ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Πραγματική Ανάλυση

25-9-2008

Θέμα 1. (i) Θέτουμε $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$, $x > 0$. Δείξτε ότι τα $Gr(f)$, $Gr(g)$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και υπολογίστε την απόσταση $\rho(Gr(f), Gr(g))$.

(ii) Έστω $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνησίως φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $\inf\{t_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{t_n + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$. Βρείτε το $\overline{A}$ και το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A.

(iii) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

i. $x_n \xrightarrow{\rho} x \Leftrightarrow$ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή.

ii. Η ρ είναι ισοδύναμη με την διακριτή μετρική.

Θέμα 2. (i) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X έχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.

(ii) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος τέτοιος ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\{x_i\}_{i=1}^d$ με $X = \cup_{i=1}^d S(x_i, \varepsilon)$. Δείξτε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $\rho(x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}) < \varepsilon$.

(iii) Έστω $A = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ αριθμήσιμο σύνολο. Δείξτε ότι αν

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A \setminus \{x_1, ..., x_n\}}$$

τότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, το $S(x, \varepsilon) \cap A$ είναι απειροσύνολο.)

Θέμα 3. (α)Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το σύνολο $A_t = \{x \in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leq t\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(ii) Αν για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο, δείξτε ότι υπάρχει $V \subset X$ ανοικτό μη κενό ώστε η ακολουθία $(f_n|_V)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

(β) (i) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αν για κάθε $y \in X$, $\rho(x, y) \neq \varepsilon$, δείξτε ότι $\overline{S(x, \varepsilon)} = S(x, \varepsilon)$.

(ii) Έστω (X, ρ) αριθμήσιμος μετρικός χώρος, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon' < \varepsilon$ ώστε $\overline{S(x, \varepsilon')} = S(x, \varepsilon)$.

(iii) Δείξτε ότι ο (X, ρ) έχει βάση περιοχών απο ανοιχτές-κλειστές σφαίρες.

Θέμα 4. (α) (i) Δώστε τον ορισμό της ισοσυνέχειας μιας ακολουθίας $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και δείξτε ότι κάθε $F \subset C([0, 1])$ πεπερασμένο είναι ισοσυνεχές.

(ii)Δείξτε ότι αν $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f, τότε είναι ισοσυνεχής ακολουθία.

(β) (i) Έστω $p(x)$ μη σταθερό πολυώνυμο. Δείξτε ότι το $\lim_{x\to\infty} p(x)$ είναι είτε $+\infty$ είτε $-\infty$.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $p(x)$ μη σταθερό πολυώνυμο και $K \subset \mathbb{R}$ κλειστό, το σύνολο $\rho[K] = \{p(x) : x \in K\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.