0 \rightsquigarrow F_y = 100\times 10^{6} \times 3.14\times 10^{-2}$

$\boxed{F_y = 3140\,KN}$

$\rightsquigarrow F_y + 0.1 F_y \rightsquigarrow F_T = 3140 + 314 \rightsquigarrow \boxed{F_T = 3454\,KN}$

$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0} \rightsquigarrow \sigma_T = \frac{3454\times 10^{3}}{3.14\times 10^{-2}} \rightsquigarrow \boxed{\sigma_T = 110\,MPa} \rightsquigarrow$



$H = \frac{10\times 10^{6}}{\varepsilon_1} \rightsquigarrow 0.8\times 10^{9} = \frac{10\times 10^{6}}{\varepsilon_1} \rightsquigarrow \boxed{\varepsilon_1 = 12.5\times 10^{-3}}$

Αν δούμε το σχήμα στο χαρτί μιλιμετρέ, θα δούμε ότι η παραμόρφωση στη $\sigma_{y\,conv}$ είναι $\varepsilon_2 = 3.2\times 10^{-3} \neq \varepsilon_{conv}$ καθώς το $\varepsilon_{conv} = 0.2\%$ αναφέρεται στην παρατήρουσα παραμόρφωση πριν την αποφόρτιση της στιγμή της διαρροής.

$\Rightarrow \varepsilon_{01} = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \rightsquigarrow \varepsilon_{01} = (12.5 + 3.2)\times 10^{-3} \rightsquigarrow \varepsilon_{01} = 15.7\times 10^{-3} \rightsquigarrow \varepsilon_{01} = \frac{\Delta L}{L_0} \rightsquigarrow \Delta L = 15.7\times 10^{-3} \times 1$

$\Delta L = 15.7\,mm$

$\boxed{L_f = 1.0157\,m}$

Μετά την αποφόρτιση, θα υπάρχει παρατήρουσα παραμόρφωση:

$\tan\omega \equiv E = \frac{\sigma_T}{\varepsilon_3} = \frac{110\times 10^{6}}{\varepsilon_3} \Rightarrow \varepsilon_3 = \frac{110\times 10^{6}}{86\times 10^{9}} \rightsquigarrow \varepsilon_3 = 1.28\times 10^{-3}$

$\varepsilon_{rem} = \varepsilon_{ol} - \varepsilon_3 = 14.42 \times 10^{-3}$

$\Delta L_T = \varepsilon_{rem} \times L_0 \rightsquigarrow \Delta L_T = 14.42\ mm \rightsquigarrow \boxed{L_{final} = 1.0142\ m}$

Η ενέργεια που μετατρέπηκε σε θερμότητα είναι η χαμένη ενέργεια. Βρίσκουμε το εμβαδόν του τραπεζίου και αφαιρούμε το A_2 (υπερελαστική ανάλαδη). Το τελικό εμβαδόν, πολλαπλασιαζόμενο επί του όγκο του δοκιμίου θα είναι ίσο με τη θερμότητα που ζητείται.

(4) $L_{0,AB} = 0.8m$ $\quad r_{0,AB} = 0.01m \rightsquigarrow A_{0,AB} = 3.14 \times 10^{-4}\ m^2$ $\quad (A = \pi r^2)$

$L_{0,BΓ} = 0.6m$ $\quad r_{0,BΓ} = 7.5 \times 10^{-3}\ m \rightsquigarrow A_{0,BΓ} = 1.77 \times 10^{-4}\ m^2$ $\quad \left.\begin{matrix} E = 70GPa \\ \sigma_y = 40MPa \end{matrix}\right\}$

(α) $V_m = 0.4 \times 0.4 \times 1.2 = 0.192\ m^3$ $\quad W_m = V_m \times \rho = 0.192 \times 52.08 \rightsquigarrow$

$\boxed{W_m = 10kN}$

Επομένως η κάθε ράβδος φορτίζεται με εφελκυστική τάση $W_m = 10kN$.

Κάθε ράβδος έχει διαφορετική δικτοφή $\Rightarrow \sigma_{AB} \neq \sigma_{BΓ}$

$\sigma_{AB} = \frac{W_m}{A_{0,AB}} = \frac{10^3 \times 10}{3.14 \times 10^{-4}} \rightsquigarrow \boxed{\sigma_{AB} \simeq 324MPa}$ $(\sigma_{AB} < \sigma_y)$, $\quad \sigma_{BΓ} = \frac{W_m}{A_{0,BΓ}} = \frac{10 \times 10^3}{1.77 \times 10^4} \rightsquigarrow \boxed{\sigma_{BΓ} = 56.5MPa}$ $(\sigma_{BΓ} > \sigma_y)$

$\rightsquigarrow$ Η ΑΒ δεν αστοχεί, η ΒΓ αστοχεί.

$\tan\phi \equiv H$ από σχήμα επιλέγω δύο σημεία στην ευθεία κράτυνσης.

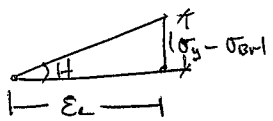
$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{40 \times 10^6}{70 \times 10^9} \rightsquigarrow \varepsilon_y = 0.57 \times 10^{-3}$ $\quad \rightsquigarrow A(0.57 \times 10^{-3}, 40 \times 10^6)$ (Σημείο Διαρροής)

$B(20 \times 10^{-3}, 47 \times 10^6)$ (Σχήμα) $\quad \tan\phi \equiv H = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{47 \times 10^6 - 40 \times 10^6}{20 \times 10^{-3} - 0.57 \times 10^{-3}}$

$\boxed{H = 0.36\ GPa}$

$\Rightarrow$ Ράβδος ΑΒ: n. Hooke $\rightsquigarrow \boxed{\varepsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E} = \frac{32 \times 10^6}{70 \times 10^9} = 0.46 \times 10^{-3}}$

$\Rightarrow$ Ράβδος ΒΓ:



$\sigma_{BΓ} - \sigma_y = 56.5 - 40 = 16.5MPa$

$H = \frac{16.5 \times 10^6}{\varepsilon_1} \rightsquigarrow \boxed{\varepsilon_1 = 45.84 \times 10^{-3}}$

$\varepsilon_{BΓ} = \varepsilon_1 + \varepsilon_y = (45.84 + 0.57) \times 10^{-3}$

$\boxed{\varepsilon_{BΓ} = 46.41 \times 10^{-3}}$

$\Delta L_{AB} = \varepsilon_{AB} \times L_{0,AB} = 0.46 \times 10^{-3} \times 0.8 = 0.37\,mm$

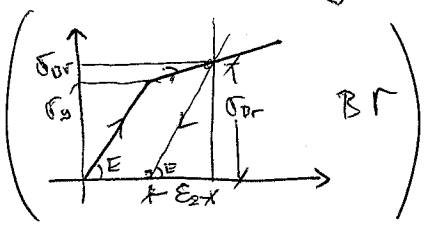
$\Delta L_{B\Gamma} = \varepsilon_{B\Gamma} \times L_{0,B\Gamma} = 46.41 \times 10^{-3} \times 0.6 = 27.85\,mm$

$\Delta L_{0\lambda} = \Delta L_{AB} + \Delta L_{B\Gamma}$

$\boxed{\Delta L_{0\lambda} = 28.22\,mm}$

Επιτήκυνση

(β) Αν η ράβδος αποφορτιστεί, η ράβδος ΑΒ θα επιστρέφει στο αρχικό της μήκος, καθώς $\sigma_{AB} < \sigma_y$. Όμως η ΒΓ δεν θα επιστρέφει, καθώς $\sigma_{B\Gamma} > \sigma_y$.

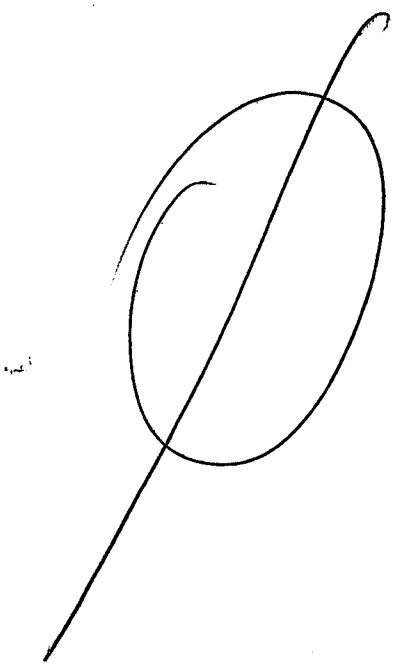


$E = \frac{\sigma_{B\Gamma}}{\varepsilon_2} \rightarrow \varepsilon_2 = \frac{56.5 \times 10^6}{70 \times 10^9} \rightarrow \varepsilon_2 = 0.81 \times 10^{-3}$

Η παραμένουσα παραμόρφωση: $\varepsilon_{rem} = \varepsilon_{B\Gamma} - \varepsilon_2 = \underline{45.6 \times 10^{-3}}$

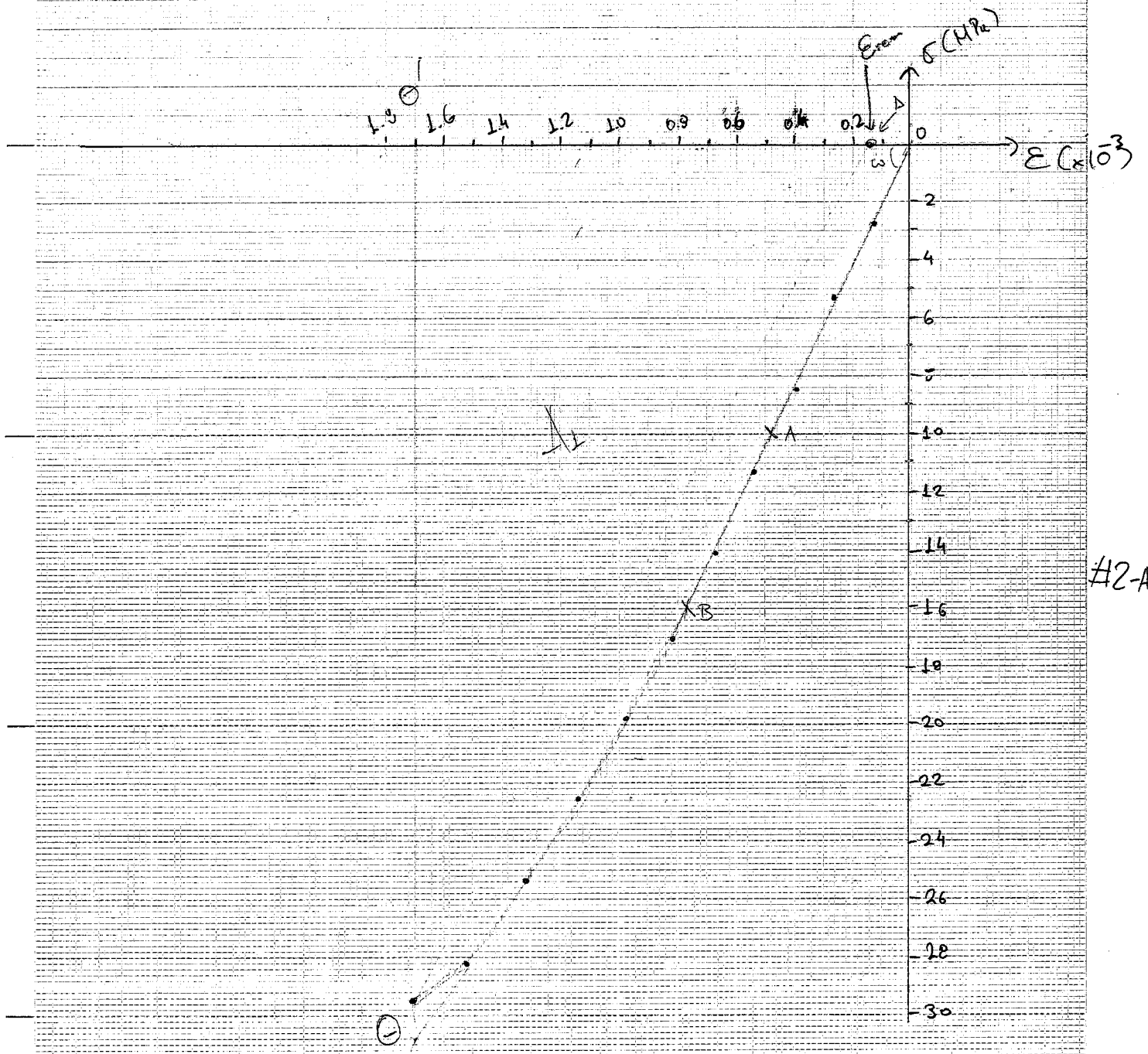
$\Delta L_f = \varepsilon_{rem} \times L_{0,B\Gamma} = 45.6 \times 10^{-3} \times 0.6 \rightarrow \boxed{\Delta L_f = 27.36\,mm}$

Παραμένουσα επιτήκυνση



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

#2-A

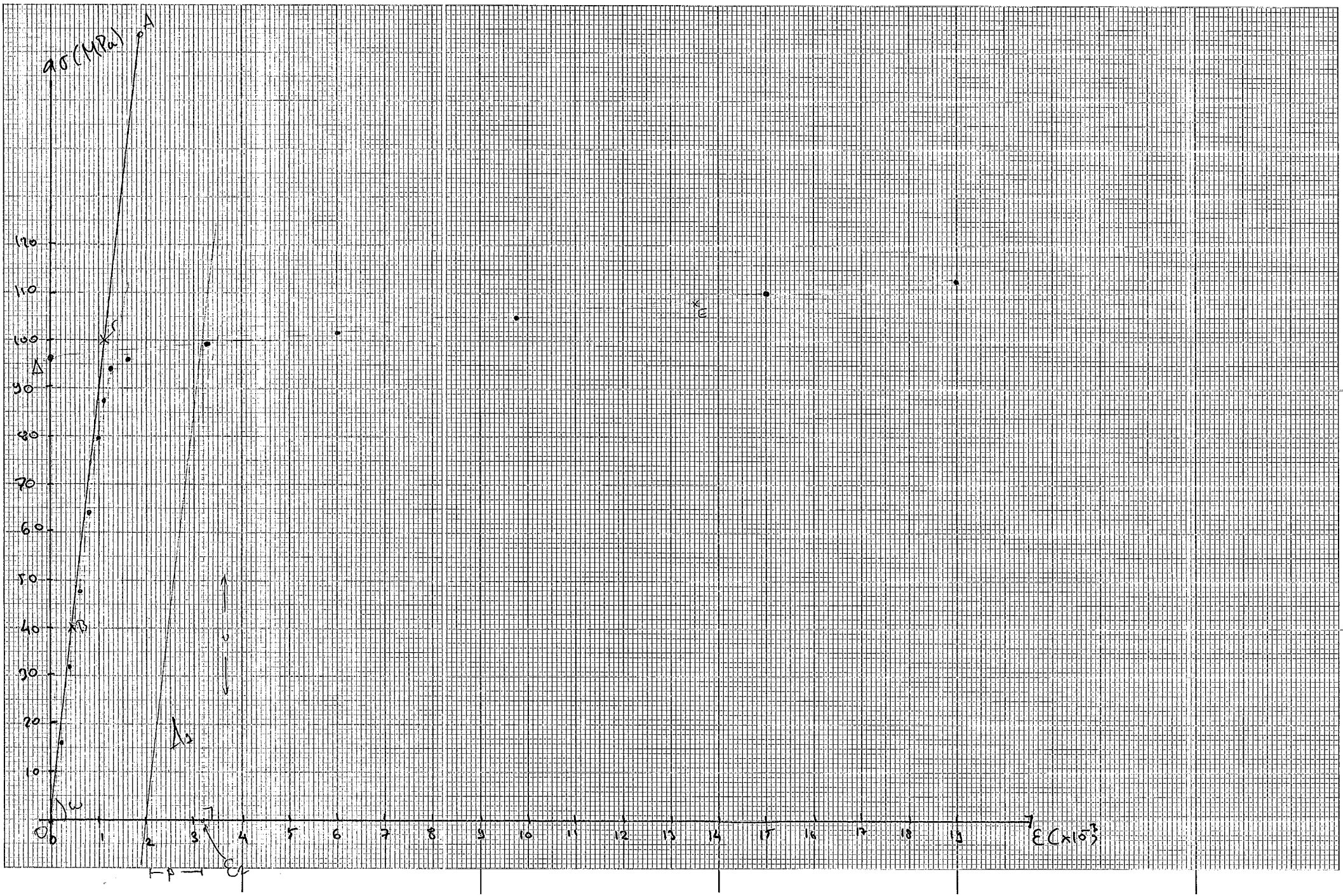


#2-A

Assembly 2

Ασκηση 3

#2-B


σ (MPa)
A
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
ε (×10⁻³)
B
C
D
E
F
Δ
Δ₂
p

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ)

3η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΣΤΑΤΙΚΑ ΑΞΟΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Άσκηση 1

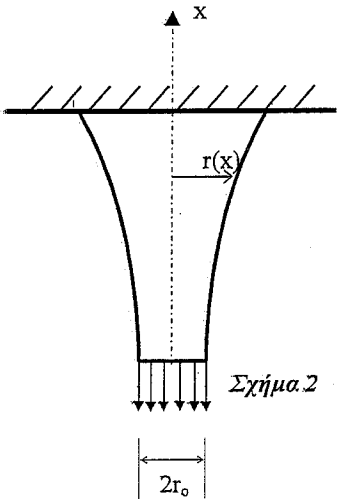
Κυλινδρική ράβδος αρχικού μήκους L=1m και αρχικής διαμέτρου D=5mm αναρτάται κατακόρυφα και αφήνεται υπό την επίδραση του ιδίου αυτής βάρους και μόνον. Το ειδικό βάρος του υλικού της ράβδου είναι $8\text{x}10^4$ N/m^3 και ο λόγος Poisson ν=0.3. Θεωρώντας ότι η ράβδος βρίσκεται στην ελαστική της κατάσταση και ότι η σχέση τάσεων - παραμορφώσεων του υλικού της είναι:

$$\varepsilon = 1.9\text{x}10^{-10}\,\sigma^{0.85}$$

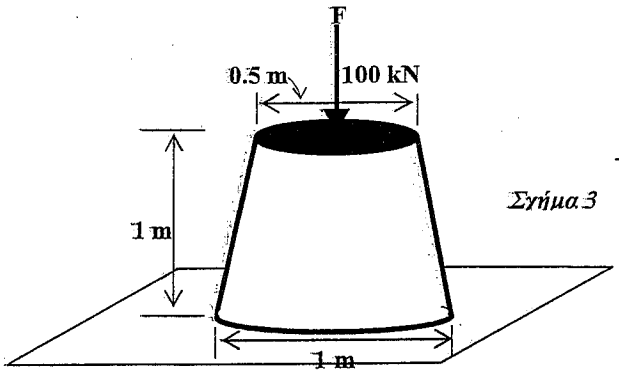
α. Υπολογίστε το τελικό μήκος της ράβδου.
β. Ποια είναι η τελική μορφή της αρχικώς κυλινδρικής ράβδου;

Άσκηση 2

Η ράβδος του Σχ.2 έχει κυκλική διατομή μεταβλητής ακτίνας. Είναι κατασκευασμένη από υλικό ειδικού βάρους γ και δέχεται κατακόρυφη εφελκυστική δύναμη, ομοιόμορφα κατανεμημένη στην κατώτερη διατομή της, που έχει ακτίνα r_o. Να ευρεθεί ο νόμος μεταβολής της ακτίνας r=r(x) έτσι ώστε η αναπτυσσόμενη ορθή τάση σ_{xx} να είναι σταθερή σε όλο το ύψος της ράβδου, ίση με την τάση διαρροής σ_y του υλικού της. Η τελική έκφραση να δοθεί συναρτήσει των γ, σ_y, r_o.



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Άσκηση 3

Κόλουρος κώνος από γραμμικώς ελαστικό υλικό με E=2 GPa, ν=0.3 και ειδικό βάρος 80 kN/m^3 φορτίζεται με θλιπτική δύναμη F=100 kN (Σχ.3) ομοιόμορφα κατανεμημένη στην πάνω βάση.

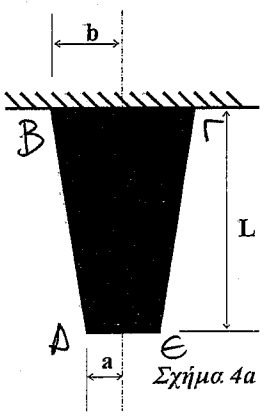
α. Να προσδιορισθούν οι τελικές διαστασεις του σώματος.
β. Ποια είναι η τελική μορφή του σώματος;

Δίνεται: $V_{κώνου}$=(Εμβαδόν βάσεως)(Ύψος)/3

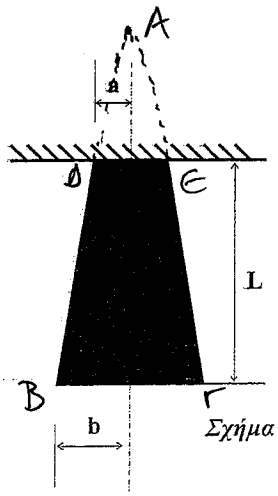
ΖΗΤΗΜΑ 4ο (30 μονάδες)

α. Προσδιορίστε την επιμήκυνση του κόλουρου κώνου του Σχ.4α λόγω του ιδίου βάρους και μόνον.
β. Πόση είναι η επιμήκυνση αν ο κώνος αναρτηθεί ανεστραμμένος όπως στο Σχ.4β;

Ερμηνεύστε τη διαφορά των αποτελεσμάτων.
Τα αποτελέσματα να δοθούν συναρτήσει των a, b, L, του μέτρου ελαστικότητας E και του ειδικού βάρους γ.



Σχήμα 4α



Σχήμα 4β

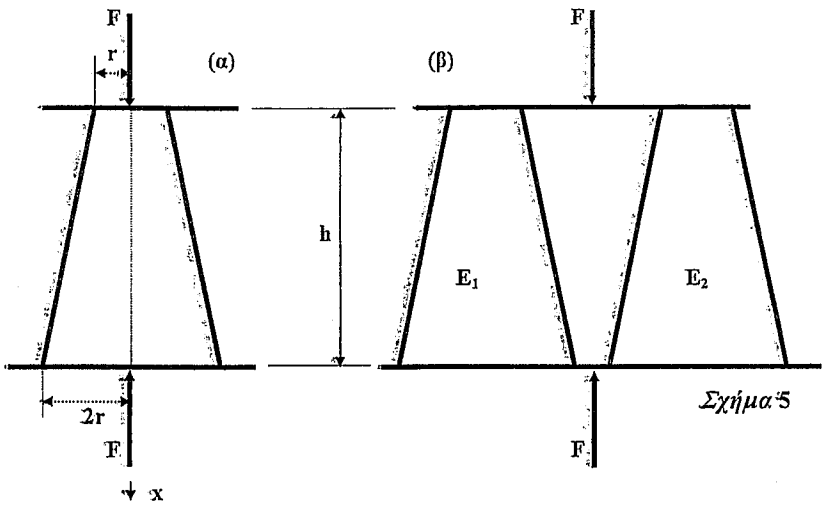
Άσκηση 5

Αβαρές στερεό σχήματος κόλουρου κώνου με ακτίνες βάσεων r και 2r και ύψος h (Σχ.5α), από υλικό μέτρου ελαστικότητας E_1, τοποθετείται μεταξύ δύο οριζοντίων απαραμορφώτων πλακών και θλίβεται με κατακόρυφη δύναμη F.

α. Να ευρεθούν η ορθή τάση σ(x) που αναπτύσσεται σε τυχαία διατομή του στερεού σε απόσταση x από την πάνω βάση και η συνολική βράχυνση του σώματος.

β. Μεταξύ των πλακών παρεμβάλλεται δεύτερο στερεό του ιδίου σχήματος από υλικό μέτρου ελαστικότητας E_2 (Σχ. 5β). Να ευρεθούν οι δυνάμεις F_1 και F_2 που ασκούνται σε κάθε σώμα.

(Δίνεται ότι: r=0.1 m, h=1 m, F=1000 N, E_1=2 Pa, E_2=4 GPa).



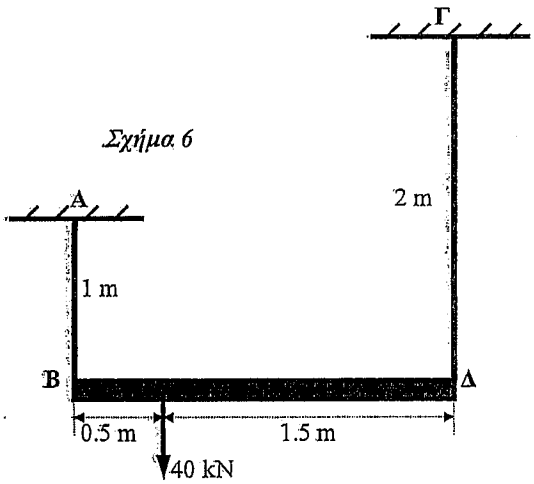
Σχήμα 5

Άσκηση 6

Αβαρής, απολύτως στερεά δοκός ΒΔ αναρτάται οριζόντια με δύο κατακόρυφες ράβδους ΑΒ και ΓΔ, από γραμμικώς ελαστικό - γραμμικώς κρατυνόμενο υλικό (Σχ.6). Η ράβδος ΑΒ έχει μέτρο ελαστικότητας $E_1=10^{11}$ Pa, τάση διαρροής $\sigma_{\Delta 1}$= 150 MPa, κλίση του διαγράμματος σ-ε στην περιοχή κρατύνσεως (πλαστικό μέτρο) $H_1=10^{10}$ Pa και εμβαδόν διατομής A_1=1.5 cm^2. Αντίστοιχα η ΓΔ έχει E_2= $2x10^{11}$ Pa, $\sigma_{\Delta 2}$=200 MPa, $H_2=10^{10}$ Pa και A_2=1 cm^2.

α. Στην δοκό εφαρμόζεται κατακόρυφο φορτίο 40 kN, όπως στο Σχ.3. Να ευρεθεί η τελική θέση της δοκού ΒΔ.

β. Το φορτίο αφαιρείται. Ποια η τελική θέση της δοκού ΒΔ;



Σχήμα 6

Άσκηση 7

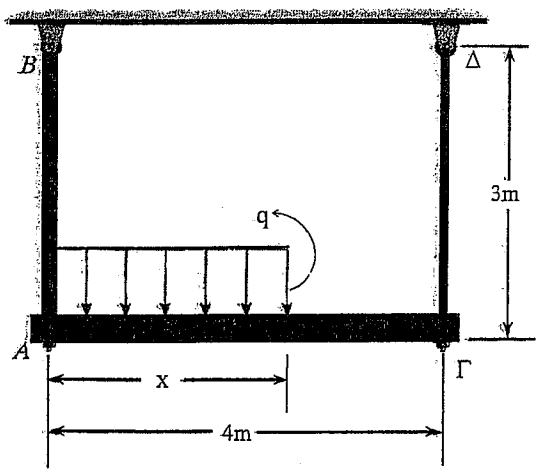
Απολύτως στερεά δοκός ΑΓ αναρτάται οριζόντια με τη βοήθεια των κυλινδρικών ράβδων ΑΒ και ΓΔ (Σχ.7). Το εμβαδόν διατομής της ΑΒ είναι 1 cm^2 και ισχύει ότι $A_{AB}=1.5A_{\Gamma\Delta}$. Τα υλικά των ράβδων είναι γραμμικώς ελαστικά - γραμμικώς κρατυνόμενα και για την ΑΒ ισχύει: E_{AB}=200 GPa, $\sigma_{y,AB}$=150 MPa και H_{AB}=40 GPa, ενώ για την ΓΔ είναι $E_{\Gamma\Delta}$=100 GPa, $\sigma_{y,\Gamma\Delta}$=100 MPa και $H_{\Gamma\Delta}$=20 GPa.

α. Προσδιορίστε το μήκος x του ομοιόμορφου φορτίου q έτσι ώστε η δοκός να παραμένει οριζόντια όταν φορτίζεται.

β. Προσδιορίστε την ένταση q του ομοιόμορφου φορτίου που θα προκαλέσει πρώτη αστοχία κάποιας εκ των ράβδων. Ποια είναι η θέση της δοκού ΑΓ τη στιγμή εκείνη;

γ. Προσδιορίστε την ένταση q του ομοιόμορφου φορτίου που θα προκαλέσει αστοχία και της άλλης ράβδου. Ποια είναι η θέση της δοκού ΑΓ τη στιγμή εκείνη;

δ. Το φορτίο αφαιρείται. Να ευρεθούν οι τάσεις στις ράβδους και η θέση της δοκού ΑΓ μετά την αποφόρτιση.

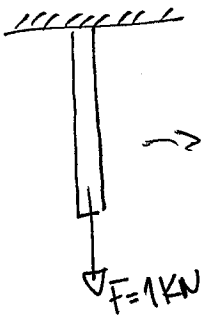


Σχήμα 7

3η Σειρά - Τενικές Οδηγίες

Για καταλάβουμε αυτές τις ασκήσεις θα δούμε το εξής ερώτημα:

→ Έστω αμαρής ράβδος που την κρεμάμε από το ταβάνι και την φορτίζουμε στο άκρο της με $F=1KN$. Πόσο θα επιμηκυνθεί ($E=4GPa$, $L_0=1m$, $A=10^2 mm^2$)

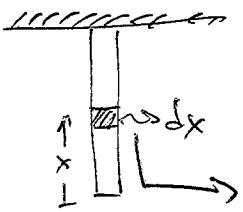


$$\sigma=\frac{F}{A}=\frac{10^3}{10^2\times10^{-6}}=10^7=10MPa$$

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}=\frac{10\times10^6}{4\times10^9}=2.5\times10^{-3}\rightarrow\varepsilon=\frac{\Delta L}{L_0}\Rightarrow\underline{\Delta L=2.5\times10^{-3}mm}$$

→ Έστω ράβδος βάρους $W=1KN$. ($E=4GPa$, $L_0=1m$, $A=10^2 mm^2$) την κρεμάμε από το ταβάνι και δεν την φορτίζουμε με κάποιο άλλο τρόπο. Θα επιμηκυνθεί (σε σχέση με πριν) → το ίδιο? → λιγότερο? → περισσότερο?

→ Η τάση που ασκείται στη ράβδο είναι συνάρτηση της απόστασης του κάθε στοιχείου που μελετάμε από το ελεύθερο άκρο της.



Θα θεωρήσουμε ένα τυχαίο στοιχείο dx με απόσταση x από το άκρο της ράβδου.

Συνάρτηση του x!

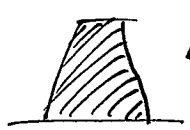
$$F(x)=\frac{Wx}{L}\rightarrow\sigma_{(x)}=\frac{F(x)}{A_0}=\frac{Wx}{LA_0}\rightarrow$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{W}{LA_0E}x \rightarrow dL = \varepsilon(x)dx = \frac{W}{LA_0E}x\,dx \rightarrow \Delta L = \int_0^L x\,dx \cdot \frac{W}{LA_0E}$$

$$\Delta L = \frac{WL^2}{2LA_0E} = \frac{10^3 \times 1^2}{2 \times 1 \times 10^{-2} \times 4 \times 10^9} \rightarrow \underline{\Delta L = 0.125 \times 10^{-6}\ m}$$

→ Με τον ίδιο τρόπο εφαρμόζουμε και στις ασκήσεις της σειράς. Το ίδιον βάρος της κατασκευής ασκεί τάσεις που είναι συνάρτηση του x, όπου x η απόσταση από το ελεύθερο άκρο. Πολλές φορές, η διατομή του σώματος που μελετάμε είναι και αυτή μεταβλητή και συνάρτηση του x. Τότε $\sigma(x) = \frac{F(x)}{A(x)}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται πιο πολύπλοκο. Πολλές φορές το ζητούμενο είναι να συσχετίσουμε το x με το A. Αυτό το πρόβλημα συναντάμε και στους κόλουρους κώνους. Με αφαίρεση τριγώνων λύνεται το πρόβλημα των κόλουρων κώνων.

⇒! Προσοχή! $V_{κώνου} = (εμβαδόν\ βάσης)(ύψος)/3$ ⇒ Ο τύπος αυτός ισχύει για "πλήρη" κώνο και όχι για κόλουρο.



→ Οι ασκήσεις 6+7 είναι στατικά προβλήματα. Ουσιαστικά αποτελούν μία εφαρμογή μιάς του διαγράμματος σ-ε μαζί με ισορροπία δοκού.

Μηχανική ΙΙ

3η Σειρά Ασκήσεων (2013)

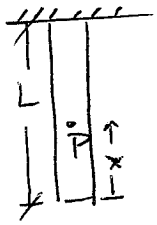
(1) $L = 1\,m$

$D_0 = 5\times10^{-3}\,m \rightsquigarrow r_0 = 2.5\times10^{-3}\,m \xrightarrow{A=\pi r^2} A_0 = 19.63\times10^{-6}\,m^2$

$\gamma = 8\times10^{4}\,N/m^3$

$\nu = 0.3$

$$\varepsilon = 1.9\times10^{-10}\,\sigma^{0.85} \rightarrow \varepsilon = 1.9\times10^{-10}\,\sigma^{n}$$

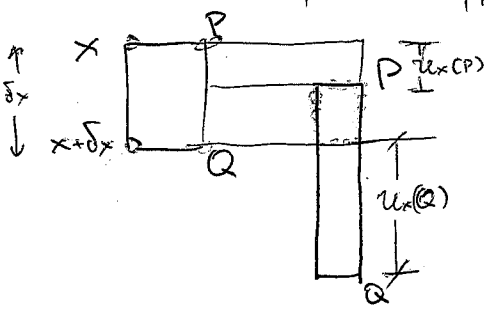


Έστω σημείο P που απέχει απόσταση x από το κάτω άκρο της ράβδου.

$$\sigma_{xx,P} = \gamma x \rightsquigarrow \sigma_P(x) = \gamma x.$$

$$\varepsilon_x(x) = 1.9\times10^{-10}\times(8\times10^{4})^{n}\,x^{n}. \quad (1)$$

Έστω απειροστό κομμάτι δx της ράβδου, PQ, και έστω κάθετη μετατόπιση ενός οποιουδήποτε σημείου, u_x.



Η παραμόρφωση του κομμάτιού PQ δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_x = \frac{u_x(Q) - u_x(P)}{\delta x} \begin{matrix} \leftarrow \Delta L \\ \leftarrow L_0 \end{matrix} = \frac{u_x(x+\delta x) - u_x(x)}{\delta x}$$

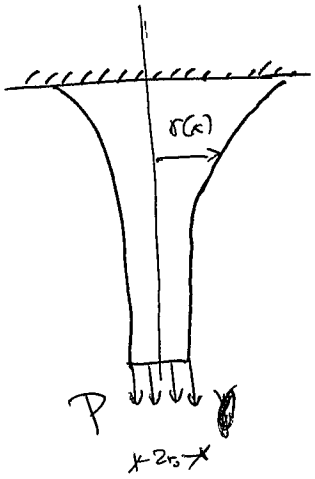
$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{u_x(x+\delta x) - u_x(x)}{\delta x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \equiv \varepsilon_x$$

Άρα $\dfrac{\partial u_x}{\partial x} = 1.9\times10^{-10}\times(8\times10^{4})^{n}\,x^{n} \xrightarrow{\int} u_x \equiv \Delta L = \displaystyle\int_0^L 1.9\times10^{-10}\times(8\times10^{4})^{n}\,x^{n}\,dx$

$$\Delta L = \int_0^L \Delta L = 1.9\times10^{-10}\times(8\times10^{4})^{n}\int_0^L x^{n}\,dx. \rightsquigarrow \Delta L = 1.9\times10^{-10}\times 8^{0.85}\times10^{3.4}\,\frac{1^{0.85+1}}{0.85+1}$$

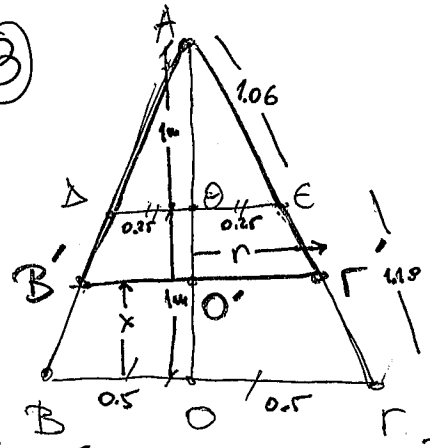
$$\Delta L \simeq 1.8\times5.86 \quad \boxed{\Delta L = 1.51\times10^{-6}\,m}$$

Αφού ισχύει η σχέση $\sigma_P(x) = \gamma x$, συμπεραίνουμε ότι όσο αυξάνει το x, τόσο αυξάνει και η τάση. Επομένως αυξάνεται η κατακόρυφη παραμόρφωση όσο αυξάνει και το x. Λόγω του νόμου του Poisson, συμπεραίνουμε ότι όσο επιμηκύνεται το δοκίμιο, τόσο μειώνεται η διάμετρός του. Η μείωση της διαμέτρου "ψηλά" στη ράβδο θα είναι μεγαλύτερη. →  Κόλουρος κώνος.

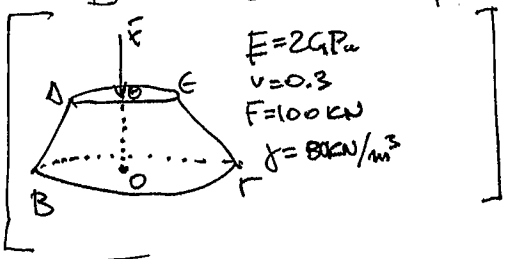
② 

γ, δ_y, σ

?

③ 

Το πρώτο βήμα είναι να προεκτείνουμε τις ευθείες ΔΒ και ΕΓ για να δούμε τον πλήρη κώνο που σχηματίζεται αριστερά. Ύστερα, λόγω ομοιότητας τριγώνων, θα δούμε τις σχέσεις που μας χρειάζονται, οι οποίες συσχετίζουν το r με το x.



$\overset{\triangle}{A\Delta E} \approx \overset{\triangle}{AB\Gamma} \rightarrow \frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Theta}{AO} \rightarrow \frac{0.5}{1} = \frac{A\Theta}{A\Theta+1} \rightarrow \boxed{A\Theta = 1m}$!

Κ.Ο.Κ για να βρούμε τις πλήρεις διαστάσεις του τριγώνου.

⇝ Το βάρος θα είναι συνάρτηση της θέσης. Η τάση λόγω βάρους θα είναι συνάρτηση ~~του~~ της δύναμης του βάρους, αλλά και του εμβαδού της διατομής, που είναι και αυτό συνάρτηση του x.

$\rightarrow \sigma^{\gamma}_{xx}(x) = \frac{W(x)}{A(x)}$

⇝ Η τάση λόγω της δύναμης F είναι συνάρτηση της διατομής στην οποία αναφερόμαστε και μόνον.

$\Rightarrow \sigma^{F}_{xx}(x) = \frac{F}{A(x)}$

$\overset{\triangle}{A\Theta\Gamma} \approx \overset{\triangle}{A\Theta'\Gamma'} \rightarrow \frac{A\Theta}{A\Theta'} = \frac{O\Gamma}{O'\Gamma'}$ $\left.\begin{array}{l} A\Theta' \equiv 2-x \\ O'\Gamma' \equiv r \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{2-x} = \frac{0.5}{r} \rightarrow \boxed{r(x) = \frac{2-x}{4}}$

πολικό ύψος

$$\Rightarrow A(x) = n r^2(x) \rightarrow \boxed{A(x) = \frac{n(x-2)^2}{16}} \quad \forall x \in (0,1)$$

$$! \quad V(x) \neq \frac{A(x)x}{3} \rightarrow V(x) = V_{ABr} - V_{AB'r'}, \quad V_{AB'r'} = \frac{A(x)(2-x)}{3} \quad !$$

$$V(x) = \left(n\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2\right)\frac{1}{3} - \frac{A(x)(2-x)}{3} = \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{16}(2-x)^3\right)\frac{1}{3} = \frac{n}{3}\left(\frac{16 - 2(2-x)^3}{32}\right)$$

$$V(x) = \frac{n}{3}\left(\frac{16 - 2(-x^3 + 6x^2 - 12x + 8)}{32}\right) = \frac{n}{3}\left(\frac{\cancel{16} + 2x^3 - 12x^2 + 24x - \cancel{16}}{32}\right)$$

$$V(x) = \frac{xn}{3}\left(\frac{x^2 - 6x + 12}{16}\right) \rightsquigarrow \boxed{W(x) = \frac{\gamma n}{48}(x^3 - 6x^2 + 12x)} \quad \forall x (0,1)$$

$$\sigma_{xx}(x) = \sigma_{xx}^F(x) + \sigma_{xx}^\gamma(x) = \frac{F}{A(x)} + \frac{W(x)}{A(x)} \xrightarrow{\sigma = \varepsilon E} \varepsilon_{xx}(x) = \left(\frac{F}{A(x)} + \frac{W(x)}{A(x)}\right)\frac{1}{E}$$

$$E\Delta L_x = F\int_0^1 \frac{1}{A(x)}dx + \int_0^1 \frac{W(x)}{A(x)}dx = F\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\frac{n(x-2)^2}{16}}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{\frac{\gamma n}{48}(x^3 - 6x^2 + 12x)}{\frac{n(x-2)^2}{16}}dx}_{I_2}$$

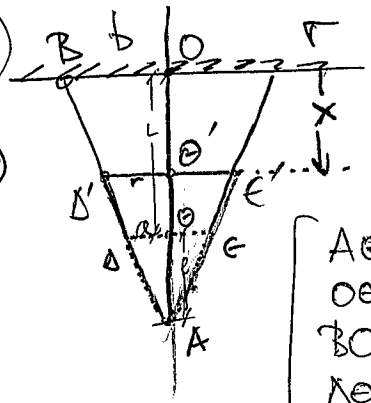
$$I_1 = \frac{16}{n}\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2}dx = \frac{16}{n}\cdot\frac{1}{2} = \frac{8}{n}$$

$$I_2 = \frac{16\gamma}{48}\int \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{x^2 - 4x + 4}dx = \frac{16\gamma}{48}\cdot\frac{5}{2} = \frac{80\gamma}{96} = \frac{10\gamma}{12}$$

$$E\Delta L_x = \frac{100\times10^3\times8}{3.14} + \frac{10\times80\times10^3}{12} \rightsquigarrow \boxed{\Delta L_x \cong 0.321 \text{ mm}}$$ Βράχυνση.

4

a



$\hat{ABr} \approx \hat{A\Delta E} \rightsquigarrow \frac{Br}{\Delta E} = \frac{AO}{A\Theta} \rightarrow \frac{2b}{2a} = \frac{L+l}{l} \rightarrow \boxed{l = \frac{aL}{b-a}}$ (1)

$\left[\begin{array}{l} A\Theta \equiv l \\ O\Theta \equiv L \\ BO \equiv b \\ \Delta\Theta \equiv a \end{array}\right\} AO = L+l \right]$ $\cdot\ \hat{AOB} \approx \hat{A\Theta'\Delta'} \rightsquigarrow \frac{AO}{A\Theta'} = \frac{BO}{\Delta'\Theta'}$

$\Rightarrow \frac{L+l}{L+l-x} = \frac{b}{r} \rightsquigarrow \boxed{r(x) = \frac{b(L+l-x)}{L+l}}$ (2)

$A(x) = \pi r^2(x) \rightarrow \boxed{A(x) = \frac{b^2(L+l-x)^2}{(L+l)^2}\pi}$ (3) $\forall x \in (0,L)$

$V(x) = V_{ABr} - V_{A\Delta'E'} = \left(\pi b^2(L+l) - A(x)(L+l-x)\right)\frac{1}{3}$

$V(x) = \frac{\pi b^2}{3}\left(\cancel{b^2}(L+l) - \frac{(L+l-x)^3}{(L+l)^2}\right) \rightsquigarrow V(x) = \frac{\pi b^2}{3}\left(\frac{(L+l)^3 - (L+l-x)^3}{(L+l)^2}\right)$

$\boxed{W(x) = \frac{\gamma \pi b^2}{3}\left[\frac{(L+l)^3 - (L+l-x)^3}{(L+l)^2}\right]}$ (4) $\forall x \in (0,L)$

$\sigma^W_{xx}(x) = \frac{W(x)}{A(x)} \xrightarrow{\sigma = \varepsilon E} \varepsilon_{xx}(x) = \frac{W(x)}{EA(x)}$, $\frac{\partial u_x}{\partial x} \equiv \varepsilon_{xx} \rightarrow \frac{du_x}{dx} = \frac{W(x)}{EA(x)} \Rightarrow$

$\Delta L_x = \int_0^L \varepsilon_{xx}(x)dx = \frac{1}{E}\int_0^L \frac{\frac{\gamma\pi b^2}{3}}{\frac{\pi b^2}{1}} \frac{\frac{(L+l)^3-(L+l-x)^3}{\cancel{(L+l)^2}}}{\frac{(L+l-x)^2}{\cancel{(L+l)^2}}} dx = \frac{\gamma}{3E}\int_0^L \frac{(L+l)^3-(L+l-x)^3}{(L+l-x)^2}dx$

$\cancel{\Delta L^a_x = \frac{\gamma}{3E}\left[(L+l)^3\int_0^L \frac{1}{(L+l-x)^2}dx - \int_0^L (L+l-x)\,dx\right]}$

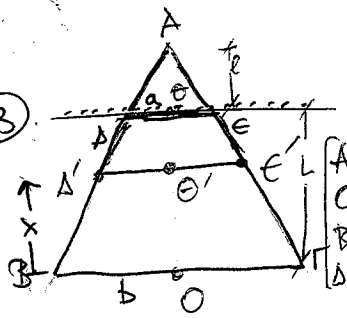
$\hookrightarrow \boxed{\Delta L^a_x = \frac{\gamma}{3E}\int_0^L \frac{(L+l)^3 - (L+l-x)^3}{(L+l-x)^2}dx \quad l = \frac{aL}{b-a}}$

$\cancel{(L+l) \equiv A,\ (L+l-x) \equiv B}$

$\cancel{a^2 l \equiv r}$

$\cancel{\hookrightarrow \Delta L^a_x = \frac{\gamma}{3E}\int \frac{A^3 - B^3}{B^2}}$

(β)



$\left.\begin{array}{l} A\Theta \equiv \ell \\ O\Theta \equiv L \\ BO \equiv b \\ \Delta\Theta \equiv a \end{array}\right\} AO = L+\ell.$

$\circ\ \overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{A\Delta E} \rightsquigarrow \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{AO}{A\Theta} \rightarrow \frac{2b}{2a} = \frac{L+\ell}{\ell} \rightarrow \boxed{\ell = \frac{aL}{b-a}}$ (1)

$\circ\ \overset{\Delta}{AOB} \approx \overset{\Delta}{A\Theta'\Delta'} \rightsquigarrow \frac{AO}{A\Theta'} = \frac{BO}{\Delta'\Theta'} \Rightarrow \frac{L+\ell}{L+\ell-x} = \frac{b}{r} \rightarrow \boxed{r(x) = \frac{b(L+\ell-x)}{L+\ell}}$ (2)

$A(x) = \pi r^2(x) \rightarrow \boxed{A(x) = \frac{b^2(L+\ell-x)^2}{(L+\ell)^2}\pi}$ (3) $\forall x \in (0, L)$

$V(x) = V_{AB\Gamma} - V_{A\Delta E'} = \dots \Rightarrow \boxed{W(x) = \frac{\gamma \pi b^2}{3}\left[\frac{(L+\ell)^3 - (L+\ell-x)^3}{(L+\ell)^2}\right]}$ (4) $\forall x \in (0, L)$ Μέχρι εδώ ίδια με πριν.

$\sigma_{xx} = -\frac{W(x)}{A(x)}$! $\xrightarrow{\sigma = \varepsilon E} \dots \boxed{\Delta L_x^{\beta} = \frac{\gamma}{3E}\int_0^L \frac{(L+\ell-x)^3 - (L+\ell)^3}{(L+\ell-x)^2}\,dx}$

$\Rightarrow \Delta L_x^{\alpha} = \dots = \underbrace{\int_0^L \frac{(L+\ell)^3}{(L+\ell-x)^2}dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^L (L+\ell-x)\,dx}_{I_2} = \left(\frac{L(\ell+L)^2}{\ell} - \frac{1}{2}L(2\ell+L)\right)\frac{\gamma}{3E}$

$\left.\begin{array}{l} I_1 = \frac{L(\ell+L)^2}{\ell} \\ I_2 = \frac{1}{2}L(2\ell+L) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta L_x^{\beta} = \frac{\gamma}{3E}\left(\frac{1}{2}L(2\ell+L) - \frac{L(\ell+L)^2}{\ell}\right)$

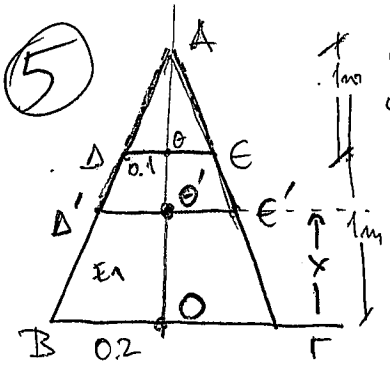
$\left\{\begin{array}{l} \Delta L_x^{\alpha} \\ \Delta L_x^{\beta} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Βάζω}} \left\{\begin{array}{l} \Delta L_x^{\alpha} = \frac{L}{\ell}(\ell^2 + 2L\ell + L^2) - L\ell - \frac{L^2}{2} \\ \Delta L_x^{\beta} = L\ell + \frac{L^2}{2} - \frac{L}{\ell}(\ell^2 + 2L\ell + L^2) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} = \cancel{L\ell} + 2L^2 + \frac{L^3}{\ell} - \cancel{L\ell} - \frac{L^2}{2} \\ = \cancel{L\ell} + \frac{L^2}{2} - \cancel{L\ell} - 2L^2 - \frac{L^3}{\ell} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta L_x^{\alpha} = \frac{3L^2}{2} - \frac{L^3}{\ell} \\ \Delta L_x^{\beta} = -\left(\frac{3L^2}{2} + \frac{L^3}{\ell}\right) \end{array}\right. \xrightarrow[(1)]{\frac{L^3}{\ell} = \frac{L^2(b-a)}{a}} \left\{\begin{array}{l} \Delta L_x^{\alpha} = \frac{3L^2}{2} - \frac{L^2(b-a)}{a} \\ \Delta L_x^{\beta} = -\left(\frac{3L^2}{2} + \frac{L^2(b-a)}{a}\right) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta L_x^{\alpha} = \frac{3L^2a - 2L^2b + 2L^2a}{2a} \\ \Delta L_x^{\beta} = -\frac{(3L^2a + 2L^2b - 2L^2a)}{2a} \end{array}\right.$

$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta L_x^{\alpha} = \frac{5L^2a - 2L^2b}{2a} \\ \Delta L_x^{\beta} = \frac{L^2a + 2L^2b}{2a} \end{array}\right. \xrightarrow{\times \gamma/3E} \boxed{\begin{array}{l} \Delta L_x^{\alpha} = \frac{\gamma L^2}{6aE}(5a - 2b) \\ \Delta L_x^{\beta} = \frac{\gamma L^2}{6aE}(a + 2b) \end{array}}$ $\boxed{\Delta L_x^{\beta} > \Delta L_x^{\alpha}}$ ■

Αν αντικαταστήσουμε στο ΔL_x^{β} τις τιμές της άσκησης 3, θα πάρουμε ίδιο ΔL_x αν αγνοήσουμε την F που δρούσε στην άνω επιφάνεια.

(5)



(α)

• $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \approx \overset{\triangle}{A\Delta E} \rightarrow \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Theta}{A\Theta} \rightarrow \frac{0.4}{0.2} = \frac{1+A\Theta}{A\Theta} \rightarrow 2A\Theta = 1 + A\Theta$

$\boxed{A\Theta = 1m}$

• $\overset{\triangle}{A\Theta'E'} \approx \overset{\triangle}{AB\Gamma} \rightarrow \frac{\overset{\rightarrow 2-x}{A\Theta'}}{A\Theta} = \frac{\overset{\rightarrow r}{\Theta'E'}}{\Theta\Gamma} \Rightarrow \frac{2-x}{2} = \frac{r}{0.2} \Rightarrow 2-x = 10r$

$$\boxed{r(x) = \frac{2-x}{10}} \quad (1) \qquad \forall x \in (0,1)$$

• $A(x) = \pi r^2(x) \rightarrow \boxed{A(x) = \pi \frac{(2-x)^2}{100}} \quad (2) \quad \forall x \in (0,1)$

$V(x) \rightarrow \sigma_{xx} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{8-8+12x-6x^2+x^3}{100}\right) \rightarrow V(x) = \frac{\pi}{100}(x^3-6x^2+12x)$

$\rightarrow \sigma_{xx} = \frac{F}{A(x)} \rightarrow \sigma_{xx} = \frac{\frac{1000}{1}}{\frac{\pi(2-x)^2}{100}} \rightarrow \boxed{\sigma_{xx} = \frac{10^5}{\pi(2-x)^2}}$ Κάτω βάση. → (θέτω: όπου $x \rightarrow (L-x)$ για την τάση ως προς την άνω βάση)

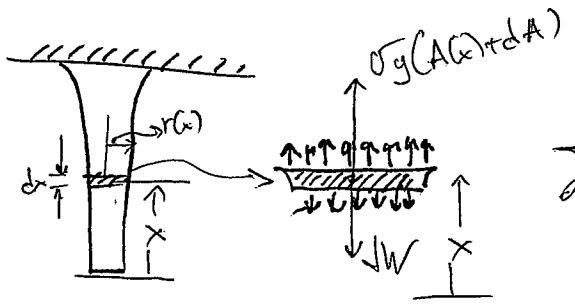
$$\Delta L_x = \frac{1}{E}\int_0^1 \frac{10^5}{\pi(2-x)^2}dx = \frac{10^5}{2\times10^3}\cdot\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{(2-x)^2}dx}_{=1/2} = \frac{10^{-4}}{4\pi} \rightarrow \boxed{\Delta L_x = 8\times10^{-3}\ mm}$$

(β) $\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow \frac{F_1 L_1}{A(x)E_1} = \frac{F_2 L_2}{A(x)E_2} \xrightarrow{L_1 = L_2} \frac{F_1}{E_1} = \frac{F_2}{E_2} \rightarrow \boxed{F_2 = 2F_1} \quad (1)$

$F = F_1 + F_2 \rightarrow F = 3F_1 \rightarrow 1000N = 3F_1 \rightarrow \boxed{F_1 = 333.33N}$

$\xrightarrow{(1)} \boxed{F_2 = 666.67N}$

(2)



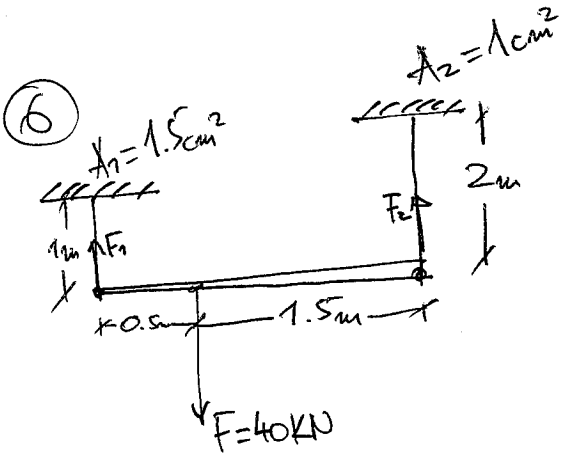
$\sum F_x = 0 \rightarrow \sigma_y dA = \gamma A dx$

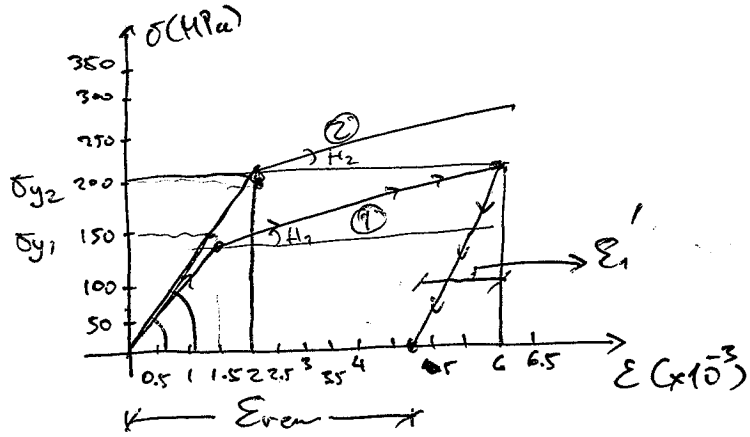
$$\int_{A_0}^{A(x)} \sigma_y \frac{dA}{A} = \int_0^x \gamma dx \rightarrow$$

$$\sigma_y \ln\left(\frac{A(x)}{A_0}\right) = \gamma x$$

$\ln\frac{A(x)}{A_0} = \frac{\gamma}{\sigma_y}x \Rightarrow \ln\frac{r^2(x)}{r^2} = \frac{\gamma x}{\sigma_y} \rightarrow \boxed{r(x) = \sqrt{r_0^2 \exp\left(\frac{\gamma x}{\sigma_y}\right)}}$

(6)





$AB \to 1 \to E_1 = 100GPa,\ \sigma_{y_1} = 150MPa,\ H_1 = 10GPa \to \varepsilon_{y_1} = \frac{\sigma_{y_1}}{E_1} \to \varepsilon_{y_1} = 1.5\times10^{-3}$

$\Delta\Gamma \to 2 \to E_2 = 200GPa,\ \sigma_{y_2} = 200MPa,\ H_2 = 10GPa \to \varepsilon_{y_2} = \frac{\sigma_{y_2}}{E_2} = \frac{200\times10^6}{200\times10^9} = 10^{-3} \equiv \varepsilon_{y_2}$

(α) $F = F_1 + F_2 \to F_1 + F_2 = 40KN.$

~~$\Delta L_1 = 0.5F \to F_1 = 0.25F \to F_1 = 10KN$~~

~~$F_1 = 30KN$~~

Κάποια ράβδος θα αστοχήσει πρώτη. Θα τρέξτε ποια.

$0.5F_1 = 1.5F_2 \quad (\sum M_F = 0) \to \boxed{F_1 = 3F_2}$ ① $\to \sigma_1 A_1 = 3\sigma_2 A_2 \to \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 3\frac{A_2}{A_1}$

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 3\frac{10^{-4}}{1.5\times10^{-4}} \to \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2 \qquad \frac{\sigma_{y_1}}{\sigma_{y_2}} = \frac{150\times10^6}{200\times10^6} = 0.75. \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} > \frac{\sigma_{y_1}}{\sigma_{y_2}}\right)$

↳ Η ① αστοχεί πρώτη.

$\Rightarrow F_{1y} = \sigma_{1y}A_1 = 150\times10^6\times1.5\times10^{-4} \to \boxed{F_{1y} = 22.5KN.}$ ① $\to \boxed{F_2 = 7.5KN.}$

→ Εναλλάσσοντας, αν αφήσουμε για δύναμη $F_{1y} + F_2 = 30KN$ θα αστοχήσει η ράβδος 1.

$\sigma_1 = 150MPa \to \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{150\times10^6}{100\times10^9} = 1.5\times10^{-3} \to \Delta L_1 = 1.5mm$

$\sigma_2 = \frac{7.5\times10^3}{10^{-4}} = 75MPa \to \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = 0.375\times10^{-3} \to \Delta L_2 = 0.75mm.$

Επομένως, αν αυξηθούν επιπλέον 10KN θα αυξηθεί το επιβαλλόμενο φορτίο.

$$F_1^+ + F_2^+ = F^+ \rightarrow F_1^+ + F_2^+ = 10\,KN \xrightarrow{(1)} 4F_2^+ = 10 \rightarrow \boxed{F_2^+ = 2.5\,KN} \rightarrow \boxed{F_1^+ = 7.5\,KN}$$

$$\sigma_1^{add} = \frac{F_1^+}{A_1} = \frac{7.5\times10^3}{1.5\times10^{-4}} = 50\,MPa. \xrightarrow{\text{από διάγραμμα σ-ε.}} \varepsilon_1^{add} = \frac{\sigma_1^{add}}{E_1} = \frac{50\times10^6}{10\times10^9} = 5\times10^{-3}.$$

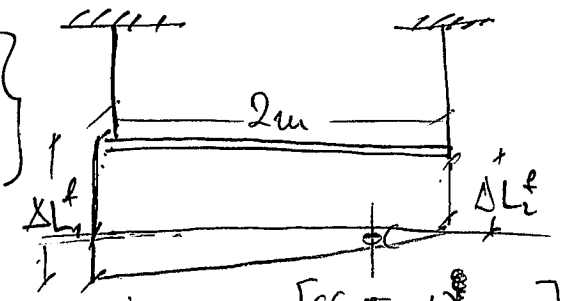
(κρίσιμο)

$$\varepsilon_1^{final} = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^{add} = (1.5+5)\times10^{-3} = 6.5\times10^{-3}$$

$$\sigma_2^{add} = \frac{F_2^+}{A_2} = \frac{2.5\times10^3}{10^{-4}} = 25\,MPa \xrightarrow{\text{v. Hooke}} \varepsilon_2^{add} = \frac{\sigma_2^{add}}{E_2} = \frac{25\times10^6}{200\times10^9} = 0.125\times10^{-3}.$$

$$\Delta L_1^{final} = \varepsilon_1^{final} L_1 = 6.5\,mm$$

$$\Delta L_2^{final} = \varepsilon_2^{final} L_2 = (0.375+0.125)\times10^{-3}\times 2 = 1\,mm.$$



$$\phi = \arctan\left[\frac{(6.5-1)}{2}\times10^{-3}\right]$$

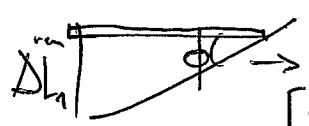
$$\phi \cong 0.157^\circ.$$

(β) Επειδή δεν είναι υπερστατικό πρόβλημα, μπορούμε απλά να αφαιρέσουμε το φορτίο. (Αν ήταν υπερστατικό, θα έπρεπε να αυξήσουμε ένα αντίθετης φοράς φορτίο ίσο με $F = 40\,KN$).

→ Η ράβδος 1 θα έχει παραμένουσα παραμόρφωση.

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1^{final}}{E_1} = \frac{200\times10^6}{100\times10^9} = 2\times10^{-3} \rightarrow \varepsilon_{rem} = \varepsilon_1^{final} - \varepsilon_1' = (6.5-2)\times10^{-3} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{rem} = 4.5\times10^{-3}}$$

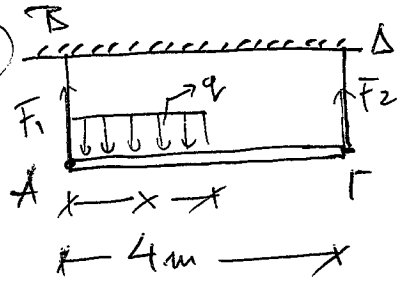
→ Η ράβδος 2 δεν φτάνει το όριο διαρροής της ⇒ Θα επιστρέψει στην αρχική της θέση. $\Delta L_1^{rem} = 4.5\times10^{-3}\times 1 = 4.5\,mm.$



$$\rightarrow \phi = \arctan\left[\frac{4.5}{2}\times10^{-3}\right]$$

$$[\phi \cong 0.143^\circ]$$

(7)



$AB \to 1$ $E_1 = 200\,GPa$, $\sigma_{y_1} = 150\,MPa$, $H_1 = 40\,GPa$, $A_1 = 1\,cm^2$

$\Delta\Gamma \to 2$ $E_2 = 100\,GPa$, $\sigma_{y_2} = 100\,MPa$, $H_2 = 20\,GPa$, $A_2 = 0.67\,cm^2$

$$\Rightarrow \varepsilon_{y_1} = \frac{\sigma_{y_1}}{E_1} = \frac{150\times10^6}{200\times10^9} \Rightarrow \varepsilon_{y_1} = 0.75\times10^{-3}$$

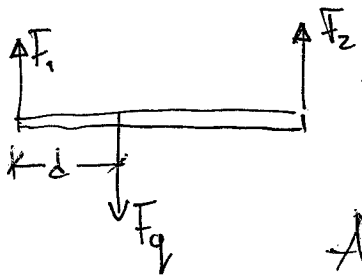
$$\Rightarrow \varepsilon_{y_2} = \frac{\sigma_{y_2}}{E_2} = \frac{100\times10^6}{100\times10^9} \to \varepsilon_{y_2} = 10^{-3}.$$

(α) Για να παραμείνει φορτίζοντα η δοκός, πρέπει να την φέρουν το άρρο διαρροής και να επιμηκυνθούν και οι 2 ράβδοι με το ίδιο μέτρο.

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \to \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} = \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} \xrightarrow{L_1 = L_2} \frac{F_1 \cancel{L}}{1.5 \cancel{A_2} E_1} = \frac{F_1 \cancel{L}}{\cancel{A_2} E_2} \to \frac{F_1}{1.5\times200\times\cancel{10^9}} = \frac{F_2}{100\times\cancel{10^9}}$$

$$\to \boxed{F_1 = 3F_2} \quad (1)$$

→ Έστω F_q που ασκείται σε απόσταση d από το σημείο Α.
Παίρνουμε τη ροπή ως προς το σημείο εφαρμογής



$$F_2(L-d) = F_1 d \xrightarrow{(1)} F_2(L-d) = 3F_2 d \xrightarrow{L=4m} (4-d) = 3d$$

$$4 = 4d \to \boxed{d = 1m}$$

Αφού όμως το L είναι ορθογώνιο σχήματος, η F_q θα ασκείται στο κέντρο του ορθογωνίου. $x = 2d$

$$\boxed{x = 2m}$$

(β)
$$\frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{2y}} = \frac{150\times10^6}{200\times10^6} = 0.75$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{F_1}{A_1}}{\frac{F_2}{A_2}} = \frac{\frac{3F_2}{1.5A_2}}{\frac{F_2}{A_2}} = \frac{3}{1.5} = 2$$

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} > \frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{2y}}$ } Πρώτη αστοχεί η ράβδος 1.

$$\sigma_{1y} = 150\,MPa \to F_{1y} = \sigma_{1y} A_1 \to F_{1y} = 150\times10^6 \times 10^{-4} = 15\,KN$$

$$\xrightarrow{(1)} F_2 = 5\,KN.$$

$\Rightarrow F_q = 20\,KN \rightarrow \frac{F_q}{x} = q \rightarrow \frac{20}{2} = q \rightarrow \boxed{q = 10\,KN/m}$

$\sigma_{1y} = 150\,MPa \rightarrow \Delta L_{1y} = \varepsilon_{1y} L_1 = 0.75 \times 10^{-3} \times 3 = \underline{2.25\,mm}$

$\sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{5 \times 10^3}{1/1.5 \times 10^{-4}} = 75\,MPa \rightarrow \Delta L_2 = \varepsilon_2 L_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} L_2 = \frac{75 \times 10^6}{100 \times 10^9} \times 3 = \underline{2.25\,mm}$

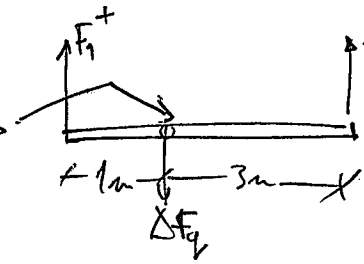
Αναφενόμενο

(γ) $\sigma_{y_2} = 100\,MPa \rightarrow \sigma_2^{add} = \sigma_{y_2} - \sigma_2 = 25\,MPa \rightarrow F_2^+ = 25 \times 10^6 \times \frac{1}{1.5} \times 10^{-4}$

$\rightarrow F_2^+ = 1.675\,KN.$

$F_2^+ = 1.67$

Αν πάρουμε ισορροπία ράβδου της δοκού →



(Η δεξιά κ δεν αλλάζει αλλάζει το τέρμα της δύναμης F_q.)

$\rightarrow F_1^+ = 3 F_2^+ \rightarrow F_1^+ = 5.025\,KN.$

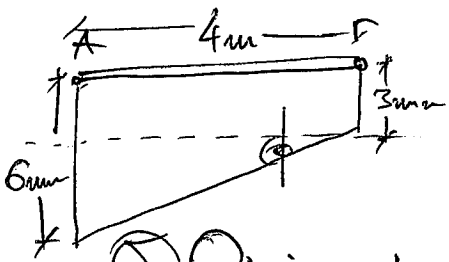
$\rightarrow \Delta F_q = 5.025 + 1.675 = 6.7\,KN.$

$F_q^+ = F_q + \Delta F_q = 20 + 6.7 = 26.7\,KN. \rightarrow q^+ = \frac{26.7}{2} \rightarrow [q^+ = 13.35\,KN/m]$

$\sigma_1^+ = \frac{F_1^+}{A_1} = \frac{5.025 \times 10^3}{10^{-4}} \rightarrow \sigma_1^+ \cong 50\,MPa \xrightarrow{\text{Κρίσιμη}} \varepsilon_1^+ = \frac{\sigma_1^+}{E_1} = \frac{50 \times 10^6}{40 \times 10^9} = 1.25 \times 10^{-3}$

$\varepsilon_1^{final} = \varepsilon_{1y} + \varepsilon_1^+ = (0.75 + 1.25) \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-3} \rightarrow \Delta L_1^{final} = \varepsilon_1^{final} \cdot L_1 = 6\,mm$

$\sigma_{2y} = 100\,MPa \rightarrow \varepsilon_{2y} = 10^{-3} \rightarrow \Delta L_{2y} = 3\,mm$



$\rightarrow \phi = \arctan \frac{(6-3) \times 10^{-3}}{4} \rightarrow \boxed{\phi \cong 0.43^\circ}$

(δ) Όπως πριν, (δεύτερη 6) η ράβδος 2 επιστρέφει στην αρχική της θέση, αλλά η 1 θα έχει παραμένουσα παραμόρφωση.....

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ)

4η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

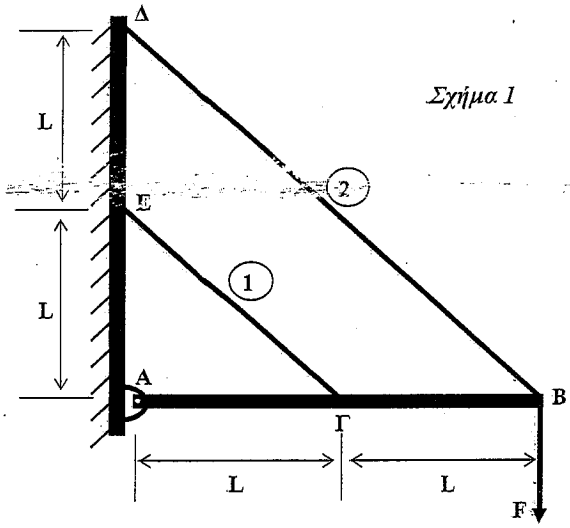
ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΑ ΑΞΟΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Άσκηση 1

Αβαρής και απολύτως άκαμπτη δοκός ΑΒ μήκους 2L= 2m (Σχ.1) στηρίζεται οριζόντια με άρθρωση στο Α και δύο αρχικώς αφόρτιστες κυλινδρικές ράβδους ΕΓ και ΒΔ κατασκευασμένες από το ίδιο ελαστικό - απολύτως πλαστικό υλικό (E= 200 GPa, σ_y=150 MPa). Το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής της ράβδου 1 είναι 100 mm^2, ενώ αυτό της ράβδου 2 είναι 120 mm^2. Στο σημείο Β ασκείται κατακόρυφη δύναμη F, η οποία αυξάνει σταδιακά.

α. Να υπολογισθεί η τιμή της F που μόλις προκαλεί αστοχία σε μία από τις δύο ράβδους και η αντίστοιχη κατακόρυφη μετατόπιση του σημείου Β τη στιγμή αυτή.

β. Να υπολογισθεί η τιμή της F που θα προκαλέσει κατάρρευση του συστήματος και η αντίστοιχη κατακόρυφη μετατόπιση του σημείου Β τη στιγμή αυτή.



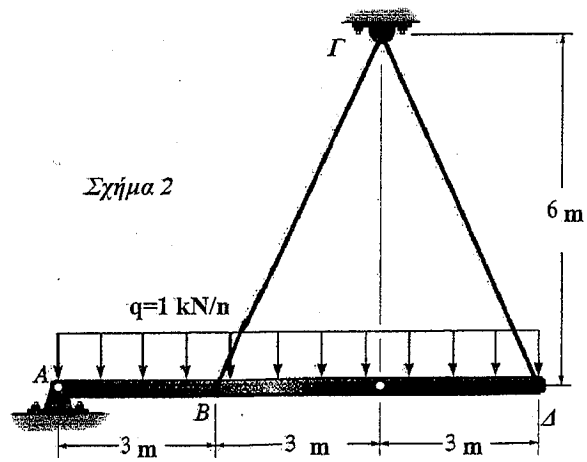
Σχήμα 1

Άσκηση 2

Η αβαρής και απολύτως άκαμπτη δοκός ΑΔ του Σχ. 2 στηρίζεται σε αρχικώς οριζόντια θέση με τη βοήθεια άρθρωσης στο σημείο Α δύο ράβδων ΒΓ και ΔΓ με εμβαδά εγκάρσιας διατομής $A_{BΓ}$=30mm^2 και $A_{ΔΓ}$=75mm^2, αντιστοίχως. Οι ράβδοι είναι κατασκευασμένες από γραμμικώς ελαστικά-απολύτως πλαστικά υλικά με μέτρα ελαστικότητας $E_{BΓ}$=180 GPa και $E_{ΔΓ}$=60 GPa και τάσεις διαρροής $\sigma_{y,BΓ}$= 175 MPa και $\sigma_{y,ΔΓ}$= 200 MPa.

α. Να υπολογιστεί η δύναμη σε κάθε ράβδο και η απόκλιση της δοκού ΑΔ από την αρχικώς οριζόντια θέση όταν η δοκός φορτίζεται αποκλειστικά με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q=1kN/m.

β. Στη συνέχεια στο σημείο Ε της δοκού ασκείται επί πλέον κατακόρυφη δύναμη F προς τα κάτω. Να ευρεθεί η τιμή της F που θα προκαλέσει πρώτη αστοχία κάποιας εκ των δύο ράβδων, η τιμή της F που θα προκαλέσει αστοχία και της άλλης ράβδου και η θέση της δοκού ΑΔ τη στιγμή της αστοχίας και της δεύτερης ράβδου.



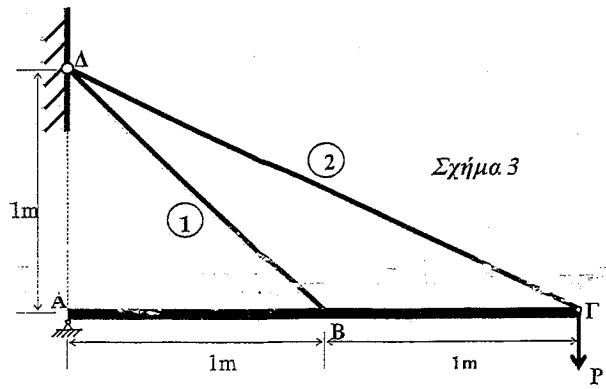
Σχήμα 2

Άσκηση 3

Η αβαρής και απολύτως άκαμπτη δοκός ΑΒΓ του Σχ.3 στηρίζεται με άρθρωση στο σημείο Α και με δύο αρχικά αφόρτιστες ράβδους (1) και (2), κατασκευασμένες από το ίδιο *γραμμικώς ελαστικό – απολύτως πλαστικό* υλικό, με τάση διαρροής $\sigma_Δ$=180 MPa. Τα εμβαδά της διατομής των ράβδων είναι A_1=1.5 cm^2 και A_2=1 cm^2.

α. Να υπολογιστεί το φορτίο διαρροής $P_Δ$.

β. Να υπολογιστεί το φορτίο κατάρρευσης $P_κ$.



Σχήμα 3

Άσκηση 4

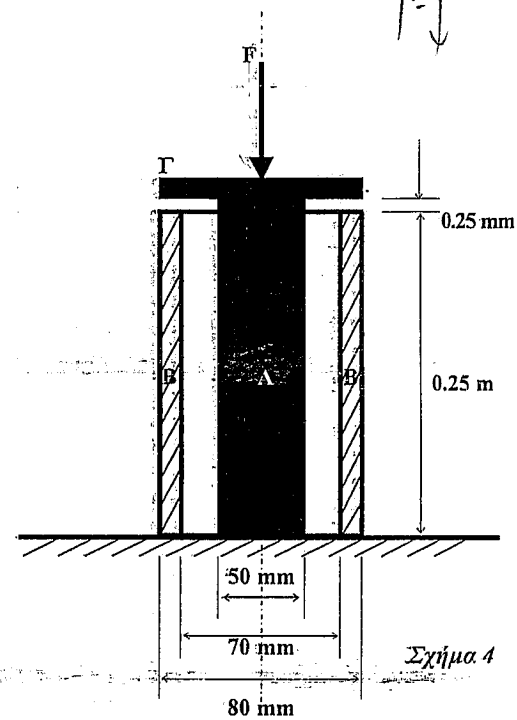
Ο συμπαγής κύλινδρος Α του Σχ.4 είναι κατασκευασμένος από αλουμίνιο, το οποίο θεωρείται όλκιμο, γραμμικώς ελαστικό – γραμμικώς κρατυνόμενο υλικό με μέτρο ελαστικότητας $E_{\alpha\lambda}$=73 GPa, τάση διαρροής $\sigma_{y,\alpha\lambda}$=120 MPa και κλίση του διαγράμματος σ-ε στην πλαστική περιοχή $H_{\alpha\lambda}$= 40 GPa. Ο συμπαγής κύλινδρος τοποθετείται στο εσωτερικό κοίλου κυλίνδρου Β κατασκευασμένου από χάλυβα, ο οποίος θεωρείται όλκιμο, γραμμικώς ελαστικό - απολύτως πλαστικό υλικό μέτρου ελαστικότητας E_{χ}=200 GPa και τάσης διαρροής $\sigma_{y,\chi}$= 250 MPa. Από κατασκευαστικό σφάλμα ο κοίλος κύλινδρος είναι κατά 0.25 mm βραχύτερος του συμπαγούς (Σχ.1). Στην κατασκευή ασκείται κατακόρυφο θλιπτικό αξονικό φορτίο F μέσω της απολύτως στερεής πλάκας Γ.

α. Να ευρεθεί η μέγιστη τιμή F_{max} της δύναμης F που επιτρέπεται να ασκηθεί στην κατασκευή χωρίς να αστοχήσει κάποιος από τους κυλίνδρους.

β. Στη συνέχεια το φορτίο αυξάνεται σε $F'=1.20F_{max}$. Να ευρεθεί το μήκος της κατασκευής υπό την επίδραση του φορτίου αυτού.

γ. Τέλος η κατασκευή αποφορτίζεται πλήρως. Ποια είναι τα μήκη των κυλίνδρων μετά την αποφόρτιση;

Να αγνοηθούν τα ίδια βάρη και φαινόμενα λυγισμού.



Σχήμα 4

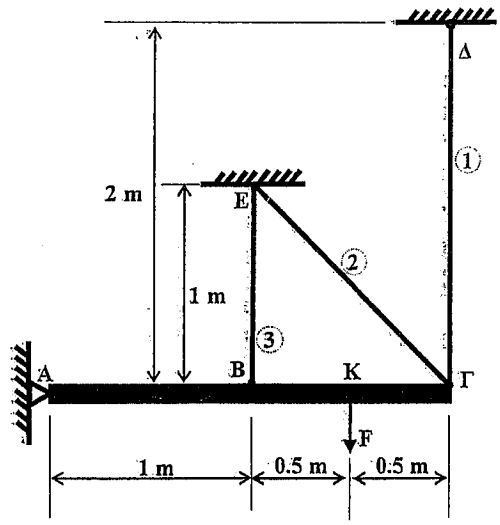
Άσκηση 5

Η αρθρωμένη στο Α απολύτως άκαμπτη και αβαρής δοκός ΑΒΓ στηρίζεται οριζόντια με τη βοήθεια τριών ράβδων (1), (2), (3). Οι ράβδοι (1), (3) είναι κατακόρυφες (Σχ.1). Όλες οι ράβδοι είναι αφόρτιστες όταν η δοκός είναι οριζόντια. Το υλικό των ράβδων είναι γραμμικώς ελαστικό - απολύτως πλαστικό μέτρου ελαστικότητας E=180 GPa. Η τάση διαρροής των ράβδων (1), (2) είναι $\sigma_{y1,2}$=180 MPa ενώ της ράβδου (3) είναι $\sigma_{y,3}$=270 MPa. Τα εμβαδά των εγκαρσίων διατομών των ράβδων είναι $A_1=A_2$=40 mm^2 και A_3=30 mm^2. Στο Κ ασκείται κατακόρυφη δύναμη F.

α. Να υπολογιστεί η τιμή F_α της F που θα προκαλέσει την πρώτη αστοχία κάποιας ή κάποιων εκ των τριών ράβδων.

β. Να υπολογιστεί η τιμή F_κ της F που θα προκαλέσει αστοχία όλων των ράβδων της διάταξης (κατάρρευση).

γ. Ποια η θέση της ράβδου ΑΒΓ τη στιγμή της κατάρρευσης και πόση η συνολικώς δαπανηθείσα ενέργεια;



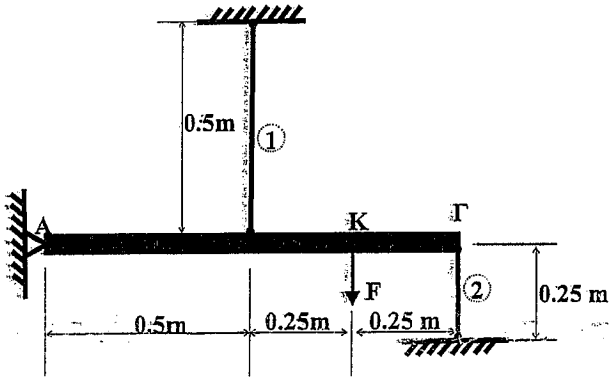
Σχήμα 5

Άσκηση 6

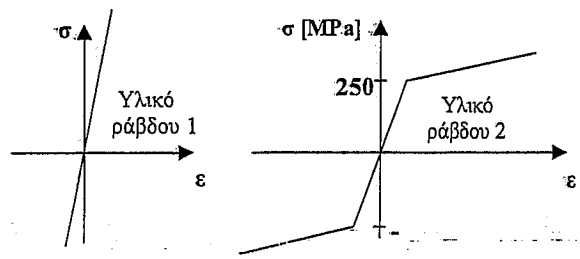
Άκαμπτη και αβαρής δοκός ΑΓ ισορροπεί με τη βοήθεια των κατακορύφων ράβδων (1) και (2), εμβαδών διατομής $A_1=A_2$=50 mm^2, που είναι αφόρτιστες όταν η δοκός είναι οριζόντια (Σχ.3α). Το υλικό της (1) είναι γραμμικώς ελαστικό με E_1=200 GPa, ενώ της (2) γραμμικώς ελαστικό-γραμμικώς κρατυνόμενο με E_2=150 GPa και κλίση στην πλαστική περιοχή H_2=50 GPa (Σχ.3β). Στο σημείο Κ της δοκού ασκείται κατακόρυφη δύναμη F.

α. Να υπολογιστεί η τιμή της F που δημιουργεί στη ράβδο (2) τάση 20% υψηλότερη από την τάση διαρροής της.

β. Στη συνέχεια η δύναμη αφαιρείται. Να ευρεθεί η θέση ισορροπίας της δοκού.



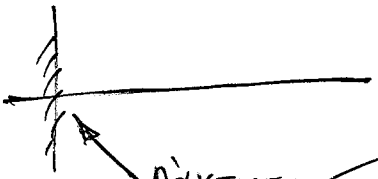
Σχήμα 6α



Σχήμα 6β

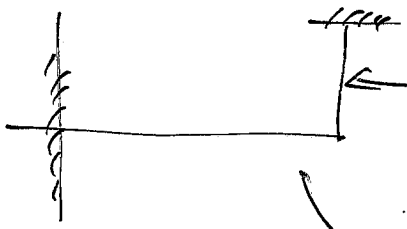
4η - Σειρά — Γενικές Οδηγίες

→ Ένα πρόβλημα καλείται υπεραριθμό όταν οι στηρίξεις της κατασκευής ~~υπερ~~ περιορίζουν τους βαθμούς ελευθερίας κινήσεως ~~σε~~ ~~βάθος~~ παραπάνω από όσο χρειάζεται. Π.χ: ⟹



πάκτωση → Περιορίζει κίνηση κατά x
—"— κατά y
→ Περιορίζει στροφή
} → Στατικό πρόβλημα.

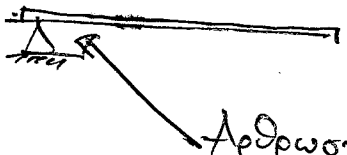
↳ Αν όμως:



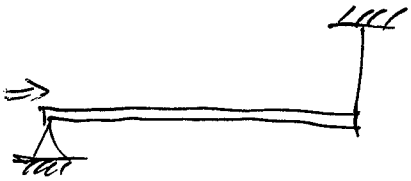
← Η ράβδος αυτή, αν αφαιρεθεί, η κατασκευή θα παραμείνει σε-βιόντια.

⟹ Υπεραριθμό πρόβλημα

Π.χ. 2

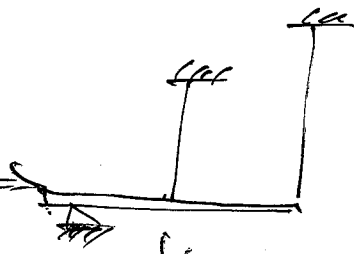


Άρθρωση → Περιορίζει κίνηση κατά x
—"— κατά y
} → Η στροφή δεν περιορίζεται, επομένως χρειάζεται και κάποιο άλλο στήριγμα για να είναι στατικό το πρόβλημα.



Στατικό πρόβλημα.

Αν προσθέσουμε και άλλη ράβδο στηρίγματος ⟹



Υπεραριθμό πρόβλ.

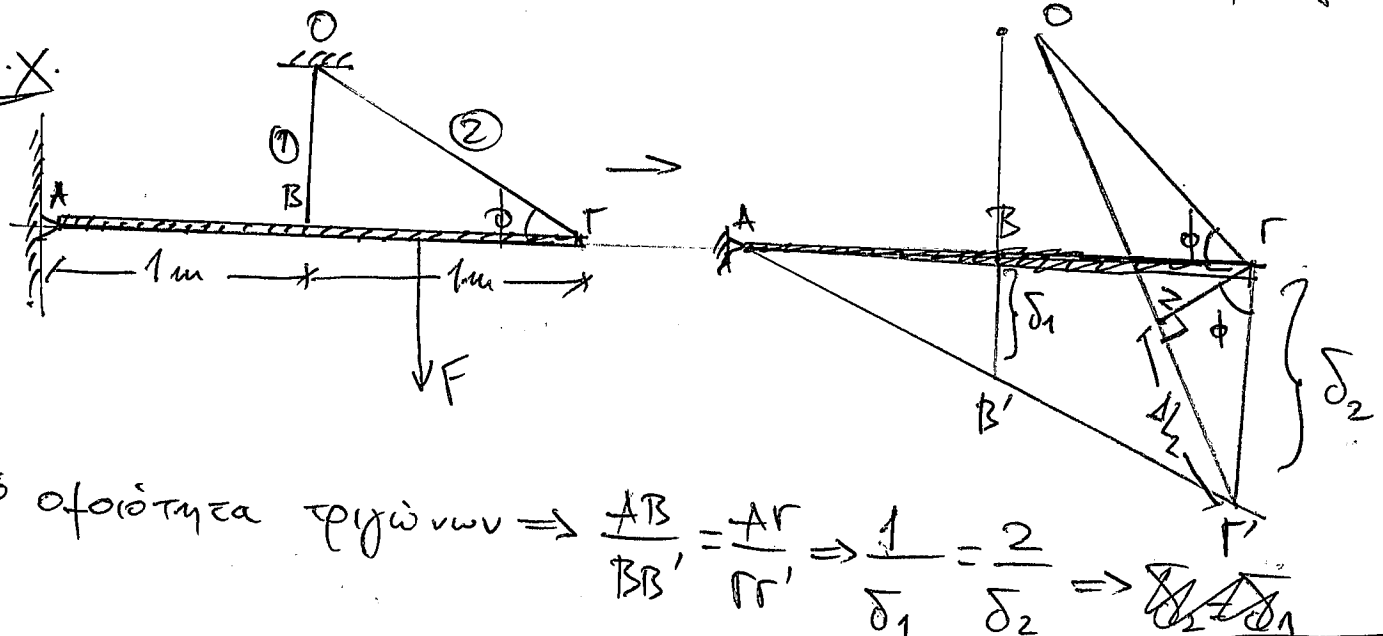
Αν θέλουμε λοιπόν να καταλάβουμε αν μία κατασκευή είναι υπεραριθμική, αρκεί να αφαιρέσουμε μία στήριγμα (ράβδος ή άρθρωση/πάκτωση) και να δούμε αν η κατασκευή μπορεί

να παραμείνει στην ίδια θέση.

Τα υπερστατικά προβλήματα συνιστούν δεν μπορούν να λυθούν. Επειδή όμως οι παραμορφώσεις που μελετάμε είναι πολύ μικρές, κάνουμε διάφορες παραδοχές γεωμετρικής φύσεως, οι οποίες μας οδηγούν στην <u>εξίσωση συμβιβαστού</u>.

Η εξίσωση συμβιβαστού συνδέει τις επιμηκύνσεις ή βραχύνσεις των δοκών μελών της κατασκευής μεταξύ τους.

<u>Π.Χ.</u>



Από ομοιότητα τριγώνων $\Rightarrow \frac{AB}{BB'} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Gamma'} \Rightarrow \frac{1}{\delta_1} = \frac{2}{\delta_2} \Rightarrow$

$$\boxed{\delta_2 = 2\delta_1} \quad (I)$$

Επομένως, το σημείο Γ μετατίθεται με διπλάσιο μέτρο σε σχέση με το Β. Το $\delta_1 \equiv \Delta L_1 \Rightarrow \delta_2 = 2\Delta L_1$. Όμως το δ_2 δεν ταυτίζεται με την επιμήκυνση της ράβδου 2 καθώς αυτή έχει προσδεθεί με γωνία φ στο σημείο αυτό. Η γωνία φ (οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες) παίνει στο τρίγωνο ΣΓΓ' στη ΣΓΓ'. $\Sigma\Gamma' \equiv \Delta L_2 \rightarrow \Gamma\Gamma' \equiv \delta_2 \rightarrow \sin\phi = \frac{\Delta L_2}{\delta_2}$ (I)

$$\boxed{\frac{\Delta L_2}{\sin\phi} = 2\Delta L_1}$$ Συμβιβαστό.

Το συμβιβαστό ισχύει πάντα.

Το βήματα τώρα είναι να εξάγουμε από το συμβιβαστό μία σχέση μεταξύ των δυνάμεων που ασκούνται στις ράβδους ώστε να έχουμε μία σχέση τελικά μεταξύ των δυνάμεων, για να την αντικαταστήσουμε στην γνωστή από τη στατική εξίσωση των ροπών, και να λύσουμε το πρόβλημα.

⇒ Αν δεν έχει επέλθει αστοχία κάποιας ράβδου, τότε ισχύει ο ν.Hooke ⇒ $\Delta L_i = \frac{F_i L_i}{A_i E_i}$ → Από αυτόν τον τύπο και το συμβιβαστό λαμβάνουμε σχέση για τις δυνάμεις.

⇒ Αν έχει επέλθει αστοχία ράβδου, η οποία είναι γραμμικώς ελαστική ~~και~~ απολύτως πλαστική, το πρόβλημα είναι πλέον στατικό, καθώς η ράβδος αυτή χάνει τη φέρουσα ικανότητά της με αποτέλεσμα η δύναμη που ασκείται πάνω της να είναι σταθερή και ίση με τη δύναμη F_{yield}. $\left(\sigma_y = \frac{F_{yield}}{A}\right)$. Επιλύουμε το πρόβλημα με ισορροπία ροπών.

⇒ Αν έχει επέλθει αστοχία κάποιας ράβδου, η οποία είναι γραμμικώς ελαστική γραμμικώς κρατυνόμενη, τα πράγματα είναι λίγο δύσκολα. Μέχρι την αστοχία ισχύει ο ν.Hooke, αλλά μετά το πέρας της, θα ισχύει ο Hooke για τη ράβδο που δεν έχει αστοχήσει αλλά η ~~θα~~ κρατυνόμενη ράβδος θα έχει περάσει σε κατάσταση κράτυνσης με αποτέλεσμα $\Delta L_i \neq \frac{F_i L_i}{A_i E_i}$. Τι κάνουμε σε αυτήν την περίπτωση?

Σε αυτή την περίπτωση θα συμβουλευτούμε το διάγραμμα σ-ε της ράβδου σε κράτυνση, και θα συνδέσουμε την επιπλέον επιμήκυνση/βράχυνση με την επιπλέον τάση πέσω του μέτρου κράτυνσης.

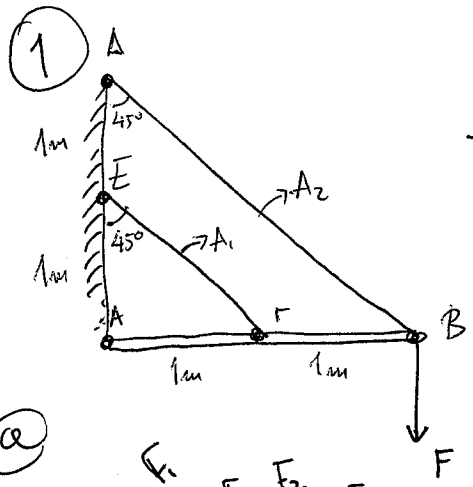
⟹ Τέλος, αν μας ζητηθεί να αφαιρέσουμε το φορτίο που κατούμε στην κατασκευή, ενώ η κάποια ράβδος έχει αστοχήσει και έχει φορτισθεί επιπλέον, πρέπει να ασκήσουμε ένα φορτίο ίσου μέτρου με αντίθετης φοράς σε σχέση με το προηγούμενο. Δεν μπορούμε απλά να μηδενίσουμε το φορτίο που κατέιται, καθώς θα οδηγηθούμε σε λάθος αποτελέσματα λόγω της υπερστατικότητας του προβλήματος.

Πρόκειται για πολύ σημαντική σειρά ασκήσεων, καθώς αποτελεί τη βάση για τις επόμενες δύο.

Μηχανική ΙΙ – 4η Σειρά Ασκήσεων

(Υπερστατικότητα) (2013)

(1)



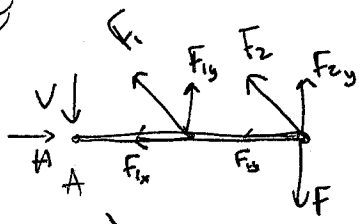
$A_1 = 10^{-4}\,m^2$ $\quad E = 200\,GPa$

$A_2 = 1.2\times10^{-4}\,m^2$ $\quad \sigma_y = 150\,MPa$.

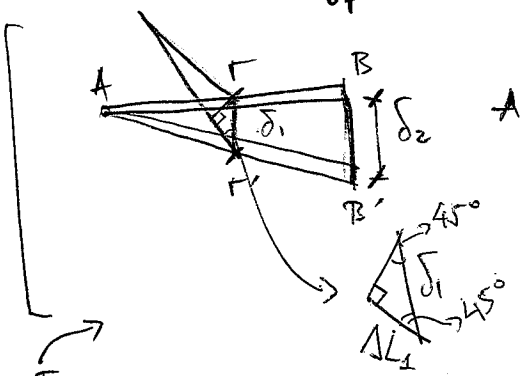
$L_1 = \sqrt{2}\,m$

$L_2 = \sqrt{8}\,m$

(α)



$\Sigma M_A = 0 \rightarrow \cancel{F_{1y} + 2F_{2y} =}\ \boxed{F_{1y} + 2F_{2y} = 2F}$ (1)



Γεωμετρία σχήματος.

$\overset{\triangle}{ABB'} \approx \overset{\triangle}{A\Gamma\Gamma'} \rightsquigarrow \cancel{\frac{AB}{\Delta L_2} = \frac{A\Gamma}{\Delta L_1}}\ \frac{AB}{BB'} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Gamma'} \rightsquigarrow \frac{2}{\delta_2} = \frac{1}{\delta_1} \rightsquigarrow \underline{\delta_1 = 2\delta_2}$

$\sin 45° = \frac{\Delta L_1}{\delta_1} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\Delta L_1}{\delta_1} \rightarrow \Delta L_1 = \delta_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Delta L_2 = \delta_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}}\Delta L_1 = 2\frac{2}{\sqrt{2}}\Delta L_2$

$\boxed{\Delta L_1 = 2\Delta L_2}$ (2)

$(2) \rightarrow \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} = \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} \rightarrow \frac{F_1\sqrt{2}}{10^{-4}} = \frac{F_2\sqrt{8}}{1.2\times10^{-4}} \rightarrow \boxed{F_1 = \frac{F_2\sqrt{8}}{\sqrt{2}\times1.2}}$ (3)

$\frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{2y}} = 1$

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{F_1}{A_1}}{\frac{F_2}{A_2}} = \left(\frac{\frac{F_1}{10^{-4}}}{\frac{F_2}{1.2\times10^{-4}}}\right) = \frac{1.2F_1}{F_2} \xrightarrow{(3)} \left(\frac{1.2\frac{F_2\sqrt{8}}{\sqrt{2}\times1.2}}{\frac{F_2}{1}}\right) = \frac{F_2\sqrt{8}}{\sqrt{2}F_2} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2.$

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} > \frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{2y}} \rightarrow$ Η ράβδος 1 αστοχεί πρώτη.

$\sigma_{1y} = 150\,MPa \rightarrow F_{1y} = 150\times10^6\times10^{-4} \rightarrow F_{1y} = \underline{15\,kN \equiv F_{1y}}. \xrightarrow{(3)} 15 = F_2\frac{2}{1.2} \rightarrow \underline{\underline{F_2 = 9\,kN}}$

$\cos 45° = \frac{F_{1y}}{F_1} \rightarrow F_{1y} = \frac{\sqrt{2}}{2}15$

$\cos 45° = \frac{F_{2y}}{F_2} \rightarrow F_{2y} = \frac{\sqrt{2}}{2}9$

$\xrightarrow{(1)} \frac{\sqrt{2}}{2}(15+18) = 2F \rightarrow \boxed{F = 11.67\,kN}$

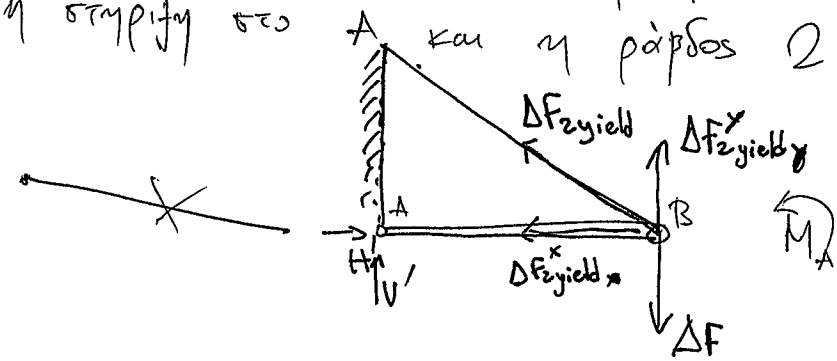
$F_2 = 9\,KN \rightarrow \sigma_2 = \frac{9\times10^3}{1.2\times10^{-4}} \rightarrow \sigma_2 = 75\,MPa. \rightarrow \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{75\times10^6}{200\times10^9} \rightarrow \underline{\varepsilon_2 = 0.375\times10^{-3}}$

$\Delta L_2 = \varepsilon_2 L_2 = 0.375\times2\times\sqrt{2}\times10^{-3} \rightarrow \Delta L_2 = 1.06\,mm$

$\hookrightarrow \delta_2 = \frac{2}{\sqrt{2}}\Delta L_2 \rightarrow \delta_2 = \frac{2\times1.06}{\sqrt{2}}$

$\boxed{\delta_2 = 1.5\,mm.}$ ↓

(β) Αν αυξηθεί περαιτέρω η δύναμη, η ράβδος 1, επειδή περνάει στο περιοχή απόλυτης πλαστικότητας, παύει πλέον να έχει φέρουσα ικανότητα, με αποτέλεσμα όλη την επιπλέον φόρτιση να την παραλαμβάνει η στήριξη στο A και η ράβδος 2.



$\circlearrowleft M_A = 0 \rightarrow \Delta F^y_{2yield} = \Delta F.$

$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta F_{2yield} = \Delta F}$ (4)

$\sigma_{2y} = 150\,MPa \rightarrow \cancel{F_{2y} = \frac{150\times10^6}{1.2\times10^{-4}}} \rightarrow F_{2y} = 150\times10^6\times1.2\times10^{-4} \rightarrow F_{2y} = 18\,KN.$

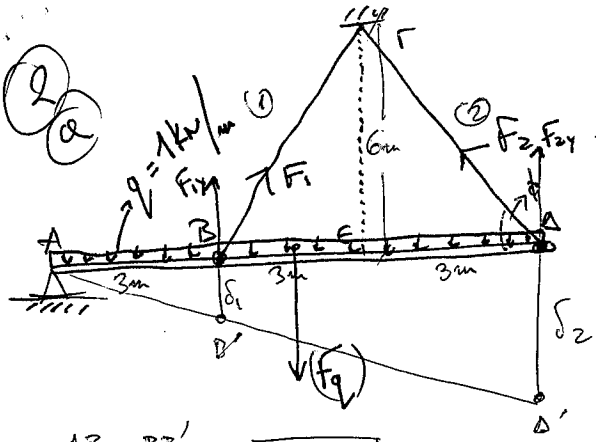
$\Delta F_{2yield} = F_{2y} - F_2 = 18 - 9 = 9\,KN. \xrightarrow{(4)} \frac{\sqrt{2}}{2}\times9 = \Delta F \rightarrow \Delta F = 6.36\,KN.$

$F_{\ell_{KAT}} - F_i = \Delta F \rightarrow F_{\ell_{KAT}} = 6.36 + 11.67 \rightarrow \boxed{F_{\ell_{KAT}} \simeq 18\,KN}.$

$\rightarrow \sigma_{2y} = 150\,MPa \rightarrow \varepsilon_{2y} = \frac{150\times10^6}{200\times10^9} \rightarrow \varepsilon_{2y} = 0.75\times10^{-3} \rightarrow \Delta L_{2yield} = 0.75\times10^{-3}\times2\sqrt{2}$

$\Delta L_{2yield} = 1.5\sqrt{2}\times10^{-3} \longrightarrow \delta_2' = \frac{2}{\sqrt{2}}\Delta L_{2yield} \rightarrow \delta_2' = \frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}1.5\cancel{\sqrt{2}}\times10^{-3} \rightarrow \boxed{\delta_2' = 3\,mm}$ ↓

2 α



$A_1 = 30\times10^{-6}\,m^2$, $E_1 = 180\times10^{9}\,Pa$, $\sigma_{y_1} = 175\times10^{6}\,Pa$

$A_2 = 75\times10^{-6}\,m^2$, $E_2 = 60\times10^{9}\,Pa$, $\sigma_{y_2} = 200\times10^{6}\,Pa$

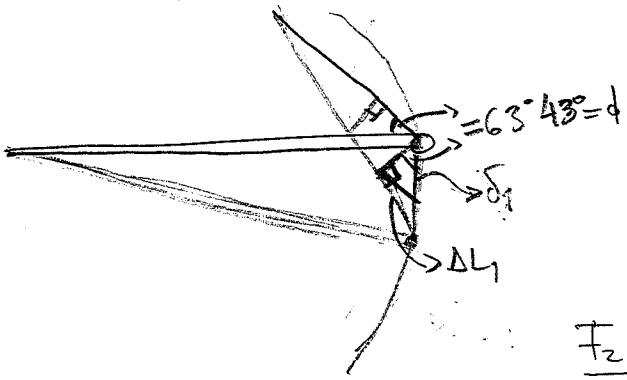
$L_2^2 = 6^2+3^2 = 45 \rightarrow L_2 = L_1 = 3\sqrt{5}\,m$

$\tan\phi = \frac{6}{3} = 2 \rightsquigarrow \phi = 63.43^\circ$

$\frac{AB}{AD} = \frac{BB'}{DD'} \rightsquigarrow \boxed{\delta_2 = 3\delta_1}$ (1)

$F_{1y} = \sin\phi\, F_1$, $F_{2y} = \sin\phi\, F_2$ $\rightarrow$ $3\sin\phi\, F_1 + 9\sin\phi\, F_2 = 4.5\times \overset{F_q}{g}$

$\boxed{3\sin\phi\, F_1 + 9\sin\phi\, F_2 = 40.5}$ (2)



$\sin\phi = \frac{\Delta L_2}{\delta_2} = 0.89 \rightarrow \delta_2 = \frac{\Delta L_2}{0.89} \xrightarrow{(1)} \frac{\Delta L_2}{0.89} = \frac{3\Delta L_1}{0.89}$

$\rightarrow \boxed{\Delta L_2 = 3\Delta L_1}$

$\frac{F_2 L}{A_2 E_2} = 3\frac{F_1 L}{A_1 E_1} \rightarrow \frac{F_2}{75\times10^{-6}\times60\times10^{9}} = 3\frac{F_1}{30\times10^{-6}\times180\times10^{9}} \rightarrow \boxed{F_2 = \frac{45}{18}F_1}$ (3)

$\xrightarrow[(3)]{(2)} \sin 63.43\left(F_1 + \frac{45}{6}F_1\right) = 40.5 \rightarrow \boxed{F_1 = 1.78\,kN} \xrightarrow{(3)} \boxed{F_2 = 4.45\,kN}$

$F_1 = 1.78\,kN \rightarrow \sigma_1 = \frac{1.78\times10^{3}}{30\times10^{-6}} \rightarrow \boxed{\sigma_1 = 60\,MPa}$

$F_2 = 4.45\,kN \rightarrow \sigma_2 = \frac{4.45\times10^{3}}{75\times10^{-6}} \rightarrow \boxed{\sigma_2 = 60\,MPa}$

$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = 0.33\times10^{-3}$

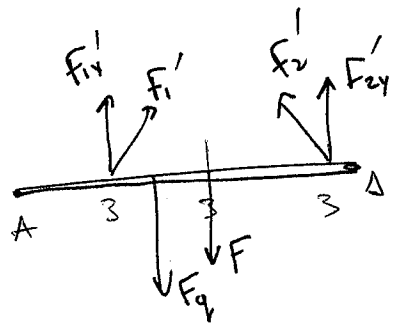
$\rightarrow \Delta L_1 = 2.21\,mm$

$\rightarrow \boxed{\delta_1 = 2.48\,mm}$

$\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{E_2} = 1\times10^{-3} \rightarrow \Delta L_2 = 6.71\,mm$

$\rightarrow \boxed{\delta_2 = 7.5\,mm}$

β



$F_1'y = \sin\phi\, F_1'$, $F_2'y = \sin\phi\, F_2'$ $\rightarrow 3F_1'y + 9F_2'y = 4.5F_q + 6F \rightarrow$ ($F_q = 9\,kN$)

$F_1'y + 3F_2'y = 13.5 + 2F \rightarrow$

$\sin\phi(F_1' + 3F_2') = 13.5 + 2F \xrightarrow{(3)\ \text{ισχύει ακόμα}}$

$\rightarrow \sin\phi\left(F_1' + \frac{45}{6}F_1'\right) = 13.5 + 2F \rightarrow 0.89\left(\frac{51}{6}F_1'\right) = 13.5 + 2F \rightarrow$

$\boxed{F_1' = 1.78 + 0.26F}$ (4)

$(3) \rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{45}{18} \overset{\sigma = \frac{F}{A}}{\rightsquigarrow} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\frac{F_2}{A_2}}{\frac{F_1}{A_1}} \rightsquigarrow \left(\frac{\frac{45}{18}F_1}{\frac{A_2}{F_1}} \cdot \frac{F_1}{A_1}\right) = \frac{45A_1}{18A_2} = \frac{1350}{1350} = 1.$

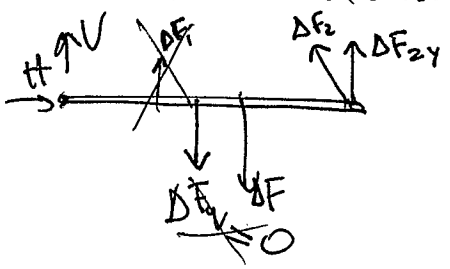
$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1$, $\frac{\sigma_{2y}}{\sigma_{1y}} = \frac{200-60}{175-60} > \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ Επομένως η ράβδος 1 αστοχεί πρώτη.

$F_{1y} = \sigma_{1y} A_1 = 175\times10^{6}\, 30\times10^{-6} \rightarrow F_{1y} = 5250\,N \equiv F_1' \xrightarrow{(4)} F_1 = 5.25\,KN$

$5.25 = 1.78 + 0.26F \rightarrow \boxed{F = 13.35\,KN}$

$F_1' = 5250\,N \xrightarrow{(3)} F_2' = \frac{45}{18}\times 5250 \rightarrow \boxed{F_2' = 13125\,N} \rightarrow \sigma_2' = \frac{13125}{75\times10^{-6}} \rightarrow \boxed{\sigma_2' = 175\,MPa}$

→ Από τη στιγμή που αυξάνουμε τη δύναμη, η ράβδος 1 η οποία έχει ήδη διαρρεύσει, δεν θα μπορεί να παραλάβει και άλλα φορτία. Το πρόβλημα είναι πλέον στατικό:



$\Sigma\, \Delta F_{2y} = 6\Delta F + 4.5\cancel{\Delta F_q}^{\,0} \rightarrow \boxed{\sin\phi\, \Delta F_2 = \frac{2}{3}\Delta F}$ (5)

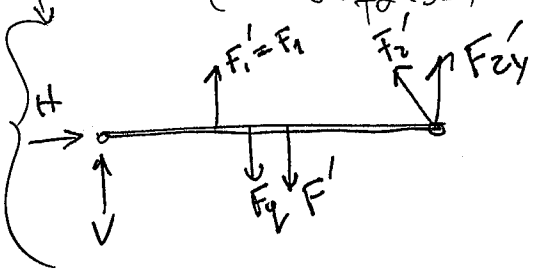
$\sigma_2' = 175\,MPa$, $\sigma_{2y} = 200\,MPa \rightarrow \Delta\sigma_{2y} = 25\,MPa$

$\Delta F_2 = \Delta\sigma_2 A_2 = 25\times10^{6}\times75\times10^{-6} = 1875\,N \rightarrow \Delta F_2 = 1.875\,KN$

$\xrightarrow{(5)} 0.89\times1.875 = \frac{2}{3}\Delta F \rightarrow \boxed{\Delta F = 2.5\,KN}$

$F' = F + \Delta F \Rightarrow F' = 13.35 + 2.5 \rightarrow \boxed{F' = 15.85\,KN}$

(Το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο αν είχαμε κάνει το εξής διάγραμμα ελευθέρου σώματος)

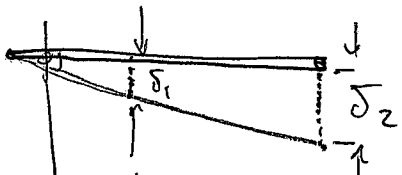


Για να βρούμε τη θέση της ράβδου, βρίσκουμε πρώτα την κατακόρυφη μετατόπιση στο σημείο Δ.

$\Delta L_2 = \varepsilon_2 L_2 = \Delta L_2 = \varepsilon_{2y} L_2 = \frac{\sigma_{y2}}{E_2} L_2 = \frac{200\times10^{6}}{60\times10^{9}}\times375$

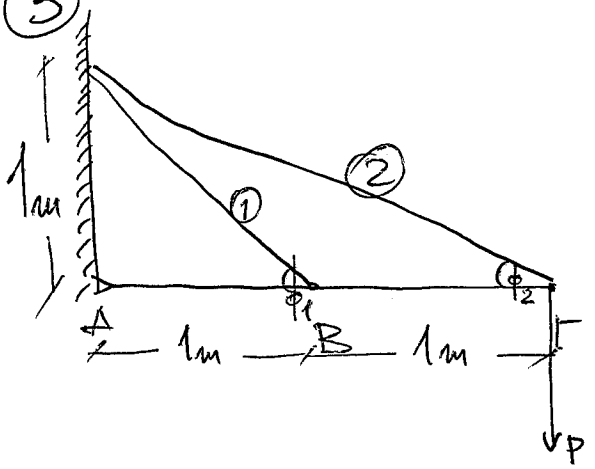
$\Delta L_2 = 22.36\,mm \rightarrow \delta_2 = \frac{\Delta L_2}{0.89} \rightarrow \boxed{\delta_2 = 25.12\,mm}$

$\delta_1 = \frac{\delta_2}{3} \rightarrow \boxed{\delta_1 = 8.37\,mm}$



$\phi = \arcsin\left(\frac{0.02512}{9}\right) \cong 0.16^{\circ}$

3 α

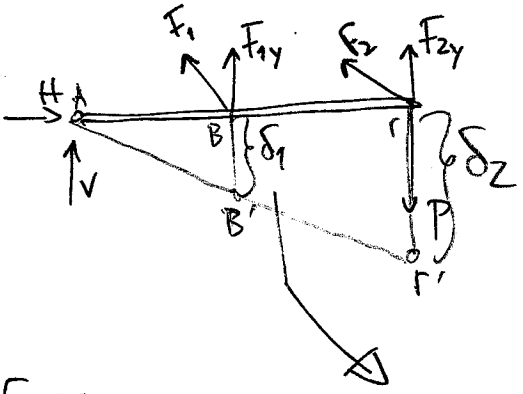


$A_1 = 1.5 \times 10^{-4}\, m^2$ $\quad \sigma_y = 180\, MPa$

$A_2 = 10^{-4}\, m^2$

$\phi_1 = 45^\circ$ $\quad L_1 = \sqrt{2}\, m$

$\phi_2 = 26.56^\circ$ $\quad L_2 = \sqrt{5}\, m.$

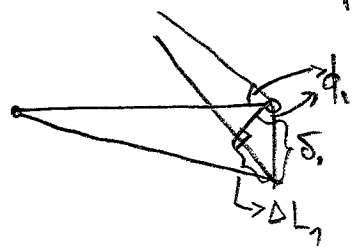


$$\left.\begin{aligned} F_{1y} &= \sin 45^\circ F_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} F_1 = 0.71 F_1 \\ F_{2y} &= \sin 26.56^\circ F_2 = 0.44 F_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow F_{1y} + 2F_{2y} = 2P \rightarrow$$

$$\boxed{0.71 F_1 + 0.88 F_2 = 2P} \quad (1)$$

Σχήμα: $\rightarrow \dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{BB'}{\Gamma\Gamma'} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\delta_1}{\delta_2} \rightarrow \boxed{\delta_2 = 2\delta_1}$ (2)



$$\sin\phi_1 = \frac{\Delta L_1}{\delta_1}, \quad \sin\phi_2 = \frac{\Delta L_2}{\delta_2}$$

$$[\Delta L_1 = 0.71\delta_1 \qquad \Delta L_2 = 0.45\delta_2] \quad (3)$$

$$\xrightarrow[(2)]{(3)} \frac{\Delta L_2}{0.45} = \frac{2\Delta L_1}{0.71} \rightarrow 2.22\Delta L_2 = 2.82\Delta L_1 \xrightarrow{\text{ν. Hooke}}$$

$2.22 \ldots$

$$\frac{F_2 L_2}{A_2 E} = 1.27 \frac{F_1 L_1}{A_1 E} \rightarrow \frac{F_2\, 2.24}{10^{-4}} = 1.27 \frac{F_1\, 1.41}{1.5 \times 10^{-4}} \rightarrow \boxed{F_2 = 0.53 F_1} \quad (4)$$

$$\xrightarrow[(1)]{(4)} \boxed{P = 0.59 F_1} \quad (5)$$

$$\frac{\sigma_{y_1}}{\sigma_{y_2}} = 1 \longrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \xrightarrow{(4)} \frac{\frac{F_1}{A_1}}{\frac{F_2}{A_2}} = \frac{\frac{F_1}{1.5 \times 10^{-4}}}{\frac{0.53 F_1}{10^{-4}}} = \frac{1}{0.795} = 1.26 \rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} > \frac{\sigma_{y_1}}{\sigma_{y_2}}$$

$\Rightarrow$ Η ράβδος (1) σπάει πρώτη.

$F_{1y} = \sigma_y A_1 = 180\times10^6 \times 1.5\times10^{-4} \rightarrow \boxed{F_{1y} = 27\,KN} \xrightarrow{④} \boxed{F_2 = 14.31\,KN}$

$\xrightarrow{⑤} \boxed{P = 15.93\,KN}$ Φορτίο διαρροής.

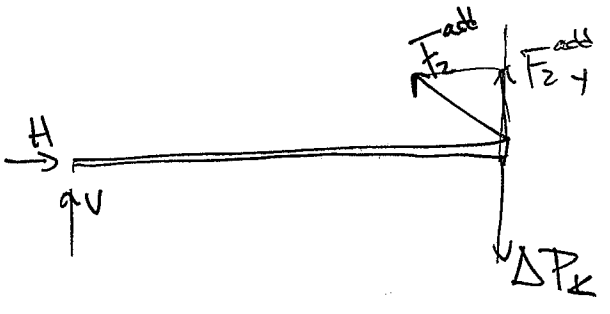
$\sigma_1 = 180\,MPa \equiv \sigma_y$

$\sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{14.31\times10^3}{10^{-4}} \rightarrow \sigma_2 \cong 143\,MPa.$

β) Για να καταρρεύσει η κατασκευή πρέπει να διαρρεύσει και η ράβδος 2. Η ράβδος 1 είναι σε ανώδυτη πλαστικότητα, επομένως έχει χάσει την φέρουσα ικανότητά της.

⇒ Θα βρούμε την επιπλέον δύναμη που απαιτείται για να αστοχήσει η 2. Η 1 λόγω πλαστικότητας δεν θα δώσει δύναμη στη δοκό.

$F_2^{add} = F_{2y} - F_2 = \sigma_y A_2 - 14.31\times10^3 = 180\times10^6\times10^{-4} - 14.31\times10^3 \rightarrow \boxed{F_2^{add} = 3.69\,KN.}$



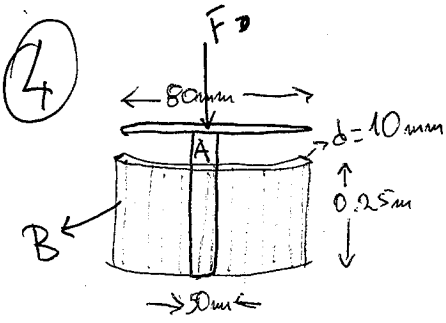
$F_{2y}^{add} = 0.44\,F_2^{add} = 1.624\,KN.$

$F_{2y}^{add} = \Delta P_k = 1.624\,KN.$

$P_k = P_\delta + \Delta P_k = 15.93 + 1.624$

$\boxed{P_k = 17.554\,KN}$

④



$E_A = 73\times10^9\,Pa$ $\quad E_B = 200\times10^9\,Pa$

$\sigma_{yA} = 120\times10^6\,Pa$ $\quad \sigma_{yB} = 250\times10^6\,Pa$

$H_A = 40\times10^9\,Pa$

$$A_A = \pi r_A^2 = \pi\frac{d_A^2}{4} = \frac{3.14}{4}\times2500\times10^{-6} \rightarrow \boxed{A_A = 1962.5\times10^{-6}\,m^2}$$

$$A_B = A_{out} - A_{in} = \frac{\pi}{4}(d_{out}^2 - d_{in}^2) = \frac{3.14}{4}\times(6400-4900)$$

$$\rightarrow \boxed{A_B = 1177.5\times10^{-6}\,m^2}$$

- $\varepsilon_{yA} = \frac{\sigma_{yA}}{E_A} = \frac{120\times10^6}{73\times10^9} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{yA} = 1.64\times10^{-3}}$
- $\varepsilon_{yB} = \frac{\sigma_{yB}}{E_B} = \frac{250\times10^6}{200\times10^9} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{yB} = 1.25\times10^{-3}}$

@ $\delta = 0.25\,mm$, $\Delta L_{yA} = \varepsilon_{yA}\cdot L_A = 1.64\times10^{-3}\times0.25 \rightarrow \Delta L_{yA} = 0.41\,mm > \delta$.

Αρχικά, θα πιέσουμε τον συμπαγή κύλινδρο Α, ώστε να καλυφθεί το διάκενο ύψους δ. Αποδείξαμε ότι το διάκενο έχει μεγαλύτερο ύψος από ~~τον ~~ ~~ύψος~~ τη βράχυνση στη διαφορά, επομένως μπορώ να χρησιμοποιήσω τον ν. Hooke.

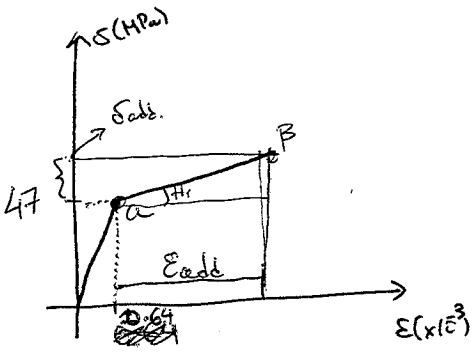
$$\rightarrow \Delta L_\delta = \varepsilon_\delta L_A \rightarrow \varepsilon_\delta = \frac{0.25\times10^{-3}}{0.25} \rightarrow \varepsilon_\delta = 10^{-3} \rightarrow \sigma_\delta = \varepsilon_\delta E_A \rightarrow \boxed{\sigma_\delta = 73\,MPa}$$

$$F_\delta = \sigma_\delta A_A \rightarrow F_\delta = 73\times\cancel{10^6}\times1962.5\times\cancel{10^{-6}} \rightarrow \boxed{F_\delta = 143.26\,kN}$$

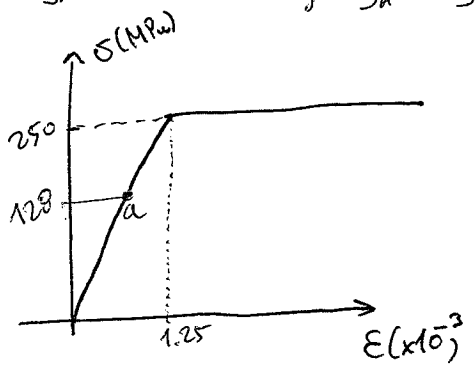
Η οποία είναι η δύναμη που απαιτείται για να κλείσει το κενό. Επομένως ο συμπαγής κύλινδρος έχει νέα τάση διαφοράς:

$$\sigma_{yA}' = \sigma_{yA} - \sigma_\delta = (120-73)\times10^6 \rightarrow \sigma_{yA}' = 47\,MPa, \quad \varepsilon_{yA}' = \varepsilon_{yA} - \varepsilon_\delta = (1.64-1)\times10^{-3}$$

$$\hookrightarrow \varepsilon_{yA}' = 0.64\times10^{-3}$$



Ⓐ



Ⓑ

Πλέον περνάμε σε υπερστατικό πρόβλημα που δίνεται από τις εξισώσεις:

$$F = F_A + F_B \rightarrow F = F_\delta + F_A' + F_B \rightarrow \boxed{F = 143.26 + F_A' + F_B.} \quad (1)$$

$(F_A = F_\delta + F_A')$

$$\Delta L_A = \Delta L_B \rightarrow \frac{F_A' L}{A_A E_A} = \frac{F_B L}{A_B E_B} \rightarrow \frac{F_A'}{1962.5\times10^{-6}\times73\times10^{9}} = \frac{F_B}{1177.5\times10^{-6}\times200\times10^{9}} \rightarrow \frac{F_A'}{143262.5} = \frac{F_B}{235500}$$

$$\rightarrow \boxed{F_A' = 0.61 F_B} \quad (2) \qquad \frac{\sigma_{yA}'}{\sigma_{yB}} = \frac{47\times10^{6}}{250\times10^{6}} = \underline{0.188}, \quad \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{\frac{F_A}{A_A}}{\frac{F_B}{A_B}} \xrightarrow[A_A=\dots,\ A_B=\dots]{(2)} \dots = \underline{0.366}$$

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_B} > \frac{\sigma_{yA}'}{\sigma_{yB}} \rightarrow$$ Ο κύλινδρος Α αστοχήσει πρώτος.

$$\sigma_{yA}' = 47\times10^{6} \rightarrow F_{yA}' = 47\times10^{6}\times1962.5\times10^{-6} \rightarrow \boxed{F_{yA}' = 92.24\ KN.} \equiv F_A'$$

Η οποία είναι η επιπλέον δύναμη που πρέπει να ασκήσουμε για να αστοχήσει ο 1.

$$F_B = \frac{92.24}{0.61} \rightarrow \underline{F_B = 151.21\ KN} \rightarrow \sigma_B = \frac{F_B}{A_B} = \frac{151.21\times10^{3}}{1177.5\times10^{-6}} \rightarrow \underline{\sigma_B = 128\ MPa.}$$

$$\hookrightarrow \underline{\sigma_A \equiv \sigma_{yA}' = 47\ MPa.}$$

$$\xrightarrow{(1)} F = 143.26 + 92.24 + 151.21 \rightarrow \boxed{F_{max} = 386.71\ KN}$$

(β) $F' = 1.2 \times F_{max} \rightarrow \boxed{F' = 464.05\ KN}$

$$F' = F_A'' + F_B' \rightarrow \cancel{F_{max}}\ F$$

$$\hookrightarrow F_A'' = 143.26 + 92.24 = 235.5 + F_A^B$$

$$F_B' = 151.21 + F_B^B$$

$$\Big\} \quad F' = 235.5 + F_A^B + 151.21 + F_B^B$$

$$\boxed{F' = 386.71 + F_A^B + F_B^B} \quad (3)$$

$$\Delta L_A = \Delta L_B \rightarrow \Delta L_A = \frac{F_B^B L}{A_B E_B}$$

$$\Delta L_A = \varepsilon_A' L$$

$$\Big\} \rightarrow \boxed{\varepsilon_A' = \frac{F_B^B}{A_B E_B}} \quad (4) \xrightarrow{\text{Βλέπε διάγραμμα.}}$$

(¡ $\Delta L_A \neq \frac{F_A^B L}{A_A E_A}$!, Δεν ισχύει πλέον ο ν. Hooke)

ΒΔ. διάγραμμα σ-ε.

$$\varepsilon_A' = \varepsilon_{add} \rightsquigarrow \varepsilon_{add} = \frac{\sigma_{add}}{H_A} \quad \left(\sigma_{add} = \frac{F_A^B}{A_A}\right) \longrightarrow \varepsilon_{add} = \frac{F_A^B}{H_A A_A} \quad (4)$$

$$\varepsilon_A' = \left(\frac{F_A^B}{H_A A_A}\right) = \left(\frac{F_B^B}{A_B E_B}\right) \rightsquigarrow \frac{F_A^B}{40\times 1962.5\times 10^9\times 10^{-6}} = \frac{F_B^B}{1177.5\times 10^{-6}\times 200\times 10^9} \rightsquigarrow \boxed{F_B^B = 3F_A^B} \quad (5)$$

$$\xrightarrow[(5)]{(3)} F' = 386.71 + 4F_A^B \quad F' = 464.05 \longrightarrow 464.05 - 386.71 = 4F_A^B$$

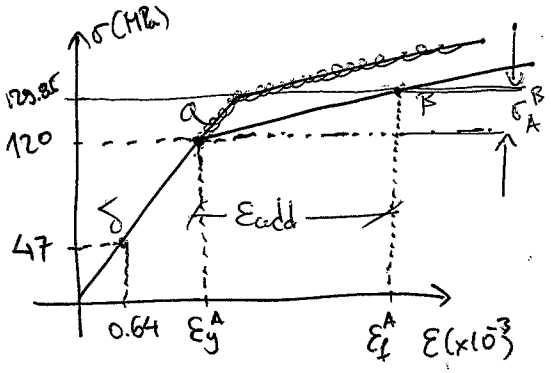
$$F_A^B = 19.34\,kN \quad \downarrow \sigma_A^B = F_A^B/A_A$$

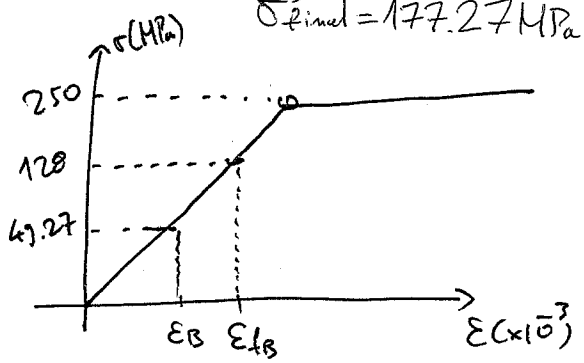
$$\sigma_A^B = 9.85\,MPa \hookrightarrow \sigma_{final}^A = \sigma_A^B + \sigma_y^A = 129.85\,MPa$$

$$(5) \longrightarrow F_B^B = 58.02\,kN \quad \downarrow \sigma_B^B = F_B^B/A_B$$

$$\sigma_B^B = 49.27\,MPa \hookrightarrow \sigma_{final}^B = \sigma_B^B + \sigma_B = 49.27 + 128$$

$$\sigma_{final}^B = 177.27\,MPa < \sigma_y^B$$





$$\varepsilon_{add} = \frac{\sigma_{add}}{H_A} = \frac{\sigma_A^B}{H_A} = \frac{9.85\times 10^6}{40\times 10^9} = 0.24\times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_f^A = \varepsilon_y^A + \varepsilon_{add} = (1.64 + 0.24)\times 10^{-3} \quad \boxed{\varepsilon_f^A = 1.88\times 10^{-3}}$$

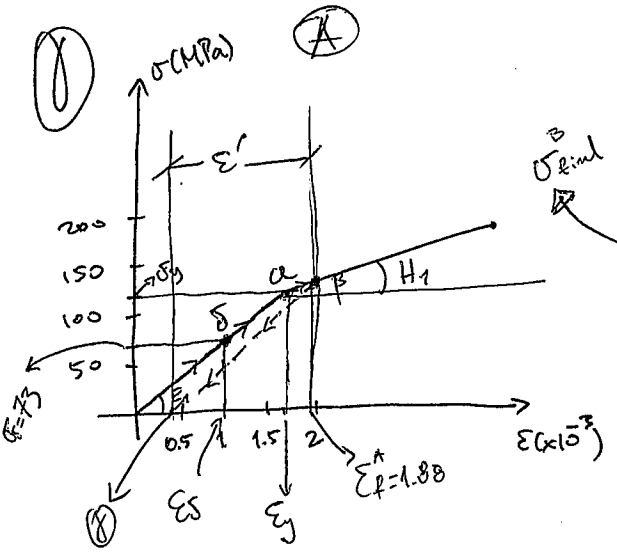
Προσοχή! $\varepsilon_f^A \neq \varepsilon_f^B$ Καθώς ο Α είναι προεντεταμένος. (Τα L είναι ίδια)

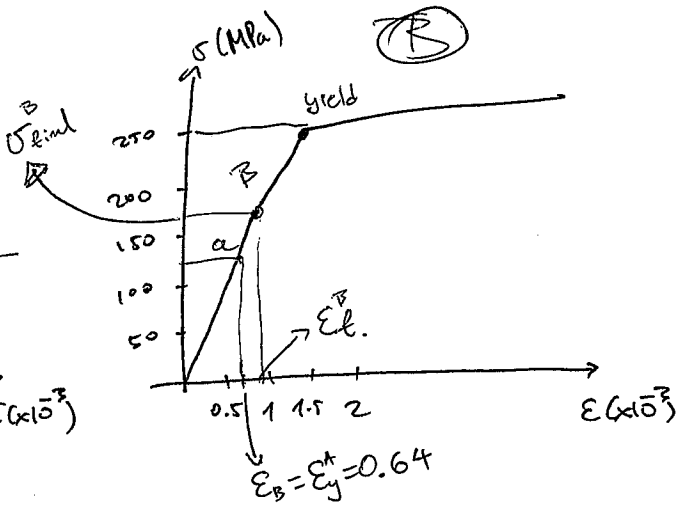
Στο εφώμμα (a) $\varepsilon_\beta = \frac{\sigma_B}{E_B} = \frac{128\times 10^6}{200\times 10^9} = 0.64\times 10^{-3} = \varepsilon_{yA}'$

$$\varepsilon_f^B = \varepsilon_{add} + \varepsilon_\beta \longrightarrow \varepsilon_f^B = (0.24 + 0.64)\times 10^{-3} \rightarrow \boxed{\varepsilon_f^B = 0.88\times 10^{-3}} < \varepsilon_y^B$$

Ίδιο και γιά τα δύο δοκίμια αφού συνδέεται σε παραλληλόγραμμο μετά το "κλείσιμο" του διάκενου.

γ





• Συνήθως, σε ένα υπερστατικό πρόβλημα, δεν μπορούμε απλά να αποφορτίσουμε το σύστημα καθώς οι παραμορφώσεις τους αλληλοεξαρτώνται.

Εν προκειμένω, δεν ισχύει κάτι τέτοιο, καθώς <u>ο εσωτερικός κύλινδρος Α δεν είναι παχυτοίχος με τον Β.</u>

⟹ Θα αφαιρέσουμε τη φόρτιση απλά και θα βρούμε την παραμένουσα παραμόρφωση που θα έχει ο κύλινδρος Α.

✓ Αν η παραμένουσα παραμόρφωση είναι μικρότερη του διάκενου, τότε δεν υπάρχει πρόβλημα, καθώς θα "ανοίξει το κανάλι" και ο Α θα αποφορτισθεί ελεύθερα.

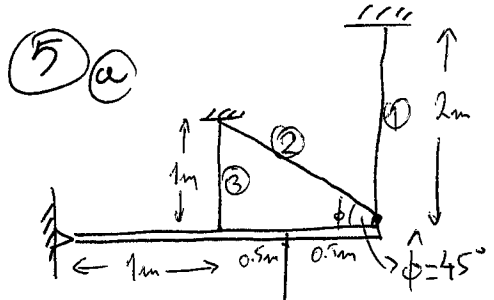
✓ Αν η παραμένουσα παραμόρφωση του Α είναι μεγαλύτερη του δ ($\varepsilon^A_{rem} > \varepsilon_\delta$) τότε είναι πιο περίπλοκα τα πράγματα, καθώς ο εξωτερικός κύλινδρος που θέλει να αποφορτισθεί πλήρως, δεν θα μπορεί, καθώς ο εσωτερικός θα του εμποδίζει.

$$\Longrightarrow \sigma^A_{final} = 129.85\times10^6\,Pa \longrightarrow \varepsilon' = \frac{129.85\times10^6}{73\times10^9} = 1.78\times10^{-3}$$

$$\varepsilon^A_f = 1.88\times10^{-3} \longrightarrow \left[\varepsilon^A_{rem} = \varepsilon^A_f - \varepsilon' = 0.1\times10^{-3}.\right] \Longrightarrow \text{Ο κύλινδρος Β}$$

επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση, το διάκενο ανοίγει και ο Α έχει παραμένουσα παραμόρφωση ίση με ε^A_{rem}. ($\varepsilon^A_{rem} < \varepsilon_\delta$) ■

5 a



$E=180\,GPa$

$\sigma_{y_{1,2}}=180\,MPa$

$\sigma_{y_3}=270\,MPa$

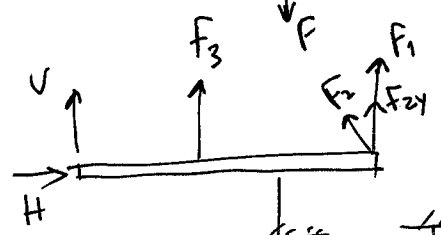
$A_1=A_2=40\times10^{-6}\,m^2$

$A_3=30\times10^{-6}\,m^2$

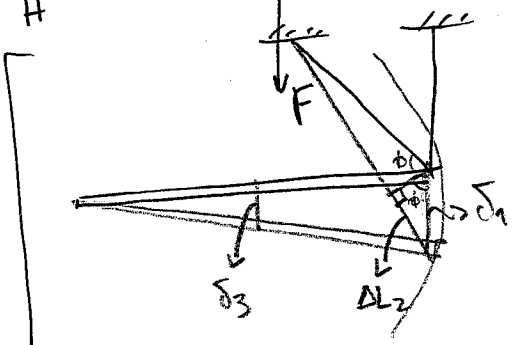
$L_1=2m$

$L_2=\dots=1.12m$

$L_3=1m$



$F_{2y}=\frac{\sqrt{2}}{2}F_2 \longrightarrow \boxed{1.5F=F_3+F_1+\sqrt{2}F_2}$ (1)



$\delta_1=2\delta_3$

$\Delta L_2=\sin\phi\,\delta_1$

$\delta_1\equiv\Delta L_1$

$\delta_3=\Delta L_3$

$\Delta L_1=2\Delta L_3$ (A)

$\Delta L_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta L_1 \rightarrow \Delta L_2=\sqrt{2}\Delta L_3$

Οι (A) είναι οι γραμμικές εξισώσεις που ισχύουν για όλο το πρόβλημα

- $\Delta L_1=2\Delta L_3 \rightarrow \frac{F_1L_1}{A_1E}=2\frac{F_3L_3}{A_3E} \rightarrow \frac{F_1\cdot 2}{40\times10^{-6}}=2\frac{F_3\cdot 1}{30\times10^{-6}} \rightarrow [F_1=1.33F_3] \leftarrow$
- $\Delta L_2=\sqrt{2}\Delta L_3 \rightarrow \frac{F_2L_2}{A_2E}=\sqrt{2}\frac{F_3L_3}{A_3E} \rightarrow \frac{F_2\times1.12}{40\times10^{-6}}=\sqrt{2}\frac{F_3\times1}{30\times10^{-6}} \rightarrow \frac{1.12F_2}{40}=\frac{1.41F_3}{30}$

$[F_2=1.68F_3] \leftarrow$

$[F_1=0.79F_2] \leftarrow$ (3)

$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}=\frac{\frac{F_1}{A_1}}{\frac{F_2}{A_2}}=\frac{0.79F_2}{F_2}=\boxed{0.79}$

$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}}=\frac{\frac{F_1}{A_1}}{\frac{F_3}{A_3}}=\frac{F_1A_3}{F_3A_1}=\frac{1.33F_3\times30\times10^{-6}}{F_3\times40\times10^{-6}}=\boxed{1}$

$\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=\frac{\frac{F_2}{A_2}}{\frac{F_3}{A_3}}=\frac{1.68F_3\times3}{F_3\times4}=\boxed{1.26}$

$\frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{2y}}=1 \quad \frac{\sigma_{2y}}{\sigma_{3y}}=\frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{3y}}=0.67$

$\rightsquigarrow\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}-\frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{3y}}\right)=1-0.67=0.33=A$

$\rightsquigarrow\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}-\frac{\sigma_{2y}}{\sigma_{3y}}\right)=1.26-0.67=0.59=B$

$\rightsquigarrow\cancel{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}-\frac{\sigma_{1y}}{\sigma_{2y}}\right)=0.79-1=-0.21=C}$

$\rightsquigarrow\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-\frac{\sigma_{2y}}{\sigma_{1y}}\right)=1.26-1=0.26=C$ (11)

$B>A>C$

Η (2) αστοχεί πρώτη.

$F_2 = F_{2y} \rightarrow F_{2y} = \sigma_{2y} A_2 = 180\times10^6 \times 40\times10^{-6} \rightarrow F_2 = 7.2\,KN$ ③ $\Rightarrow$ $F_3 = 4.28\,KN$

$F_1 = 5.69\,KN$

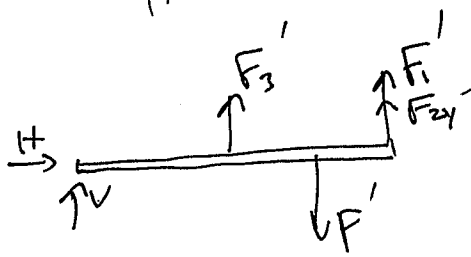
$F_1 = 5.69\,KN \xrightarrow{\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1}} \sigma_1 \cong 142\,MPa < \sigma_{1y} \xrightarrow{\sigma_i = \varepsilon_i E} \varepsilon_1 = 0.79\times10^{-3}$

$F_2 = 7.2\,KN \xrightarrow{\sigma_2 = \frac{F_2}{A_2}} \sigma_2 = \sigma_{2y} = 180\,MPa \longrightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_{2y} = 0.1\times10^{-3}$

$F_3 = 4.28\,KN \xrightarrow{\sigma_3 = \frac{F_3}{A_3}} \sigma_3 \cong 143\,MPa < \sigma_{y3} \longrightarrow \varepsilon_3 = 0.79\times10^{-3}$

$$F_a = \frac{F_3 + 2F_1 + \sqrt{2}F_2}{1.5} \rightarrow \boxed{F_a = 17.21\,KN}$$

(β) Από τη στιγμή που αυξάνουμε επιπλέον την Fa, η 2 θα χάσει τη φέρουσα ικανότητά της, επειδή περνάει σε περιοχή απόλυτης πλαστικότητας. Επομένως δεν παραλαμβάνει επιπλέον φορτία.



$F_{2y}' = F_{2y}$

$$F_3' + 2F_1' + \sqrt{2}F_2 = 1.5F'$$

$$\boxed{F_3' + 2F_1' + 10.15 = 1.5F'}$$ ②

$$\Delta L_1' = 2\Delta L_3' \rightarrow \frac{F_1' L_1}{A_1 E} = 2\frac{F_3' L_3}{A_3 E} \rightarrow \frac{2F_1'}{40\times10^{-6}} = \frac{2F_3' 1}{30\times10^{-6}} \rightarrow \boxed{F_3' = 0.75F_1'}$$ ④

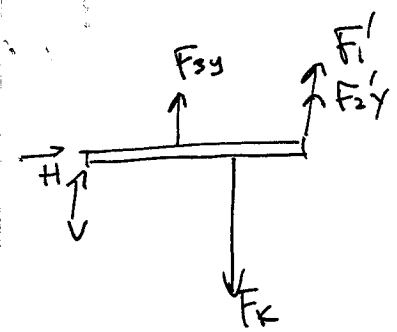
$$\frac{\sigma_3'}{\sigma_1'} \rightsquigarrow \left(\frac{\frac{F_3'}{A_3}}{\frac{F_1'}{A_1}}\right) = \frac{A_1 F_3'}{A_3 F_1'} = \frac{40}{3}\,\frac{0.75F_1'}{F_1'} \rightarrow \frac{\sigma_3'}{\sigma_1'} = 1 \qquad \frac{\sigma_{3y} - \sigma_3}{\sigma_{1y} - \sigma_1} = \frac{270 - 143}{180 - 142} = \frac{127}{38} \cong 3.34$$

$\rightarrow$ Η ① αστοχεί. $F_1 = F_{1y} = 7.2\,KN \Rightarrow \sigma_1' = \sigma_{1y} = 180\,MPa \xrightarrow{\sigma = \varepsilon E} \varepsilon_1' = 10^{-3}$

$F_2 = 7.2\,KN \rightarrow \sigma_2' = \sigma_{2y} = 180\,MPa \rightarrow \varepsilon_2' = ? \rightarrow \Delta L_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta L_1 \rightarrow \varepsilon_2 L_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1 L_1 \rightarrow \boxed{\varepsilon_2' = 1.23\times10^{-3}}$

$\xrightarrow[4]{F_1 = 7.2} F_3 = 5.4\,KN \rightarrow \sigma_3' = 180\,MPa \xrightarrow{\sigma = \varepsilon E} \varepsilon_3' = 10^{-3}$

$\rightsquigarrow$ Αν αυξηθεί και άλλο η δύναμη, τότε πάνω η ράβδος 3, θα παραλαμβάνει ~~δύναμη~~ φορτία $\Longrightarrow$



$$F_3'' + 2F_1'' + \sqrt{2}F_2'' = 1.5F_K \longrightarrow \begin{matrix} F_1'' = F_{1y} \\ F_2'' = F_{2y} \end{matrix}$$

$$F_3'' + 2\times 7.2 + \sqrt{2}\times 7.2 = 1.5F_K.$$

$$F_3'' + 24.55 = 1.5F_K. \longrightarrow F_3'' = F_{y_3} = \frac{270\times 10^{6}}{30\times 10^{6}}$$

$$\hookrightarrow F_{y_3} = 8.1\,KN$$

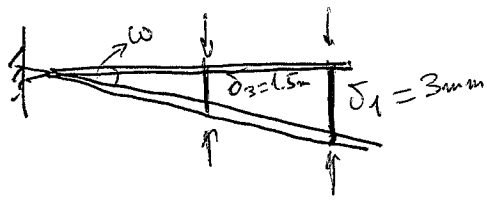
$$\rightarrow 8.1 + 24.55 = 1.5F_K. \longrightarrow \boxed{F_K = 21.77\,KN}$$

(1) $F_{y3} = 8.1\,KN \rightarrow \sigma_3 = 270\,MPa \xrightarrow{\varepsilon_{3y} = \frac{\sigma_3}{E}} \varepsilon_{3y} = 1.5\times 10^{-3}$

(A) $\varepsilon_1'' L_1 = 2\varepsilon_{3y} L_3 \rightarrow \cancel{2}\varepsilon_{1t} = \cancel{2}\varepsilon_{3y}\,1 \rightarrow \varepsilon_{1t} = \varepsilon_{3y} = 1.5\times 10^{-3}$

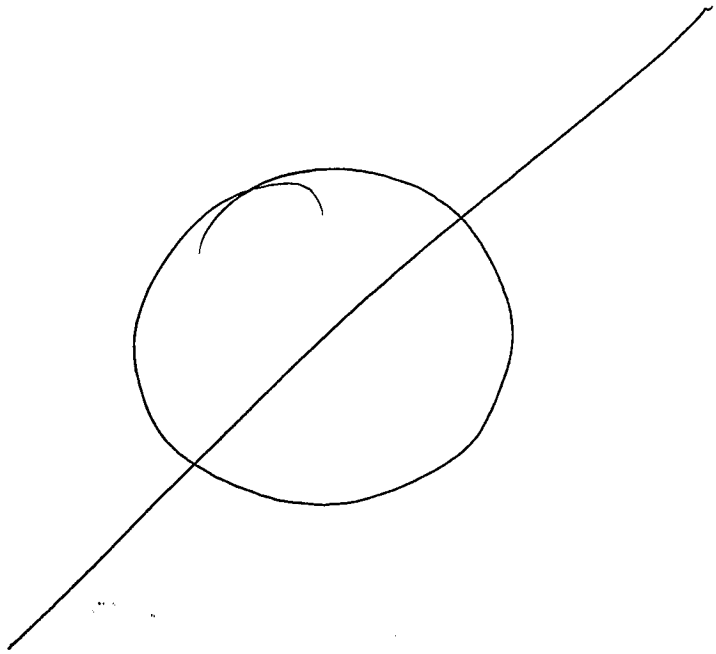
$\varepsilon_{2t} L_2 = \sqrt{2}\varepsilon_{3y} L_3 \rightarrow \varepsilon_{2t}\times 1.12 = \sqrt{2}\times 1.5\times 10^{-3}\times 1 \rightarrow \varepsilon_{2t} = 1.89\times 10^{-3}$

$$\left[\begin{matrix} \rightsquigarrow \Delta L_3 \equiv \delta_3 \;\; \Delta L_3 = \varepsilon_{3y} L_3 = 1.5\times 10^{-3} = \delta_3 \\ \delta_1 = 2\delta_3 = 3\times 10^{-3}. \end{matrix}\right]$$

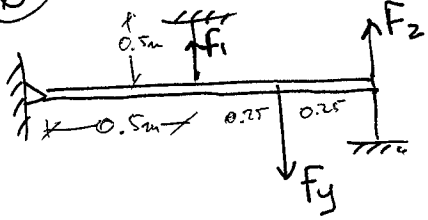


$\cancel{\omega = \frac{3\times 10^{-3}}{2}}$ $\quad \omega = \arctan\left(\frac{3\times 10^{-3}}{2}\right)$

$$\boxed{\hat{\omega} = 0.086^{\circ}}$$



⑥



$A_1 = A_2 = 50\times10^{-6}\,m^2$

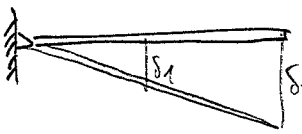
$E_1 = 200\,GPa$

$E_2 = 150\,GPa$, $H_2 = 50\,GPa$

$\sigma_{y2} = 250\,MPa \rightarrow \varepsilon_{y2} = \frac{\sigma_{y2}}{E_2} \Rightarrow \varepsilon_{y2} = 1.67\times10^{-3}$

ⓐ Αρχικά θα βρούμε την δύναμη που απαιτείται για να προκαλέσει αστοχία στη ράβδο 2.

$F_{y2} = \sigma_{y2} A_2 = 250\times10^{6}\times50\times10^{-6} \rightsquigarrow \boxed{F_{y2} = 12.5\,KN}$



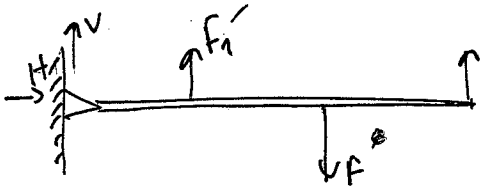
$\rightarrow \delta_2 = 2\delta_1 \rightarrow \Delta L_2 = 2\Delta L_1 \xrightarrow{\text{v. Hooke}} \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} = \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1}$

$\frac{F_2\, 0.25}{150\times10^{9}} = \frac{F_1\, 0.5}{200\times10^{9}} \rightarrow \frac{F_2}{600\times10^{9}} = \frac{F_1}{400\times10^{9}} \rightarrow \boxed{F_1 = \frac{2}{3}F_2}$ ①

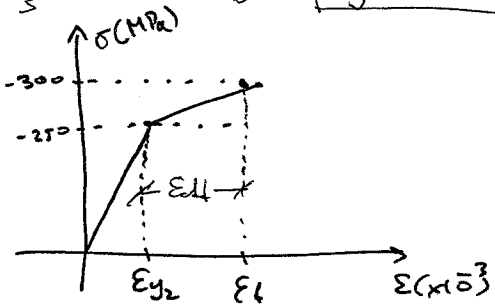
$F_{y2} = 12.5\,KN \rightarrow F_1 = \frac{25}{3}\,KN$

$\rightarrow F_1 = 8.33\,KN$, $F_2 = 12.5\,KN$

$\Sigma M = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}F_1 + F_2 = \frac{3}{4}F_y \rightarrow 2F_1 + 4F_2 = 3F_y \rightarrow \frac{50}{3} + 50 = 3F_y \rightarrow \boxed{F_y = 22.22\,KN}$



$\rightsquigarrow \boxed{2F_1' + 4F_2' = 3F}$ ②



$\sigma' = 0.2\sigma_{y2} + \sigma_{y2} \rightarrow \sigma_2' = 300\,MPa$

$\varepsilon_{edd} = \frac{\Delta\sigma}{H_2} = \frac{50\times10^{6}}{50\times10^{9}} \Rightarrow \varepsilon_{edd} = 10^{-3} \rightarrow \varepsilon_f = 2.67\times10^{-3}$

$\Delta L_2 = 2\Delta L_1 \rightsquigarrow \Delta L_2 = 2\frac{\Delta F_1 L_1}{A_1 E_1} \rightsquigarrow \varepsilon_{edd} L_1 = \frac{2\Delta F_1 L_1}{A_1 E_1} \rightsquigarrow \varepsilon_{edd}\frac{1}{4} = \frac{\Delta F_1}{50\times10^{-6}\times200\times10^{3}}$

$\rightarrow \boxed{\Delta F_1 = 2.5\,KN}$

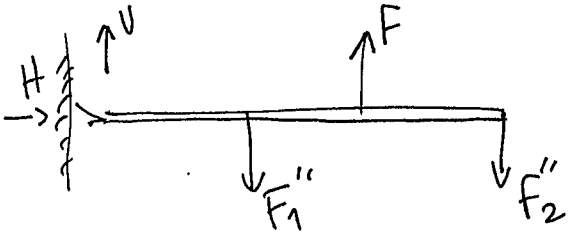
$\rightarrow F_1' = F_1 + \Delta F_1 \rightarrow \boxed{F_1' = 10.83\,KN} \rightarrow \begin{cases}\sigma_1 = 217\,MPa\\ \varepsilon_1 = 1.085\times10^{-3}\end{cases}$

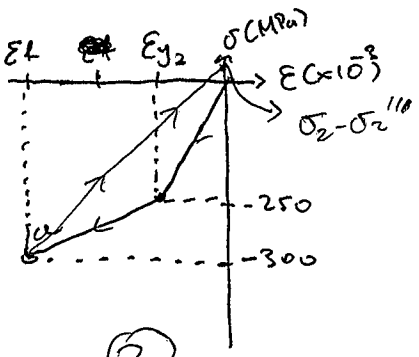
$\rightarrow F_2' = \sigma_2' A_2 = 300\times10^{6}\times50\times10^{-6} \rightarrow \boxed{F_2' = 15\,KN} \rightarrow \begin{cases}\sigma_2' = 300\,MPa\\ \varepsilon_f = 2.67\times10^{-3}\end{cases}$

$\xrightarrow{②} 2\times(10.83) + 4\times15 = 3F \rightarrow \boxed{F = 27.22\,KN}$

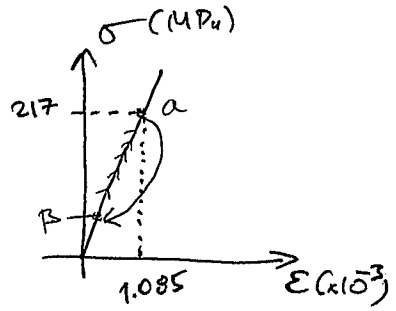
(β) Έχουμε να κάνουμε με υπερστατικό πρόβλημα στο οποίο υπάρχει αλληλεξάρτηση των επιμηκύνσεων για φόρτιση οποιαδήποτε φοράς. (Αντίθετα με την Άσκηση 4).

⟹ Θα ασχήσουμε για εφελκυστική δύναμη τέτοιου F.





(2)



(1)

$F = 27.22\,KN$

$2F_1'' + 4F_2'' = 3F \rightarrow \boxed{2F_1'' + 4F_2'' = 81.66}$ (3)

⟹ Η σχέση (1) ισχύει, καθώς κατά τον εφελκυσμό, η 2 θα ακολουθήσει την ελαστική γραμμή, υπακούοντας στο νόμο του Hooke.

$F_1 = \frac{2}{3}F_2 \xrightarrow{(3)} \frac{4}{3}F_2'' + 4F_2'' = 81.66 \rightarrow 4F_2'' + 12F_2'' = 245 \rightarrow F_2'' = 15.31\,KN$

$F_1'' = 10.21\,KN.$

$F_2'' = 15.31\,KN. \xrightarrow{\sigma_2'' = \frac{F_2''}{A_2}} \sigma_2'' = \frac{15.31 \times 10^3}{50 \times 10^{-6}} \rightarrow \boxed{\sigma_2'' \cong 306\,MPa}$

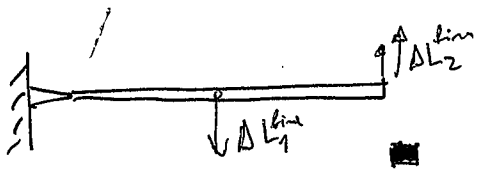
$F_1'' = 10.21\,KN \longrightarrow \sigma_1'' = \frac{10.21 \times 10^3}{50 \times 10^{-6}} \rightarrow \boxed{\sigma_1'' \cong 204\,MPa}$

- Επομένως $\sigma_2 - \sigma_2'' = -6\,MPa. \Rightarrow$ Η ράβδος 2 θα βρίσκεται πλέον υπό εφελκυσμό. $\sigma_{final,2} = \varepsilon_{t,2} E_2 \rightarrow \varepsilon_{t,2} = \frac{6 \times 10^6}{150 \times 10^9} \rightarrow \cancel{\varepsilon_{t,2} = 12 \times 10} \; \boxed{\varepsilon_{t,2} = 0.04 \times 10^{-3}}$

- Ενώ $\sigma_1 - \sigma_1'' = 217 - 204 = 13\,MPa \Rightarrow$ Η ράβδος 1 θα βρίσκεται και αυτή υπό εφελκυσμό. $\sigma_{final,1} = \varepsilon_{t,1} E_1 \rightarrow \varepsilon_{t,1} = \frac{13 \times 10^6}{200 \times 10^9} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{t,1} = 0.065 \times 10^{-3}}$

$\Delta L_2^{final} = \varepsilon_{t,2} L_2 = 0.04 \times 10^{-3} \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{\Delta L_2^{final} = 0.01\,mm}$

$\Delta L_1^{final} = \varepsilon_{t,1} L_1 = 0.065 \times 10^{-3} \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\Delta L_1^{final} = 0.0325\,mm}$



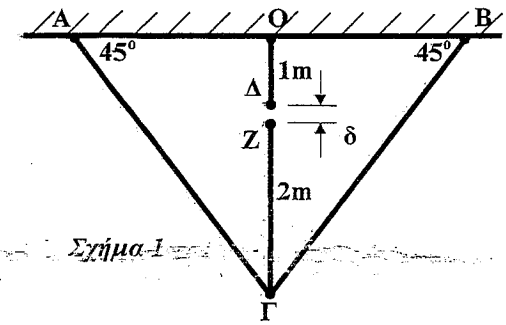
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ)

5η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΑΥΤΕΝΤΑΤΙΚΑ ΑΞΟΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Άσκηση 1

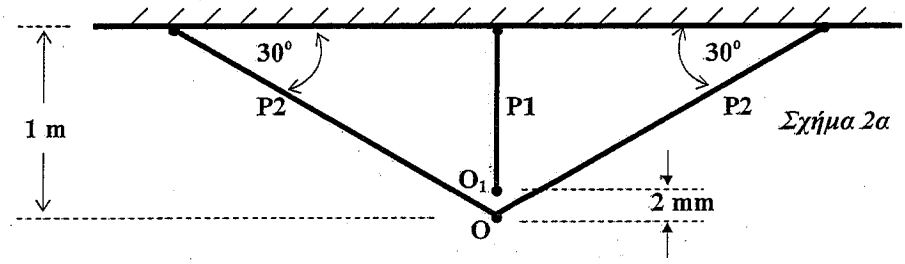


Σχήμα 1

Κατά τη συναρμολόγηση της κατασκευής του Σχ.1 διαπιστώθηκε ότι το σημείο Δ δεν ταυτίζεται με το σημείο Z, αλλά απέχει από αυτό απόσταση δ. Όλες οι ράβδοι κατασκευάσθηκαν από το ίδιο όλκιμο γραμμικώς ελαστικό υλικό, μέτρου ελαστικότητας $E=2x10^{11}$ Pa και τάσεως διαρροής $\sigma_\Delta=200$ MPa. Οι ράβδοι ΟΔ και ΖΓ έχουν διατομή εμβαδού $S=1\ cm^2$ οι δε ΑΓ και ΒΓ $S'=2cm^2$. Με μηχανικό "εξαναγκασμό" οι κόμβοι Δ και Z συγκολλήθηκαν με αποτέλεσμα η κατασκευή να ευρεθεί σε "*αυτεντατική*" κατάσταση. Θεωρώντας δ<<1 m:

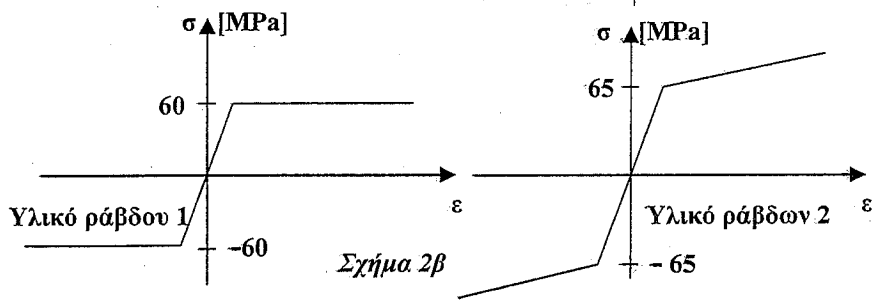
α. Να εκφρασθούν οι τάσεις στις ράβδους συναρτήσει του δ.
β. Να υπολογισθεί η μέγιστη επιτρεπτή τιμή του δ ώστε να μην επέλθει αστοχία κάποιας ράβδου.

Άσκηση 2



Σχήμα 2α

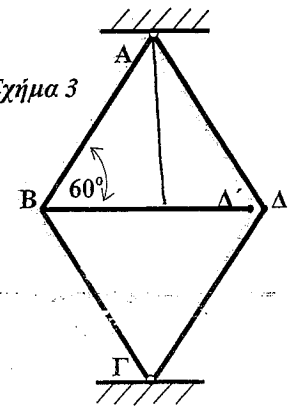
Στη συναρμόλογηση της κατασκευής του Σχ.2α διαπιστώθηκε ότι η ράβδος P1 είναι μικρότερη κατά 2 mm από την ορθή διάσταση. Κατόπιν τούτου τα σημεία O_1, O εξαναγκάσθηκαν να έρθουν σε επαφή, συγκολλήθηκαν και η κατασκευή αφέθηκε να ισορροπήσει. Όλες οι ράβδοι έχουν εμβαδόν διατομής $1\ cm^2$ και μέτρο ελαστικότητας 100 GPa. Τα διαγράμματα σ-ε των υλικών των ράβδων φαίνονται στο Σχ.2β.



Σχήμα 2β

α. Να ευρεθούν οι τάσεις στις ράβδους στην κατάσταση ισορροπίας μετά τη συγκόλληση των O_1, O.
β. Στη συνέχεια στο σημείο O εφαρμόζεται κατακόρυφη δύναμη P προς τα κάτω. Να ευρεθεί η τιμή της P που θα προκαλέσει την πρώτη αστοχία και η τιμή της P που θα προκαλέσει αστοχία όλων των ράβδων.
γ. Η εξωτερική δύναμη αφαιρείται. Να ευρεθούν οι τάσεις στις ράβδους και η τελική θέση του σημείου O.

Άσκηση 3



Σχήμα 3

Κατά την κατασκευή του δικτυώματος του Σχ.3 διαπιστώθηκε ότι η ράβδος ΒΔ είναι βραχύτερη του ονομαστικού της μήκους κατά 2 mm. Όλες οι ράβδοι του δικτυώματος έχουν το ίδιο εμβαδόν εγκάρσιας διατομής $A= 1.2\ cm^2$ και είναι κατασκευασμένες από γραμμικώς ελαστικό υλικό μέτρου ελαστικότητας $E=2x10^{11}$ Pa. Οι ράβδοι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ είναι ισομήκεις μήκους L=2 m. Να υπολογισθούν οι τάσεις σε όλες τις ράβδους μετά τη συγκόλληση των σημείων Δ΄ και Δ.

Άσκηση 4

Η άκαμπτη δοκός ΑΒ στηρίζεται οριζόντια με διάταξη ράβδων (Σχ.4). Οι ράβδοι ΑΓ, ΑΟ΄, ΒΟ΄, ΒΔ είναι ισομηκεις, με εμβαδόν διατομής $A=1\ cm^2$, από γραμμικώς ελαστικό-απολύτως πλαστικό υλικό μέτρου ελαστικότητας $E=2x10^{11}$ Pa και τάσεως διαρροής $\sigma_\Delta = 250$ MPa. Η ράβδος ΟΕ έχει εμβαδόν διατομής $1.5\ cm^2$ και είναι

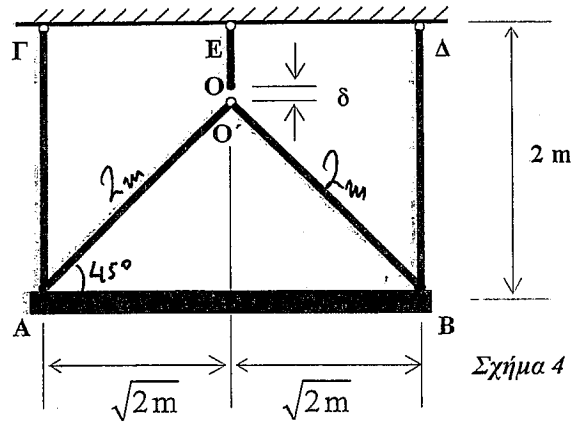
από γραμμικώς ελαστικό-απολύτως πλαστικό υλικό μέτρου ελαστικότητας $E=1.5x10^{11}$ Pa και τάσεως διαρροής $\sigma_\Delta=160$ MPa. Κατά τη συναρμολόγηση διεπιστώθη ότι η ΟΕ είναι βραχύτερη του δέοντος κατά δ=1.5 mm. Με "εξαναγκασμό" οι κόμβοι Ο και Ο΄ συγκολλήθηκαν και η κατασκευή ευρέθηκε σε "*αυτεντατική*" κατάσταση.

α. Να υπολογισθούν οι τάσεις στις ράβδους.

β. Στο μέσον της ΑΒ ασκείται κατακόρυφη δύναμη F προς τα κάτω. Να υπολογισθεί:

β_1. Η τιμή της F που θα προκαλέσει την πρώτη αστοχία και η θέση της ΑΒ για το ως άνω φορτίο

β_2. Είναι δυνατή η περαιτέρω αύξηση του φορτίου; Αν ναι να υπολογισθεί η ανώτερη επιτρεπτή τιμή της F.



Σχήμα 4

Άσκηση 5

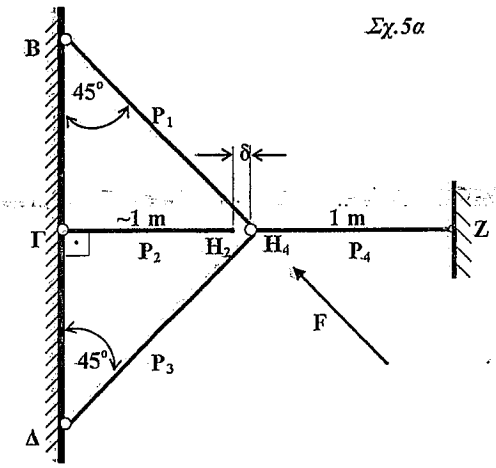
Κατά την συναρμολόγηση της κατασκευής του Σχ.5α διαπιστώθηκε ότι η ράβδος P_2 είναι μικρότερη κατά δ=2 mm της ονομαστική της διάστασης (L_{ov}=1 m). Με καταναγκασμό τα σημεία H_2 και H_4 ήρθαν σε επαφή και συνδέθηκαν αρθρωτά με τις υπόλοιπες ράβδους. Το εμβαδόν διατομής όλων των ράβδων είναι 1 cm^2. Οι ράβδοι P_1, P_2 και P_3 είναι χαλύβδινες (γραμμικώς ελαστικό-κρατυνόμενο υλικό) με μέτρο ελαστικότητας E=200GPa και τάση διαρροής 250MPa (Σχ.5β). Η ράβδος P_4 είναι από χυτοσίδηρο (ψαθυρό, γραμμικά ελαστικό υλικό μέχρι την θραύση) με μέτρο ελαστικότητας E= 200 GPa και τάση θραύσεως σε εφελκυσμό 220 MPa (Σχ.5γ).

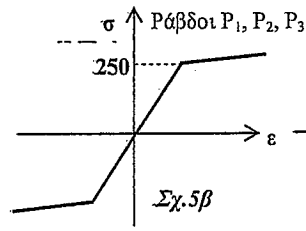
α. Υπολογίστε τις τάσεις των τεσσάρων ράβδων στην αυτεντατική κατάσταση ισορροπίας μετά τη συνάρθρωση.

β. Στη συνέχεια στο σημείο συναρθρώσεως Η ασκείται δύναμη F κατά τη διεύθυνση της ράβδου P_1 (Σχ.5α). Υπολογίστε τις τάσεις στις ράβδους, συναρτήσει της F.

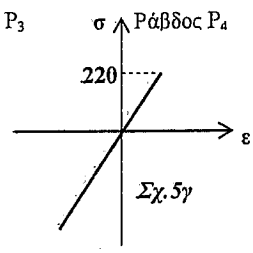
γ. Η τιμή της F αυξάνεται μέχρις ότου αστοχήσει κάποια ράβδος. Υποδείξτε την ράβδο που θα αστοχήσει πρώτη και υπολογίστε την τιμή της δύναμης F τη στιγμή εκείνη.

δ. Χωρίς επί πλέον υπολογισμούς δικαιολογήστε γιατί αμέσως μετά την πρώτη αστοχία θα επέλθει αστοχία και άλλης ράβδου. Ποια θα είναι η ράβδος αυτή;





Σχ.5β



Σχ.5γ

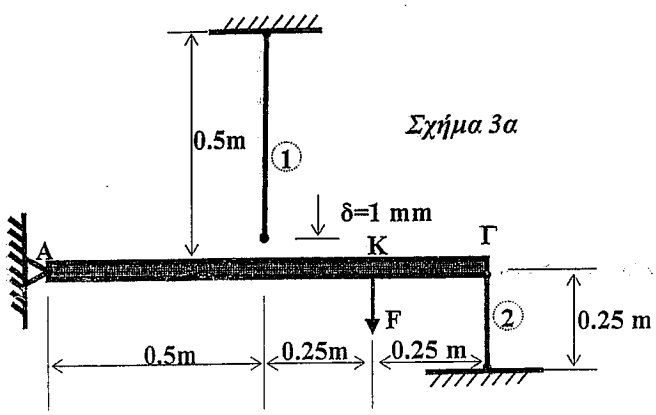
Άσκηση 6

Ακαμπτη και αβαρής δοκός ΑΓ θα στηριχθεί οριζόντια με τη βοήθεια άρθρωσης και δύο κατακόρυφων ράβδων (Σχ.6α) εμβαδού διατομής $A_1=A_2=50$ mm^2. Από κατασκευαστικό σφάλμα η ράβδος (2) μορφοποιήθηκε κατά δ=1mm μικρότερη του δέοντος. Το υλικό της (1) είναι γραμμικώς ελαστικό (E_1=200GPa) ενώ της (2) γραμμικώς ελαστικό-γραμμικώς κρατυνόμενο (E_2=150GPa, H_2=50GPa) (Σχ.6β).

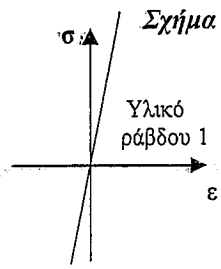
α. Να υπολογιστεί η θέση της δοκού ΑΓ μετά τη συγκόλληση της (1) επ' αυτής καθώς και οι τάσεις που αναπτύσσονται στις ράβδους (1) και (2).

β. Στο σημείο Κ ασκείται κατακόρυφη δύναμη F. Να ευρεθεί η τιμή της F που θα προκαλέσει αστοχία.

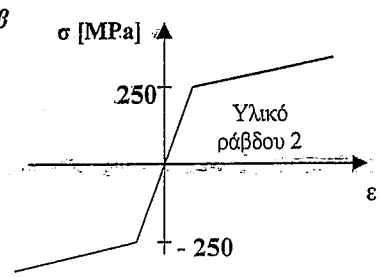
γ. Ποια η θέση της δοκού ΑΓ αν η δύναμη του προηγουμένου ερωτήματος αυξηθεί κατά 20%;



Σχήμα 3α



Σχήμα 6β

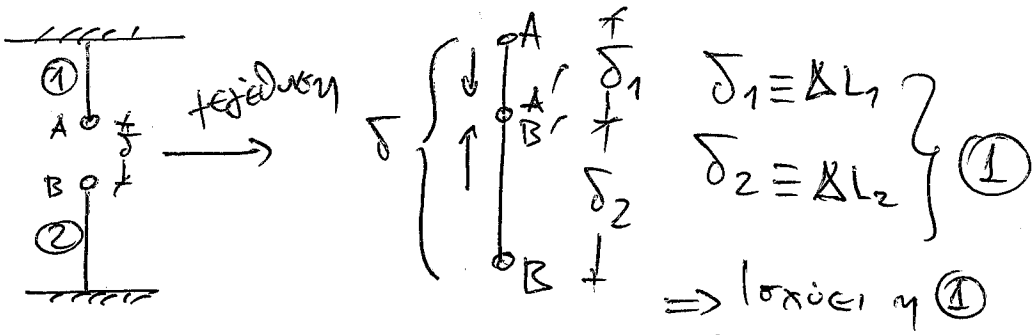


5η Σειρά – Γενικές Θλίψεις

Τα αυτενταστικά προβλήματα αποτελούν μία υποκατηγορία των υπερστατικών προβλημάτων. Όταν θέλουμε να "κλείσουμε" ένα δίκτυο, αρχικά αναπαριστούμε την τελική μορφή της κατασκευής και βλέπουμε πως συνεισφέρει το κάθε δομικό μέλος στο κλείσιμο. Μετά, παίρνουμε ισορροπία κόμβων, και παίρνουμε μία επιπλέον σχέση μεταξύ των δυνάμεων.

• 1η περίπτωση

• Βήμα 1 →

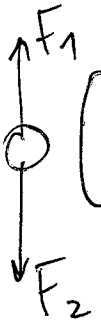


$$\left.\begin{aligned}\delta_1 &\equiv \Delta L_1\\ \delta_2 &\equiv \Delta L_2\end{aligned}\right\} (1)$$

⇒ Ισχύει η (1) επειδή οι ράβδοι είναι πακτωμένες

$$\Rightarrow \cancel{\delta = \delta_1 + \delta_2} \quad \delta = \delta_1 \downarrow + \delta_2 \uparrow \rightarrow \left[\delta = \Delta L_1 + \Delta L_2\right] (2)$$

• Βήμα 2 ⟶ Ισορροπία κόμβου πάνω στην πρόσδεση:



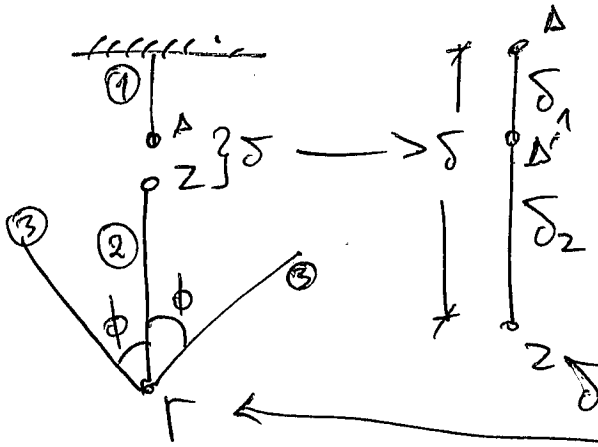
$$\left[F_1 = F_2\right] (3)$$

$$\xrightarrow[(3)]{(2)}$$ Επίλυση προβλήματος.

Αν άρα δεν είναι κάποια ράβδος πακτωμένη, τότε η μετακίνηση του άκρου της δεν ισούται μόνο με την επιμήκυνσή της (δηλαδή $\delta_i \neq \Delta L_i$) αλλά θα ισούται με την επιμήκυνσή της + την μετακίνηση του κόμβου

~~στη~~ στον οποίο είναι προσδεμένη. Δηλαδή:

• 2η περίπτωση → • Βήμα 1



$\delta_1 \equiv \Delta L_1$ → (Ράβδος 1 παλαιωμένη)

$\delta_2 \neq \Delta L_2 \rightarrow \delta_2 = \Delta L_2 + \delta_r$ ~~[illegible]~~

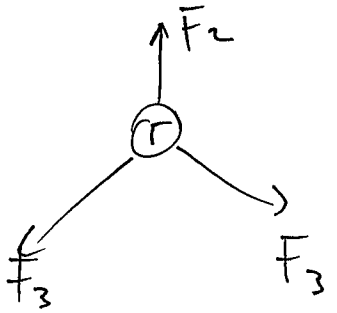
Επιμήκυνση ράβδου

Μετακίνηση κόμβου Γ.

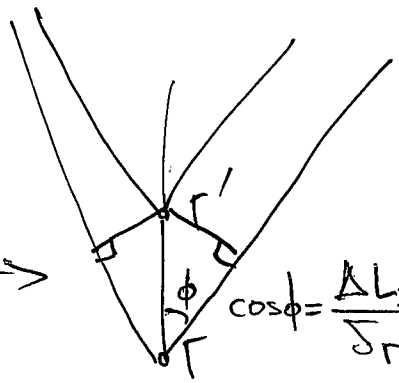
$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \delta_r$

• Βήμα 2 → Ισορροπία κόμβου Δ' →

και κόμβος Γ →



• Βήμα 3 → Συμβιβαστό κόμβου Γ →



$\cos\phi = \frac{\Delta L_3}{\delta_r}$ ...

Λύνουμε το πρόβλημα. (Η άσκηση 1 λύνεται έτσι).

★ Σημείωση για την άσκηση 5: Έχει λαθεί σωστά μέχρι το ερώτημα (β). Δεν απαντήθηκε το (δ) αφού προφανώς έχει γίνει κάποιο λάθος στο (γ).

Μηχανική II – Παραμορφώσεις

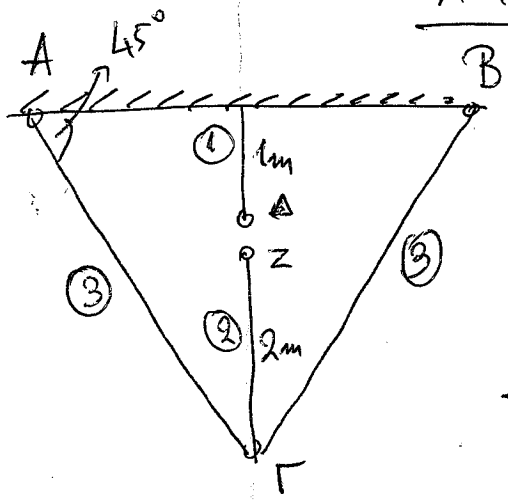
5η Σειρά Ασκήσεων

Αυτευστατικά Προβλήματα

(2013)

1

α



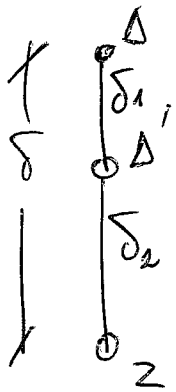
$E = 200\,GPa$

$\sigma_y = 200\,MPa$

$A_1 = 10^{-4}\,m^2 \qquad L_1 = 1\,m$

$A_2 = 10^{-4}\,m^2 \qquad L_2 = 2\,m$

$A_3 = 2\times10^{-4}\,m^2 \qquad L_3 = 4.22\,m$



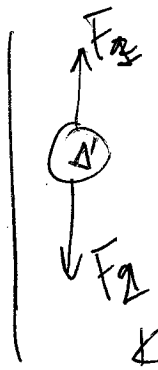
$\delta_1 \equiv \Delta L_1$

$\delta_2 \neq \Delta L_2 \rightarrow$ Το σημείο Γ δεν είναι ακλόνητο.

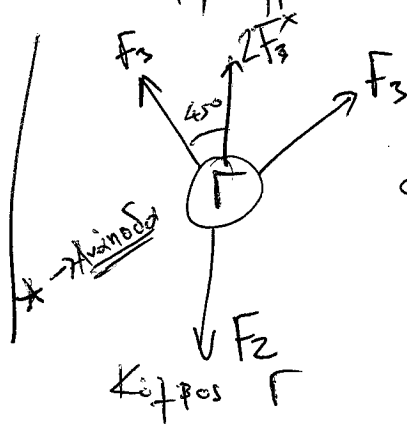
$\delta_2 = \Delta L_2 + \delta_\Gamma$

Επιμήκυνση 2 λόγω Hooke — Μετακίνηση κόμβου Γ.

$$\boxed{\delta = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \delta_\Gamma} \quad (1)$$



$$\boxed{F_1 = F_2} \quad (2)$$

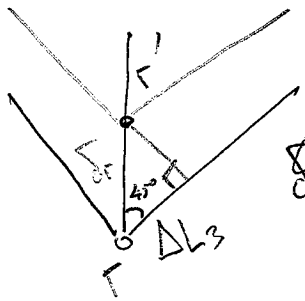


$2F_3^x = F_2$

$\cos 45° = \frac{F_3^x}{F_3} \rightarrow F_3^x = \frac{\sqrt{2}}{2} F_3$

$$\boxed{F_2 = \sqrt{2}\, F_3} \quad (3)$$

$\hookrightarrow (F_2 = 1.41\, F_3)$



$\delta_\Gamma \cos 45° = \frac{\Delta L_3}{\delta_\Gamma} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\Delta L_3}{\delta_\Gamma} \rightarrow$

$$\boxed{\delta_\Gamma = \frac{2}{\sqrt{2}} \Delta L_3} \quad (4)$$

$\hookrightarrow \delta_\Gamma = \sqrt{2}\,\Delta L_3$

$\hookrightarrow \delta_\Gamma = 1.41\,\Delta L_3$

$$\xrightarrow{1,2,3,4} \delta = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \Delta L_3 \rightarrow \delta = \Delta L_1 + \Delta L_2 + 1.41\,\Delta L_3$$

$\Longrightarrow$

$$\delta = \Delta L_1 + \Delta L_2 + 1.41 \Delta L_3$$

$$\cancel{\delta = F_3 \left(1.41 \frac{\Delta L_1}{F_3} + 1.41 \frac{\Delta L_2}{F_3} + 1.41 \frac{\Delta L_3}{F_3} \right)}$$

$$\delta = \frac{1.41 F_3 L_1}{A_1 E_1} + \frac{1.41 F_3 L_2}{A_2 E_2} + \frac{1.41 F_3 L_3}{A_3 E_3}$$

$$\delta = 1.41 F_3 \left(\frac{L_1}{A_1 E_1} + \frac{L_2}{A_2 E_2} + \frac{L_3}{A_3 E_3} \right) \rightarrow \delta = \frac{1.41}{E} F_3 \left(5.11 \times 10^5 \right)$$

$$F_3 = \frac{E}{7.20 \times 10^5} \delta \rightarrow \left[F_3(\delta) = 278 \delta \times 10^3 \, N \right]$$

$$F_3 = 278 \delta \times 10^3 \rightarrow \left[\sigma_3 = 13900 \delta \, MPa \right.$$
$$F_1 = 392 \delta \times 10^3 \rightarrow \left[\sigma_1 = 39200 \delta \, MPa \right.$$
$$F_2 = 392 \delta \times 10^3 \rightarrow \left[\sigma_2 = 39200 \delta \, MPa \right]$$

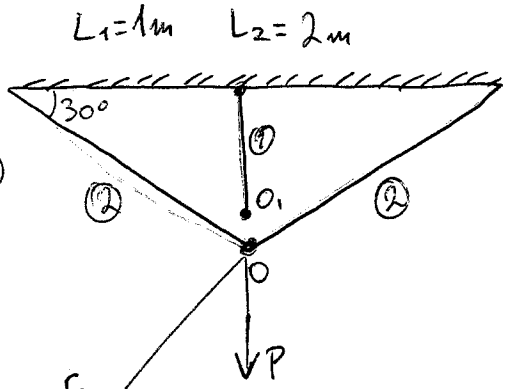
(β) Η 3 δέχεται λιγότερη τάση από τις άλλες 2.
Η 1 και η 2 δέχονται ίδιες τάσεις και έχουν ίδιες τάσεις διαφορής. Επομένως θα αστοχήσουν ταυτόχρονα.

$$\delta < \delta_{max} \rightsquigarrow \delta_{max} \Rightarrow \sigma_{1y} = \sigma_1 = 39200 \delta_{max} = 200 \rightsquigarrow \cancel{\delta_{max} = 0.051 mm}$$

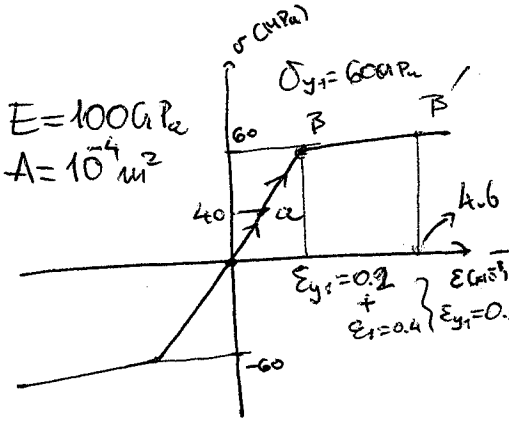
$$\delta_{max} = 0.0051 mm \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta < 5.1 \, mm}$$

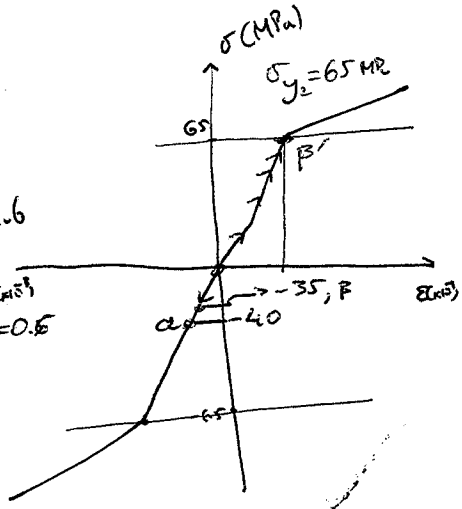
(2) (α)



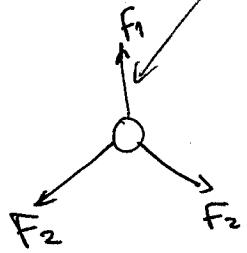
$E=100GPa$
$A=10^{-4}m^2$



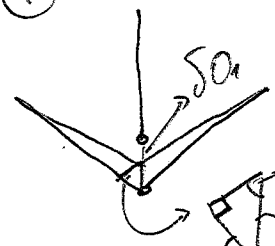
①

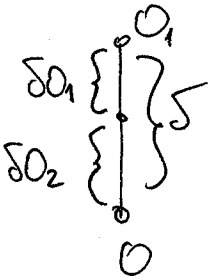


②



$F_1=2F\cos 60° \rightarrow \boxed{F_1=F_2}$ ①





$\sin 30° = \frac{\Delta L_2}{\delta O_2}$ $(\delta O_2 = 2\Delta L_2$ (α))

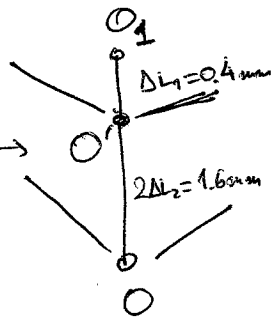
$\delta = \underbrace{\delta O_1}_{=\Delta L_1} + \delta O_2 \xrightarrow{(α)}$

$\delta = \Delta L_1 + 2\Delta L_2 \rightarrow 2\times10^{-3} = \frac{F_1 L_1}{A_1 E} + 2\frac{F_2 L_2}{A_2 E} \rightarrow 2\times10^{-3} = \frac{F_1 + 4F_2}{10^{-4}\times10^{11}} \rightarrow$

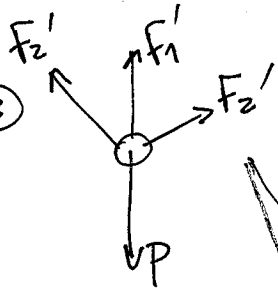
$2\times10^4 = F_1 + 2\cdot2F_2 \xrightarrow{F_1=F_2} 5F_1 = 2\times10^4 \rightarrow \boxed{F_1 = 4KN} = F_2$

$F_1=4KN$, $F_2=4KN$ $\xrightarrow{\sigma_i=\frac{F_i}{A}}$ $\sigma_1 = 40MPa \xrightarrow{\varepsilon_i=\frac{\sigma_i}{E}} \varepsilon_1 = 0.4\times10^{-3} \xrightarrow{\Delta L_i=\varepsilon_i L_i} \Delta L_1 = 0.4mm$

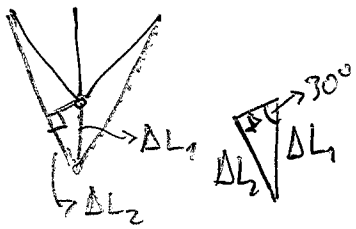
$\sigma_2 = 40MPa \rightarrow \varepsilon_2 = 0.4\times10^{-3} \rightarrow \Delta L_2 = 0.8mm$ $\rightarrow$



(β)



$F_1' + 2\cos 60 F_2' = P \rightarrow \boxed{P = F_1' + F_2'}$ ②



$\sin 30° = \frac{\Delta L_2}{\Delta L_1} \rightarrow \Delta L_2 = \frac{\Delta L_1}{2} \xrightarrow{Hooke} 2\frac{F_2' L_2}{AE} = \frac{F_1' L_1}{AE} \Rightarrow$

$2F_2' 2 = F_1' \rightarrow F_1' = 4F_2' \rightarrow \boxed{\sigma_1' = 4\sigma_2'}$

→ Λόγω της προέντασης, η ράβδος 1 βρίσκεται υπό εφελκυσμό, ενώ οι ράβδοι 2 βρίσκονται σε θλίψη. Από τη στιγμή που εφείς ασκούμε μια εφελκυστική δύναμη προς τα κάτω στον κόμβο, η ράβδος 1 θα έχει $\underline{\sigma_{y_1}' = \sigma_{y_1} - \sigma_1 = 60 - 40 = 20MPa}$ αλλά οι ράβδοι 2:

$\underline{\underline{\sigma_{y_2}'}} = \sigma_{y_2} - (-40) = 65 + 40 = \underline{\underline{105MPa}}$ (3)

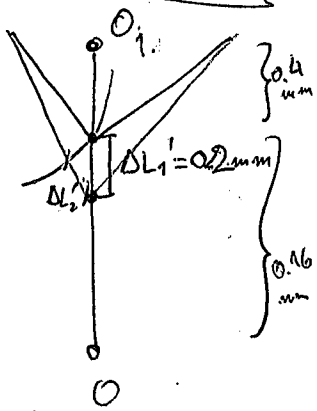
$\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'} = \frac{4\sigma_2'}{\sigma_2'} = 4$ $\quad \frac{\sigma_{1y}'}{\sigma_{2y}'} = \frac{20}{105} = 0.19$ $\quad \left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'} > \frac{\sigma_{1y}'}{\sigma_{2y}'}\right) \rightarrow$ 1η αστοχεί η ράβδος 1.

$\sigma_1' = 20MPa \rightarrow F_1' = 20\times10^6\times10^{-4} \rightarrow F_1' = 2KN. \xrightarrow{F_1'=4F_2'} F_2' = 0.5KN.$ $\hookrightarrow \boxed{P = 2.5KN}$

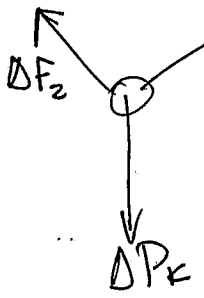
$F_1' = 2.5KN \longrightarrow \sigma_1' = 20MPa \xrightarrow{\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E}} \varepsilon_1' = 0.2\times10^{-3} \xrightarrow{\varepsilon_i = \frac{\Delta L_i}{L_i}} \Delta L_1' = 0.2\,mm$

$F_2' = 0.5KN \xrightarrow{\sigma_2 = F_2/A} \sigma_2' = 5MPa \rightarrow \varepsilon_2' = 0.05\times10^{-3} \rightarrow \Delta L_2' = 0.1\,mm$

$\hookrightarrow \sigma_{2\beta} = \sigma_2' - \sigma_2 = -35$



⇝ Με παραπέρα αύξηση της P, η ράβδος 1 χάνει τη φέρουσα ικανότητά της.



$\Delta P_K = 2\Delta F_2 \cos 60^\circ \rightarrow \boxed{\Delta P_K = \Delta F_2}$ → Για να αστοχήσει η 2 πρέπει να περάσει από θλίψη σε εφελκυσμό.

$\left[\sigma_{2\beta} = -35MPa \longrightarrow +35 \underset{\text{αφόρτιστη}}{0} \xrightarrow{+65} \text{διαρροή}\right]$

$\Rightarrow \sigma_{2\tau} = 100MPa. \quad \Delta F_2 = \sigma_{2\tau} A = 100\times10^3\times10^{-4} \rightarrow \Delta F_2 = 10KN.$

$\Rightarrow \Delta P_K = 10KN \rightarrow P_K = \underset{10}{\Delta P_K} + \underset{2.5}{P} \rightarrow \boxed{P_K = 12.5KN}$

⇝ Ισχύει ακόμα → $\Delta L_1'' = 2\Delta L_2''$ → $\varepsilon_1'' L_1 = 2\frac{F_2 L_2}{AE}$ → $\varepsilon_1'' \times 1 = 2\frac{10\times10^3\times2}{100\times10^5}$ → $\boxed{\varepsilon_1'' = 4\times10^{-3}}$

Η 1 δεν υπακούει πια στο Hooke $\left\{\Delta L_1'' = 4mm\right.$

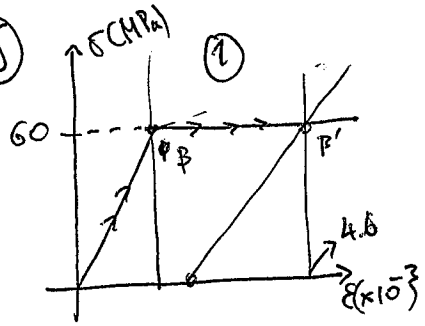
$\hookrightarrow \Delta L_2'' = 2mm$

$\hookrightarrow \varepsilon_2'' = 10^{-3}$

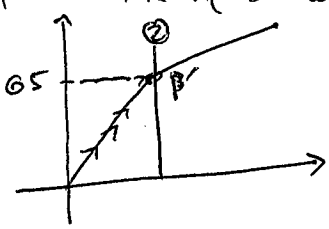
~~$F_2 = 10.5KN$~~

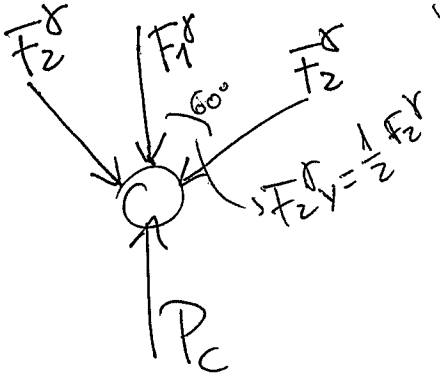
~~$F_1 \neq 25KN$~~

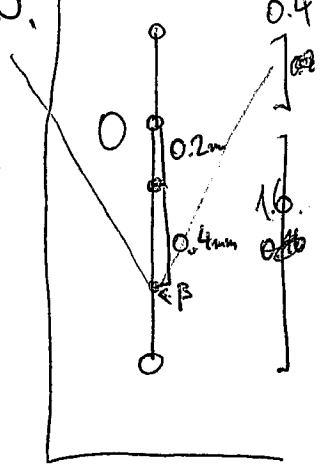
γ



Όντας υπερστατικό πρόβλημα, θα αυξήσουμε τη $-P_K$ προς τα πάνω, ίση με 12.5KN.





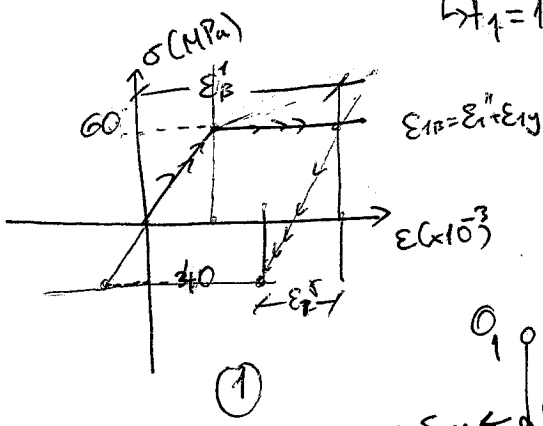


$\rightarrow P_c = F_1^{\gamma} + F_2^{\gamma}$

$\rightarrow$ Ισχύει επίσης ότι: $2\Delta L_2^{\gamma} = \Delta L_1^{\gamma} \rightarrow \dfrac{2F_2^{\gamma} L_2}{\cancel{A}E} = \dfrac{F_1^{\gamma} L_1}{\cancel{A}E} \rightarrow \cancel{4}F_2^{\gamma} = F_1^{\gamma}$ $\Big\} \rightarrow$

$12.5 \times 10^3 = 5F_2^{\gamma} \rightsquigarrow F_2^{\gamma} = 2.5\,KN \rightarrow \sigma_2^{\gamma} = 25\,MPa \rightarrow \varepsilon_2^{\gamma} = 0.25 \times 10^{-3}$

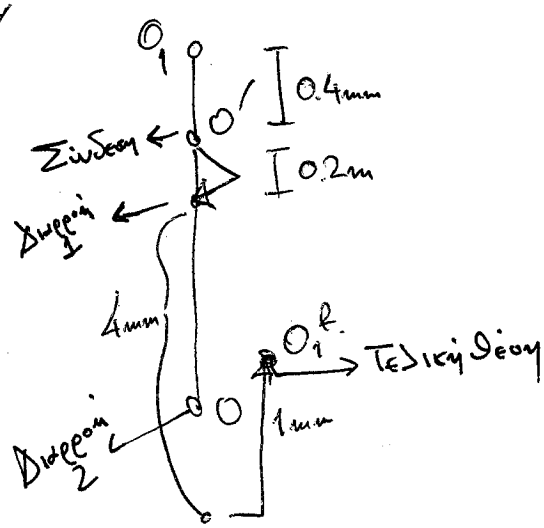
$\hookrightarrow F_1^{\gamma} = 10\,KN \rightarrow \sigma_1^{\gamma} = 100\,MPa \rightarrow \varepsilon_1^{\gamma} = 10^{-3}$



$\varepsilon_{1B} = \varepsilon_1^{\gamma} + \varepsilon_{1y}$

$$\begin{cases} \varepsilon_1^{\ell} = \varepsilon_{1B} - \varepsilon_1^{\gamma} = (1.6 - 1.0) \times 10^{-3} = 3.6 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_2^{\ell} = (\varepsilon_{2y} - \varepsilon_2) = 10^{-3} - 0.25 \times 10^{-3} = 0.25 \times 10^{-3} \end{cases}$$

(1)

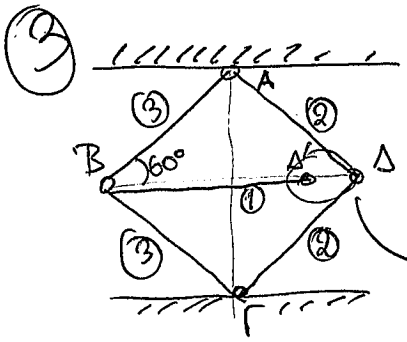


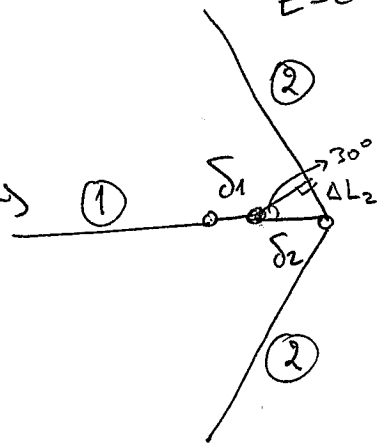
$\rightarrow$ Τελική θέση O_1, κάθοδος 3.6 mm
$\rightarrow$ Τελική θέση O, κάθοδος 1.6 mm
$\Big\}$ Από τις αρχικές θέσεις, ~~ακό~~ πριν τη σύνδεση.

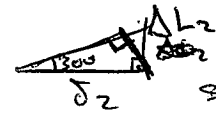
③

$A = 1.2\times10^{-4}\,m^2$ $\quad L = 2\,m$

$E = 200\times10^{9}\,Pa$ $\quad \delta = 2\,mm$







$\sin 30^\circ = \frac{\Delta L_2}{\delta_2}$

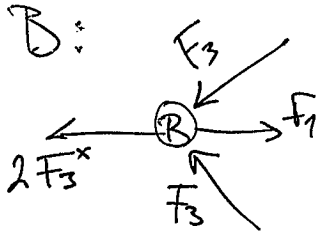
$\delta_2 = 2\Delta L_2$

$\delta = \delta_1 + \delta_2$

$\boxed{\delta = \delta_1 + 2\Delta L_2}$ ①

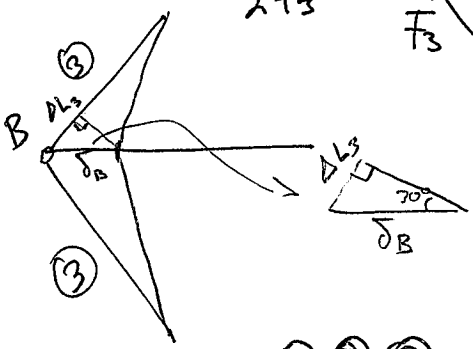
! Προσοχή ! $\delta_1 \neq \Delta L_1$, καθώς το σημείο B δεν είναι ακλόνητο!

→ Κόμβος B:



$F_3^x = \cos 60^\circ F_3 \rightarrow F_3^x = \frac{F_3}{2}$

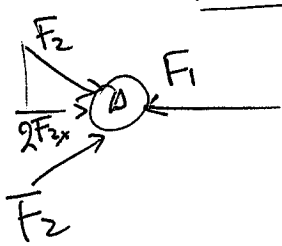
$\Rightarrow \boxed{F_3 = F_1}$ ②.



$\boxed{\delta_B = 2\Delta L_3}$ ③

$\delta_1 = \delta_B + \Delta L_1 \overset{①②③}{\Longrightarrow} \boxed{\delta = 2\Delta L_3 + \Delta L_1 + 2\Delta L_2}$ ④.

~ Κόμβος Δ:



$\cos 60^\circ = \frac{F_{2x}}{F_2} \rightarrow F_2^x = \frac{F_2}{2} \rightarrow \boxed{F_1 = F_2}$ ②

$\boxed{F_1 = F_2 = F_3}$

④ $\rightarrow 2\times10^{-3} = \frac{5F_1L}{AE} \rightarrow 2\times10^{-3} = \frac{5\times2F_1}{1.2\times10^{-4}\times200\times10^{9}} \rightarrow \boxed{F_1 = \frac{240}{5}\times10^{2}\,N}$

$F_i = \frac{240}{5}\times10^{2} \longrightarrow \sigma_i = \frac{F_i}{A} = \frac{\frac{240}{5}\times10^{2}}{\frac{1.2}{1}} \Rightarrow \sigma_i = 40\,KPa$

$\sigma_1 = 40\,KPa$

$\sigma_2 = 40\,KPa$

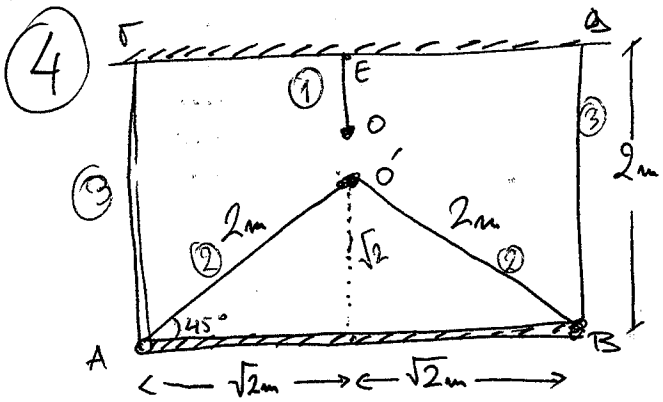
$\sigma_3 = 40\,KPa$

1 → Εφελκυστής

2 → Θλίψη

3 → Θλίψη. ■

④



$L_1 = 0.59\,m$

$OE \to 1$

$A_1 = 1.5\times10^{-4}\,m^2$

$E_1 = 150\,GPa$

$\sigma_{y_1} = 160\,MPa$

$\downarrow$

$\varepsilon_{y_1} = 1.07\times10^{-3}$

$L_2 = 2m,\ L_3 = 2m$

$A\Gamma, \Delta B \to 3 \,/\, AO', BO' \to 2$

$A_2 = 10^{-4}\,m^2$

$E_2 = 200\,GPa$

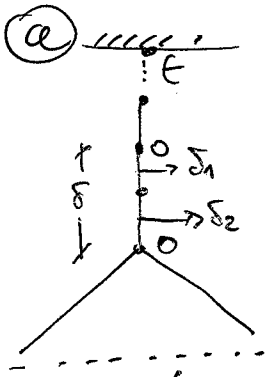
$\sigma_{y_2} = 250\,MPa$

$\downarrow$

$\varepsilon_{y_2} = 1.25\times10^{-3}$

$\delta = 1.5\times10^{-3}\,m$

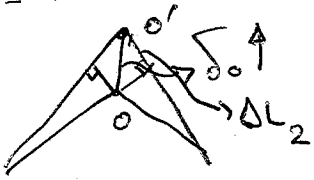
ⓐ



$\left.\begin{array}{l}\delta = \delta_1\downarrow + \delta_2\uparrow \\ \delta_1 \equiv \Delta L_1\end{array}\right\} \to \delta = \Delta L_1 + \delta_2 \to \boxed{\delta_2 = \delta_0\uparrow + \Delta L_3}$ ①

Μετακίνηση κόμβου Ο.

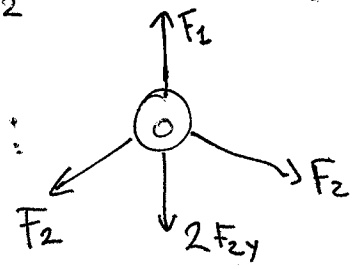
βράχυνση ράβδου 3



$\sin 45° = \frac{\Delta L_2}{\delta_0} \to \delta_0\uparrow = \sqrt{2}\,\Delta L_2 \xrightarrow{①} \boxed{\delta = \Delta L_1 + \sqrt{2}\,\Delta L_2 + \Delta L_3}$ ②

$\sqrt{2} \neq 0.71$

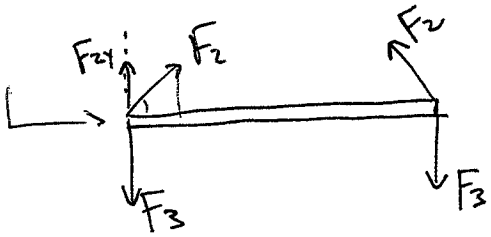
→ Κόμβος Ο:



$\cos 45° = \frac{F_{2y}}{F_2}$

$\left.\begin{array}{l}F_{2y} = \frac{\sqrt{2}}{2}F_2 \\ F_1 = 2F_{2y}\end{array}\right\} \to \boxed{F_1 = \sqrt{2}\,F_2}$ ③

→ Ράβδος AB



$F_{2y} = F_3$

$\sin 45° = \frac{F_{2y}}{F_2} \to F_{2y} = \frac{\sqrt{2}}{2}F_2$

$\to F_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}F_2 \xrightarrow{③} \boxed{F_1 = 2F_3}$ ④

$\boxed{F_2 = \sqrt{2}\,F_3}$

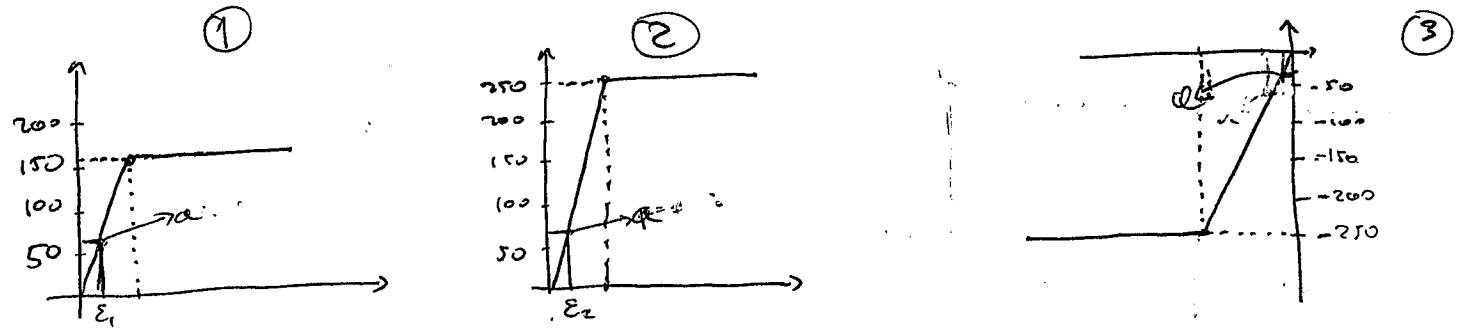
$\xrightarrow[③④]{②}$ Hooke $\to 1.5\times10^{-3} = \underbrace{\frac{2F_3L_1}{A_1E_1}}_{\Delta L_1} + \underbrace{\frac{2F_3L_2}{A_2E_2}}_{\Delta L_2} + \underbrace{\frac{F_3L_3}{A_3E_3}}_{\Delta L_3} \to 1.5\times10^{-3} = F_3\left(\frac{2L_1}{A_1E_1} + \frac{2L_2}{A_2E_2} + \frac{L_3}{A_3E_3}\right)$

$1.5\times10^{-3} = F_3\frac{1}{10^5}\left(\frac{1.18}{225} + \frac{6}{200}\right) \to 1.5\times10^{-3} = \frac{F_3}{10^5}\,35.24\times10^{-3} \to \underline{\underline{F_3 = 4.26\,KN}}$

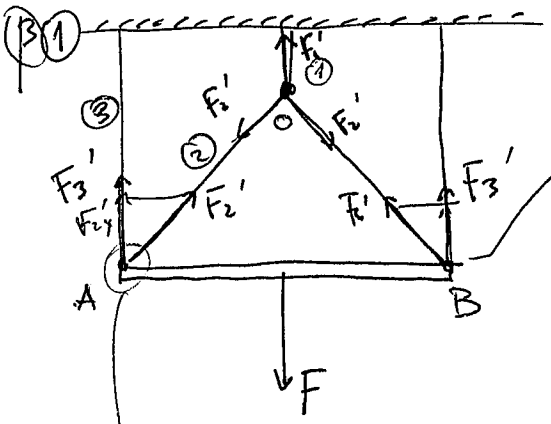
$F_1 = 8.52\,KN \xrightarrow{\sigma_i = F_i/A_i} \sigma_1 \cong 57\,MPa \xrightarrow{\varepsilon_i = \sigma_i/E_i} \varepsilon_1 = 0.38\times10^{-3} \to \Delta L_1 = 0.22\,mm$ εφελκυσμός

$F_2 = 6.02\,KN \to \sigma_2 \cong 60\,MPa \to \varepsilon_2 = 0.3\times10^{-3} \to \Delta L_2 = 0.6\,mm$ εφελκυσμός

$F_3 = 4.26\,KN \to \sigma_3 \cong 43\,MPa \to \varepsilon_3 = 0.215\times10^{-3} \to \Delta L_3 = 0.43\,mm$ θλίψη



(β) ①

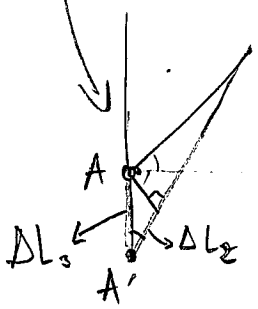


$F = 2F_3' + 2F_{2y}'$

$F_{2y}' = \frac{\sqrt{2}}{2} F_2'$

$\boxed{F = 2F_3' + \sqrt{2} F_2'}$ ⑤

Κόμβος O: $\boxed{F_1' = \sqrt{2} F_2'}$ ⑥



$\rightarrow \cos 45 = \frac{\Delta L_2'}{\Delta L_3'} \rightarrow \Delta L_2' = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta L_3' \rightarrow \frac{F_2' L_2}{A_2 E_2} = 0.71 \frac{F_3' L_3}{A_3 E_3} \xrightarrow[\substack{A_2 = A_3 \\ E_2 = E_3}]{L_2 = L_3}$

$\Rightarrow \boxed{F_2' = \frac{\sqrt{2}}{2} F_3'}$ ⑦ $\rightarrow$ ~~$\boxed{F_1' = F_3'}$~~ ⑧ $\rightarrow$ Συμπιέζεται στον κόμβο O

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'} = \frac{\frac{F_1'}{A_1}}{\frac{F_2'}{A_2}} = \frac{F_1' A_2}{F_2' A_1} = \frac{\sqrt{2} F_2' 10^{-4}}{F_2' \times 1.5 \times 10^{-4}} = \frac{\sqrt{2}}{1.5} = 0.94, \quad \frac{\sigma_1'}{\sigma_3'} = \frac{\frac{F_1'}{A_1}}{\frac{F_3'}{A_3}} = \frac{A_3}{A_1} = 0.67,$$

$$\frac{\sigma_2'}{\sigma_3'} = \left.\frac{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} F_3'}{A_2}}{\frac{F_3'}{A_3}}\right) = \left.\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} A_3}{A_2}\right) \cong 0.71, \quad \frac{\sigma_{1y}'}{\sigma_{2y}'} = \frac{160-57}{250-60} = \frac{103}{190} = 0.54.$$

$$\frac{\sigma_{1y}'}{\sigma_{3y}'} = \frac{160-57}{250+43} = \frac{103}{293} = 0.35, \quad \frac{\sigma_{2y}'}{\sigma_{3y}'} = \frac{250-60}{250+43} = \frac{190}{293} = 0.65$$

$$\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'} - \frac{\sigma_{1y}'}{\sigma_{2y}'}\right) = 0.4 \equiv A, \quad \left(\frac{\sigma_2'}{\sigma_3'} - \frac{\sigma_{2y}'}{\sigma_{3y}'}\right) = 0.06 \equiv B, \quad \left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'} - \frac{\sigma_{1y}'}{\sigma_{3y}'}\right) = 0.32 \equiv C$$

$A > C > B \rightarrow$ Πρώτη αστοχεί η ράβδος ①.

$\sigma'_{1y} = \overset{\sigma_{1y}}{160} - \overset{\sigma_1}{57} = 103\,MPa$, $F'_{1y} = 103\times10^6 \times 1.5\times10^{-4} \rightarrow F'_{1y} = 15.45\,KN.$

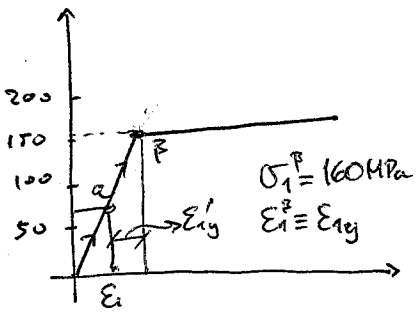
$F'_{1y} = 15.45\,KN \xrightarrow{\sigma_i = F_i/A_i} \sigma'_{1y} = 103\,MPa \xrightarrow{\varepsilon_i = \sigma_i/E_i} \varepsilon'_{1y} = 0.69\times10^{-3}$

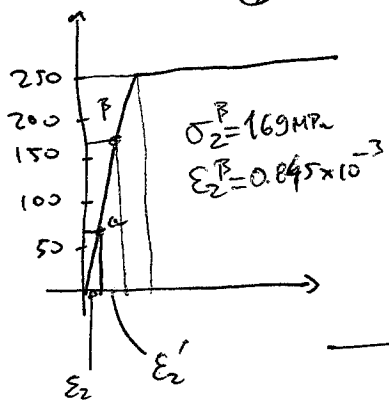
$F'_2 = 10.89\,KN. \rightarrow \sigma'_2 \cong 109\,MPa \rightarrow \varepsilon'_2 = 0.545\times10^{-3}$

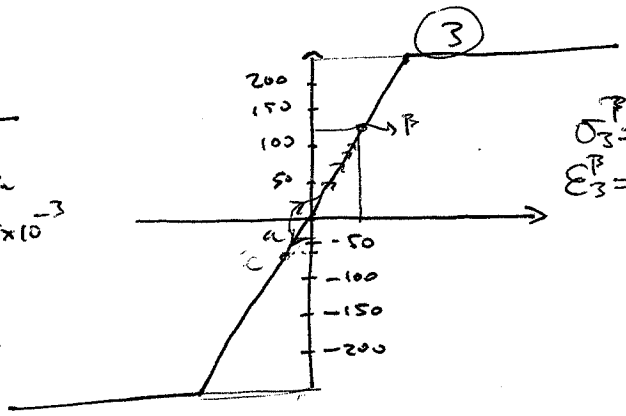
$F'_3 = 15.45\,KN. \rightarrow \sigma'_3 \cong 155\,MPa \rightarrow \varepsilon'_3 = 0.775\times10^{-3}$

(5) $\rightarrow F = 2F'_3 + \sqrt{2}F'_2 \rightarrow \boxed{F = 46.25\,KN}$

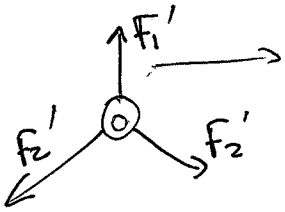
(1) (2)







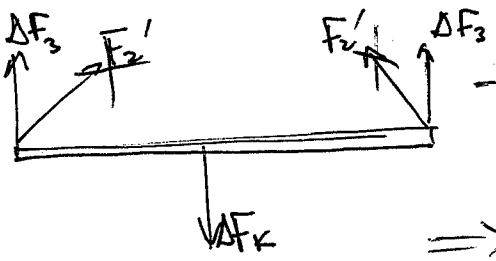
(β)(2) Η ράβδος (1) αστοχεί και χάνει τη φέρουσα ικανότητά της. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η φόρτιση στον κόμβο Ο να παραμείνει συνολικά σταθερή όσο και αν αυξηθεί η F.



Η F'_1 δεν αλλάζει ⟹ Για να ισορροπεί ο κόμβος πρέπει και οι F'_2 να παραμείνουν σταθερές.

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να την παραλαμβάνουν επιπλέον φορτία ούτε και οι ράβδοι 2 (OA, OB), αφού οι F'_2 δεν θα αλλάξουν ποτέ.

⟹ Οι ράβδοι 3 (AΓ, BΔ) θα παραλάβουν όλα τα επιπλέον φορτία.



$\rightarrow 2\Delta F_3 = \Delta F_K$

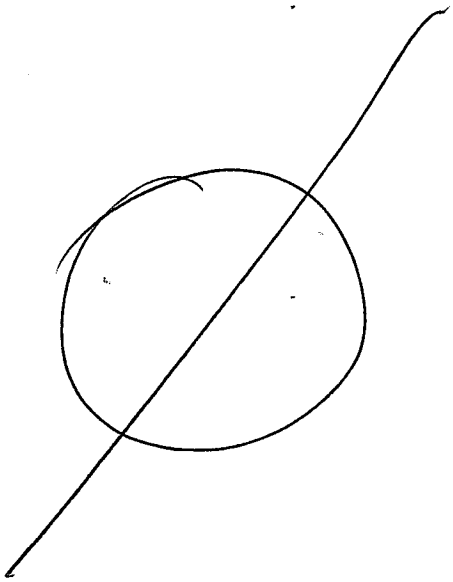
$\Delta\sigma_{3y} = \overset{\sigma_{3y}}{250} - \overset{\sigma_3^\beta}{112} = 138\,MPa.$

$\Rightarrow \Delta F_3 = 138\times10^6 \times 10^{-4} = 13.8\,KN.$

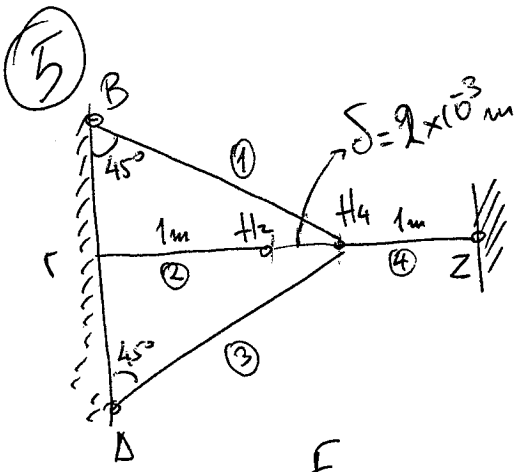
$\Rightarrow \Delta F_K = 2\times13.8\,KN \rightarrow \Delta F_K = 27.6\,KN.$

$\Rightarrow F_K = F + \Delta F_K = 46.25 + 27.6$

$\boxed{F_K = 73.85\,KN}$

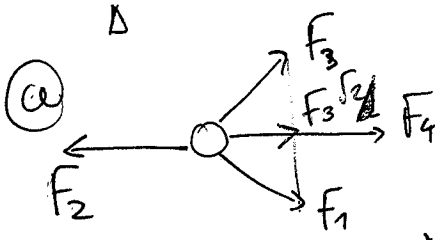


5

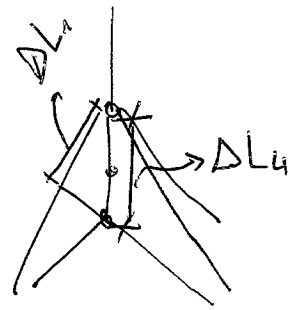


$$\begin{bmatrix} L_1 = L_3 = \sqrt{2}\,m \\ E = 200\,GPa \\ A = 10^{-4}\,m^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} L_2 = L_4 = 1\,m \\ \sigma_{y4} = 220\,MPa \\ \sigma_{y1,2,3} = 250\,MPa \end{bmatrix}$$

a

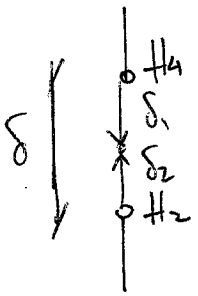


$$\boxed{F_2 = \sqrt{2}F_3 + F_4} \quad (3)$$



$$\Delta L_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta L_4.$$

$$\boxed{\Delta L_4 = \sqrt{2}\Delta L_1} \quad (1)$$



$$\delta = \underbrace{\delta_1}_{=\Delta L_4}\downarrow + \underbrace{\delta_2}_{=\Delta L_2}\uparrow \rightarrow \boxed{\delta = \Delta L_4 + \Delta L_2} \quad (2) \xrightarrow{(1)} \cancel{\delta = \sqrt{2}\Delta L_4 + \Delta L_2}.$$

$$\Delta L_4 = \sqrt{2}\Delta L_1 \rightarrow \frac{F_4 L_4}{\cancel{AE}} = \sqrt{2}\frac{F_1 L_1}{\cancel{AE}} \rightarrow F_4 \times 1 = \sqrt{2}F_1 \times \sqrt{2} \rightarrow \boxed{F_4 = 2F_1}$$

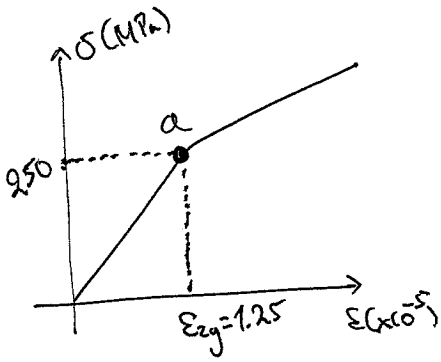
$$\cancel{\delta = \frac{F_4 L_4}{AE} + \frac{F_2 L_2}{AE}} \quad (3) \rightarrow F_2 = \sqrt{2}F_1 + 2F_1 \rightarrow F_2 = F_1(2+\sqrt{2}) \rightarrow \boxed{F_2 = 3.41\,F_1}$$

$$\delta = \frac{F_4 L_4}{AE} + \frac{F_2 L_2}{AE} \rightarrow \delta = \frac{3.41F_1 + 2F_1}{200\times10^9 \times 10^{-4}} \rightarrow 2\times10^{-3} = \frac{5.41F_1}{200\times10^5} \rightarrow \boxed{F_1 = 7.4\,KN}$$

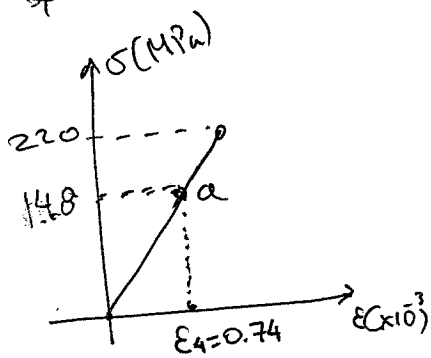
$F_1 = F_3 = 7.4\,KN \xrightarrow{\sigma_i = F_i/A} \sigma_1 = \sigma_3 = 74\,MPa \longrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.37\times10^{-3}$ (Θλίψη)

$F_2 = 25.23\,KN \longrightarrow$! $\sigma_2 = 252\,MPa$! $\longrightarrow \varepsilon_2 = 1.25\times10^{-3}$ (Εφελκυσμός)

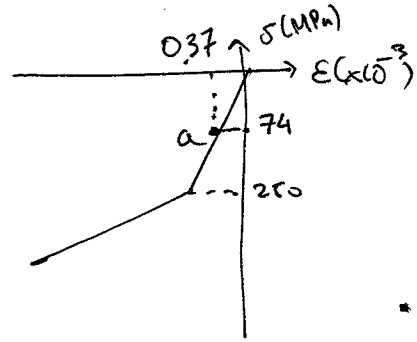
$F_4 = 14.8\,KN \longrightarrow \sigma_4 = 148\,MPa \longrightarrow \varepsilon_4 = 0.74\times10^{-3}$. (Εφελκυσμός)



2

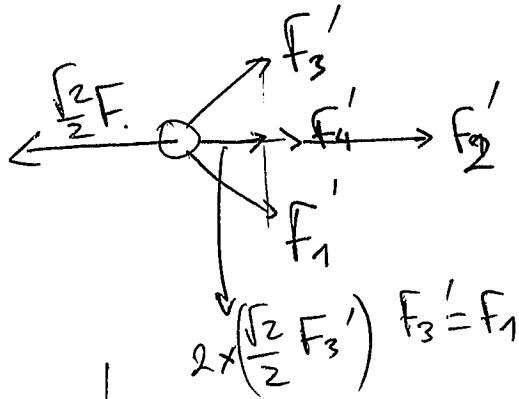


4



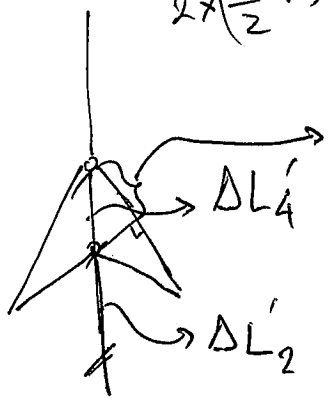
3,1

(β) Όταν ασκηθεί η F, οι ράβδοι 1 και 3 θα παραλάβουν θλιπτικά φορτία, η 2 θα παραλάβει και αυτή θλιπτικά φορτία, ενώ η 4 θα φορτωθεί εφελκυστικά.



$F_3' = F_1'$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}F = F_2' + F_4' + \sqrt{2}\,F_3'} \quad (4)$$



$\rightarrow \Delta L_2' = \Delta L_4' \rightarrow \frac{F_2' L_2}{AE} = \frac{F_4' L_4}{AE} \xrightarrow{L_2 = L_4} \boxed{F_2' = F_4'}$

$\Delta L_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta L_4 \rightarrow \boxed{F_4' = 2F_1'}$

$F_2' = 2F_1'$

$F_2' = 2F_3'$

$\rightarrow$

$$\xrightarrow{(4)} \frac{\sqrt{2}}{2}F = 2F_2' + \frac{\sqrt{2}}{2}F_2'$$

$$\sqrt{2}F = 4F_2' + \sqrt{2}F_2' \rightarrow \begin{bmatrix} F_2' = 0.26F & F_1' = 0.13F \\ F_4' = 0.26F & F_3' = 0.13F \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{matrix} \sigma_2' = \sigma_4' = 2600F \\ \sigma_1' = \sigma_3' = 1300F \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \sigma_1', \sigma_2', \sigma_3' \text{ θλιψη} \\ \sigma_4' = \text{εφελκυσμός} \end{matrix}\Bigg]$$

(γ) $\sigma_{1y}' = \sigma_{3y}' = 176\,MPa \leftarrow (250-74)$

$\sigma_{2y}' = \sigma_{2y} + \sigma_2 = 250 + 250 = 500\,MPa$

$\sigma_{4y}' = \sigma_{4y} - \sigma_4 = 220 - 148 = 72\,MPa$

$$\rightarrow \frac{\sigma_4'}{\sigma_1'} = \frac{2600F}{1300F} = 2$$

$$\frac{\sigma_{4y}'}{\sigma_{1y}'} = \frac{72}{176} = 0.41$$

$\rightarrow \neq (4)$ αυτοφέρει πρίν.

$(\sigma_{2y}' >> \sigma_{4y}')$ και $(\sigma_2' = \sigma_4')$

$$\sigma_4' \equiv \sigma_{4y}' = 72\times10^6\,Pa \xrightarrow{A=10^{-4}\,m^2} F_4' = 7.2\,KN \rightarrow F_2' = 7.2\,KN$$

$$\hookrightarrow F_1' = 3.6\,KN \rightarrow F_3' = 3.6\,KN$$

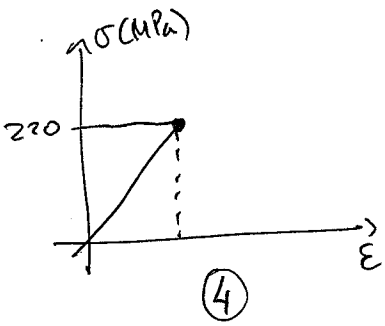
$$F = \frac{F_4'}{0.26} = \frac{7200}{0.26} \rightarrow \boxed{F \cong 27.7\,KN}$$

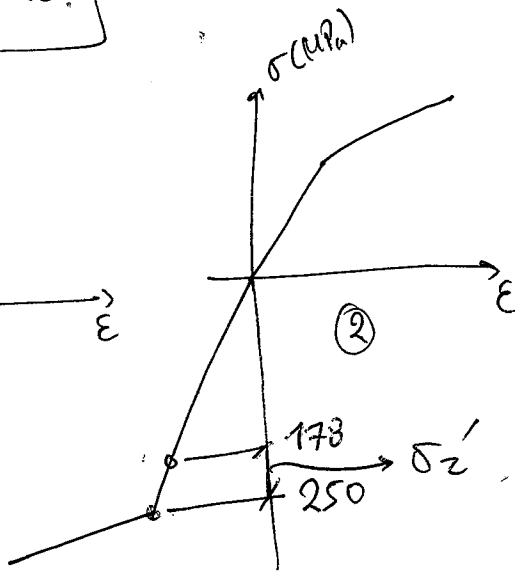
$\sigma_4' = 72\,MPa$

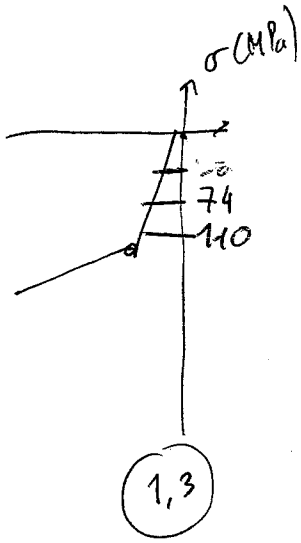
$\sigma_2' = 72\,MPa$

$\sigma_1' = 36\,MPa$

$\sigma_3' = 36\,MPa$





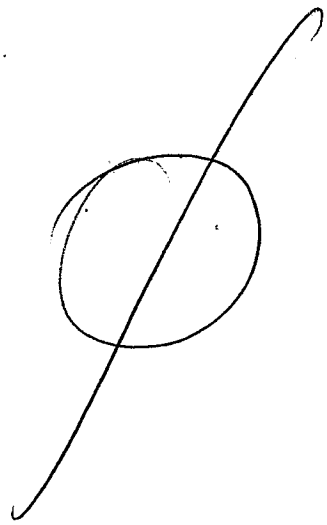


$\sigma_{4f} = \sigma_4 + \sigma_4' = 220\,MPa$

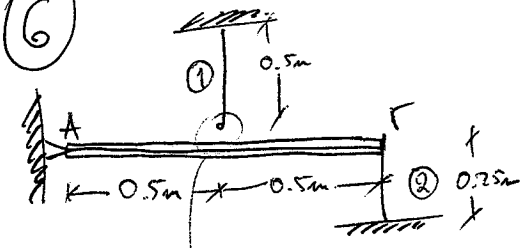
$\sigma_{2f} = \sigma_2 - \sigma_2' = 178\,MPa$

$\sigma_{1f} = \sigma_{3f} = \sigma_3 + \sigma_3' = 110\,MPa$

δ) Μετά την πρώτη αστοχία, η 4 σπάει με αποτέλεσμα να χάνει πλήρως τη φέρουσα ικανότητα της. Πλέον, η σχέση (4) γίνεται $\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}F' = F_2'' + \sqrt{2}F_3''$



(6)



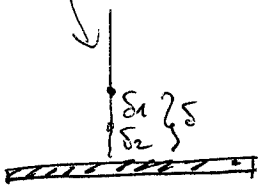
$A_1 = 50\times10^{-6}\,m^2$ $\quad A_2 = 50\times10^{-6}\,m^2$

$E_1 = 200\,GPa$ $\quad E_2 = 150\,GPa,\ H_2 = 50\,GPa$

$L_1 = 0.5\,m$ $\quad \sigma_{y,2} = 250\,MPa$

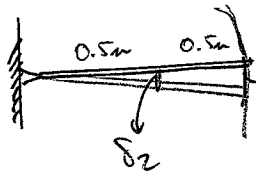
$L_2 = 0.25\,m$

(α)



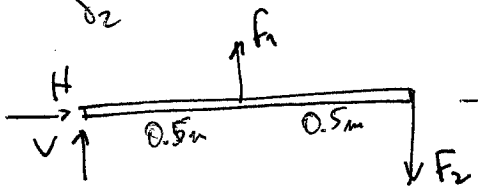
$\delta = \delta_1 + \delta_2$

$\delta_1 \equiv \Delta L_1$



$\rightarrow \Delta L_2 \rightarrow \Delta L_2 = 2\delta_2$

$\rightarrow \boxed{\delta = \Delta L_1 + \frac{\Delta L_2}{2}}$ (1)



$\rightarrow \boxed{F_1 = 2F_2}$ (2)

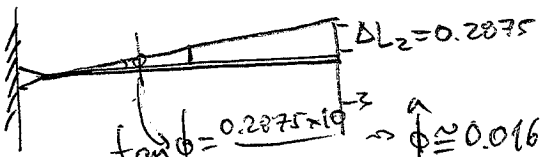
$$\xrightarrow{(1)} 10^{-3} = \frac{2F_2L_1}{A_1E_1} + \frac{F_2L_2}{2A_2E_2} \rightarrow 10^{-3} = F_2\left(\frac{2\times0.5}{50\times10^{-6}\times200\times10^{9}} + \frac{0.25}{2\times50\times10^{-6}\times150\times10^{9}}\right) \rightarrow F_2 = \frac{10^{-3}\times10^{7}}{1.17}$$

(2)

$F_2 = 8.5\,KN$

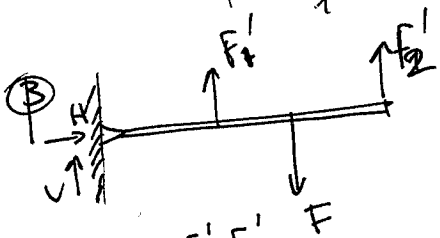
$F_1 = 17\,KN \xrightarrow{\sigma_i = \frac{F_i}{A_i}} \sigma_1 = 340\,MPa \xrightarrow{\varepsilon_i = \sigma_i/E_i} \varepsilon_1 = 1.7\times10^{-3} \rightarrow \Delta L_1 = 0.85\,mm$

$F_2 = 8.5\,KN \rightarrow \sigma_2 = 170\,MPa \rightarrow \varepsilon_2 = 1.13\times10^{-3} \rightarrow \Delta L_2 = 0.2825\,mm$



$\tan\phi = \frac{0.2875\times10^{-3}}{1} \Rightarrow \hat{\phi} \cong 0.016^{\circ}$

(B)



$0.75F = 0.5F_1' + F_2'$

$\Rightarrow$ Η αντοχή θα προκλήθεί στη δοκό 2.
Η δοκός 2 είναι προφορτισμένη ελαστικά και τώρα συμπιέζεται.

$\sigma_{y_2}' = \sigma_{y_2} - (-\sigma_2) = 250 + 170 = 420\,MPa.$

$F_{y_2}' = 420\times10^{6}\times50\times10^{-6} \rightarrow F_{y_2}' = \underline{\underline{21\,KN \equiv F_2'}}$

(3)

$\rightarrow$ Ισχύει επίσης λόγω γεωμετρίας $\Rightarrow \left[\Delta L_2' = 2\Delta L_1'\right] \xrightarrow{Hooke} \frac{F_2L_2}{A_2E_2} = 2\frac{F_1'L_1}{A_1E_1} \rightarrow$

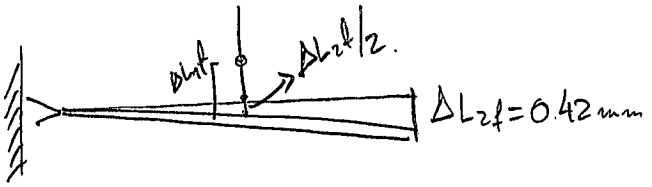
$$\frac{21\times10^{3}\times0.25}{150\times10^{9}} = 2\frac{F_1'\,0.5}{200\times10^{9}} \rightarrow \frac{5.25\times10^{3}}{150} = \frac{F_1'}{200} \rightarrow \boxed{F_1' = 7\,KN}$$

$0.75F = 0.5F_1' + F_2' \xrightarrow[F_2'=\dots]{F_1'=\dots} \boxed{F = 32.67\ KN}$

$F_1' = 7\ KN \xrightarrow{\sigma_i' = \frac{F_i}{A_i}} \sigma_1' = 140 MPa. \longrightarrow \sigma_{1f} = \sigma_1' + \sigma_1 = 480 MPa. \xrightarrow{\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_i}} \varepsilon_{1f} = 2.4\times10^{-3}$
(εφελκυσμός)

$F_2' = 21 KN \longrightarrow \sigma_2' = 420 MPa \longrightarrow \sigma_{2f} = \sigma_2' - \sigma_2 = 250 MPa \longrightarrow \varepsilon_{2f} = 1.67\times10^{-3}$
(εφελκυσμός)

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} \Delta L_{1f} = 1.2 mm \\ \Delta L_{2f} = 0.42 mm \end{pmatrix}$



(γ) $F_T = F + 0.2F \Rightarrow F_T = 39.2 KN. \rightarrow F' = 6.53\ KN.$

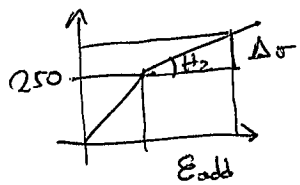
$\Rightarrow 0.75F_T = 0.5F_1'' + F_2''$ (Ισορροπία)

$\hookrightarrow 0.75F' = 0.5\Delta F_1 + \Delta F_2.$

6 $\boxed{4.9 = \frac{\Delta F_1}{2} + \Delta F_2.}$

$\Longrightarrow$ Η 3 ισχύει ακόμα. $\Delta L_2'' = 2\Delta L_1'' \rightarrow \Delta L_2'' = 2\frac{\Delta F_1 L_1}{A_1 E_1} \xrightarrow{(4)} \longrightarrow$

Για την δοκό (2) δεν ισχύει ο ν. Hooke.



$\left(\varepsilon_{add} = \frac{\Delta\sigma_2}{H_2}\right)$ (4) $\longrightarrow \Delta L_2'' = \varepsilon_{add} \cdot L_2.$

$\longrightarrow \varepsilon_{add} L_2 = \frac{2\Delta\sigma_1 L_1}{E_1} \rightarrow \frac{\Delta\sigma_2}{50\times10^9}\frac{1}{4} = \frac{2\Delta\sigma_1 \frac{1}{2}}{200\times10^9} \rightarrow \boxed{\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_1} \xrightarrow{\text{ίδιες δυνάμεις}} \Rightarrow \boxed{\Delta F_2 = \Delta F_1}$

$4.9 = \frac{3}{2}\Delta F_1 \rightarrow \Delta F_1 = 3.27 = \Delta F_2 \qquad F_1^{final} = F_1' + \Delta F_1 \dots$

$F_1^{final} = 10.27 KN \longrightarrow \sigma_1^{final} \cong 51.45 MPa \longrightarrow \varepsilon_1^{final} = \frac{\sigma_1^{final}}{E_1} = 2.725\times10^{-3}$

$F_2^{final} = 24.27 KN \longrightarrow \sigma_2^{final} \cong 315 MPa \longrightarrow \varepsilon_2^{final} = \frac{\Delta\sigma_2}{H_2} + \varepsilon_{2f} = \underbrace{\frac{(315-250)\times10^6}{50\times10^9}}_{\varepsilon_{add}} + 1.67\times10^{-3}$

$\varepsilon_2^{final} = 1.3\times10^{-3} + 1.67\times10^{-3} = 2.97\times10^{-3}$

$\hookrightarrow \boxed{\Delta L_2 = 0.74 mm}$ → κάθοδος σημείου Γ.