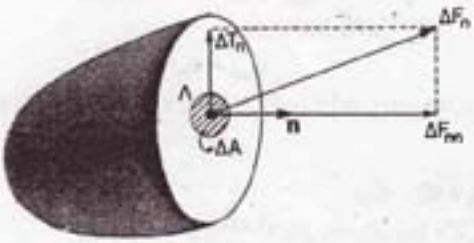
3

ΤΑΣΕΙΣ

Α. τριαξονική εντατική κατάσταση



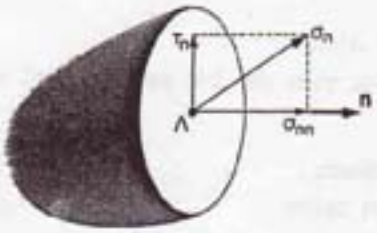
α) **Τάση** στο σημείο Λ της διατομής είναι το όριο

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$$

ΔΑ: στοιχειώδης επιφάνεια κάθετη προς το διάνυσμα **n**.

Λ : κέντρο βάρους της ΔΑ.

ΔF_n :στοιχειώδης εσωτερική δύναμη που εφαρμόζεται στην επιφάνεια ΔΑ.



β) **Ορθή τάση** σ_{nn} είναι η συνιστώσα της σ_n, κατά τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος **n**. Μπορεί να ορισθεί σαν

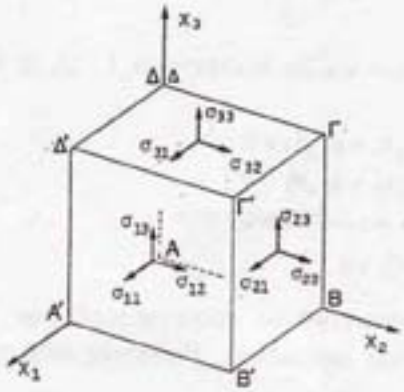
$$\sigma_{nn} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{nn}}{\Delta A}$$

γ) **Διατμητική τάση** τ_n είναι η προβολή της σ_n πάνω στη διατομή. Ορίζεται ακόμη σαν

$$\tau_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta T_n}{\Delta A}$$

Ενώ ισχύει ότι

$$\sigma_n = \sigma_{nn} + \tau_n$$



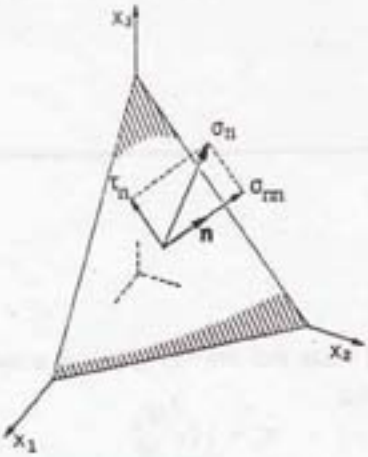
δ) **Προσήμανση και συμβολισμός τάσεων**

Η συνιστώσα των τάσεων σ_{ij} συμβολίζει τάση που εφαρμόζεται σε έδρα κάθετη στον άξονα Ox_i και έχει κατεύθυνση παράλληλη με τον άξονα Ox_j (i,j=1,2,3).

Στις έδρες Α΄Β΄Γ΄Δ΄,ΒΓΓ΄Β΄,ΔΔ΄Γ΄Γ, όπου η προς τα έξω κάθετος έχει τη φορά του θετικού άξονα, οι συνιστώσες των τάσεων είναι θετικές όταν έχουν την ίδια φορά με αυτή του συστήματος συντεταγμένων. Αντίθετα, στις άλλες έδρες οι συνιστώσες των τάσεων είναι θετικές όταν έχουν φορά αντίθετη από

-αυτή του συστήματος συντεταγμένων. Ακόμα

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$



ε) Τάσεις σε λοξή τομή

ε1) Συνιστώσες της $\boldsymbol{\sigma}_n$ στο σύστημα συντεταγμένων

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j$$

δηλαδή

$$\sigma_{n1} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$$
$$\sigma_{n2} = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3$$
$$\sigma_{n3} = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

ε2) Ορθή τάση σ_{nn}

$$\sigma_{nn} = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n}$$

$$\sigma_{nn} = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2 + 2\sigma_{13} n_1 n_3$$

ε3) Διατμητική τάση τ_n

$$\tau_n^2 = \sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2$$

$$\tau_n^2 = (\sigma_{n1} n_2 - \sigma_{n2} n_1)^2 + (\sigma_{n2} n_3 - \sigma_{n3} n_2)^2 + (\sigma_{n3} n_1 - \sigma_{n1} n_3)^2$$

ε4) Αμοιβαιότητα τάσεων

$$\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n}' = \boldsymbol{\sigma}_n' \cdot \mathbf{n}$$

όπου $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ κάθετα διανύσματα σε τυχαίες τομές γύρω από ένα σημείο Μ και $\boldsymbol{\sigma}_n$, $\boldsymbol{\sigma}_n'$ τα αντίστοιχα διανύσματα τάσης.

ς) Ο τανυστής των τάσεων σε νέο σύστημα αναφοράς.

Οι τάσεις μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη σχέση

$$\sigma'_{ij} = r_{ik} r_{j\ell} \sigma_{k\ell}$$

ζ) Εξισώσεις ισορροπίας.

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + F_2 = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0$$

(Εκφράζουν την ισορροπία ενός κόκκου του σώματος).

(F_1, F_2, F_3) = μαζική δύναμη.

η) Κύριες τάσεις. Κύριες διευθύνσεις.

Τα κατευθύνοντα συνημίτονα (n_1, n_2, n_3) των κυρίων διευθύνσεων I, II, III προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος

$$(\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0$$
$$\sigma_{21} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma) n_2 + \sigma_{23} n_3 = 0$$
$$\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma) n_3 = 0$$
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

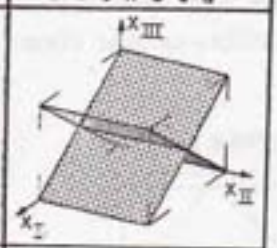
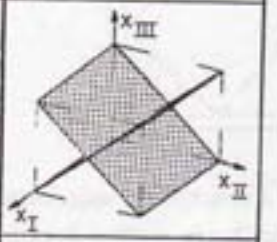
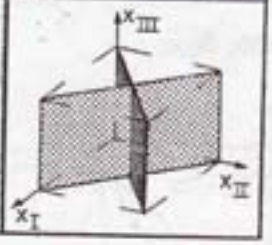
αν, όπου σ, τεθούν οι τιμές σ_I, σ_{II}, σ_{III} που είναι οι ρίζες της ορίζουσας των συντελεστών των αγνώστων του παραπάνω ομογενούς συστήματος. (Προφανώς κατά τον προσ-

διορισμό των n_1, n_2, n_3 μία τουλάχιστον από τις εξισώσεις είναι γραμμικά εξαρτημένη από τις άλλες δύο, δηλαδή το σύστημα περιλαμβάνει μόνο τρεις εξισώσεις).

Αν $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$, τότε οι σ_I, σ_{III} αποτελούν το ακρότατο των διαγωνίων όρων του τανυστή των τάσεων για κάθε σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή

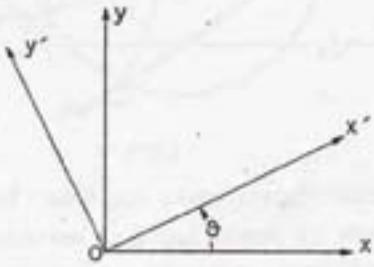
$$\sigma_I \geq \max(\sigma'_{11}, \sigma'_{22}, \sigma'_{33}), \qquad \sigma_{III} \geq \min(\sigma'_{11}, \sigma'_{22}, \sigma'_{33})$$

θ) Μέγιστες διατμητικές τάσεις.

n_I	n_{II}	n_{III}	σ_{nn}	τ_{nn}	Επίπεδα
$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}(\sigma_I+\sigma_{III})$	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_I-\sigma_{III})$	
0	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}(\sigma_{II}-\sigma_{III})$	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_{II}-\sigma_{III})$	
$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}(\sigma_I+\sigma_{II})$	$\pm\frac{1}{2}(\sigma_I-\sigma_{II})$	

Β. επίπεδη εντατική κατάσταση

α) Προσδιορισμός τάσεων σε τομές κεκλιμένες ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς.



$$\sigma'_{xx} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\cos 2\theta + \sigma_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\cos 2\theta - \sigma_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma'_{xy} = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\sin 2\theta + \sigma_{xy}\cos 2\theta$$

β) Κύριες τάσεις-κύριες διευθύνσεις.

Οι κύριες τάσεις σ_I, σ_{II} ($\sigma_{III} = 0$) είναι:

$$\sigma_{I,\,II} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

με διευθύνσεις που δίνονται από τη σχέση:

$$\tan 2\theta_o = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}$$

γ) Μέγιστη διατμητική τάση.

Η μέγιστη διατμητική τάση είναι:

$$\tau_{max} = \max\left[\pm\frac{\sigma_I}{2},\ \pm\frac{\sigma_{II}}{2},\ \pm\frac{\sigma_I-\sigma_{II}}{2}\right]$$

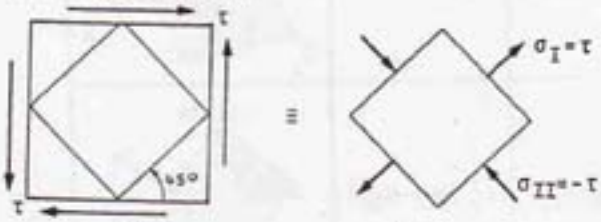
Αν $\sigma_I\sigma_{II} < 0$, τότε

$$\tau_{max} = \pm\frac{\sigma_I-\sigma_{II}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\sigma_{xy}^2}$$

Η τάση αυτή εμφανίζεται σε τομή που περιλαμβάνει τον άξονα των z. Η γωνία θ_δ που σχηματίζει με τους άξονες Ox και Oy είναι:

$$\tan 2\theta_\delta = -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2\sigma_{xy}}$$

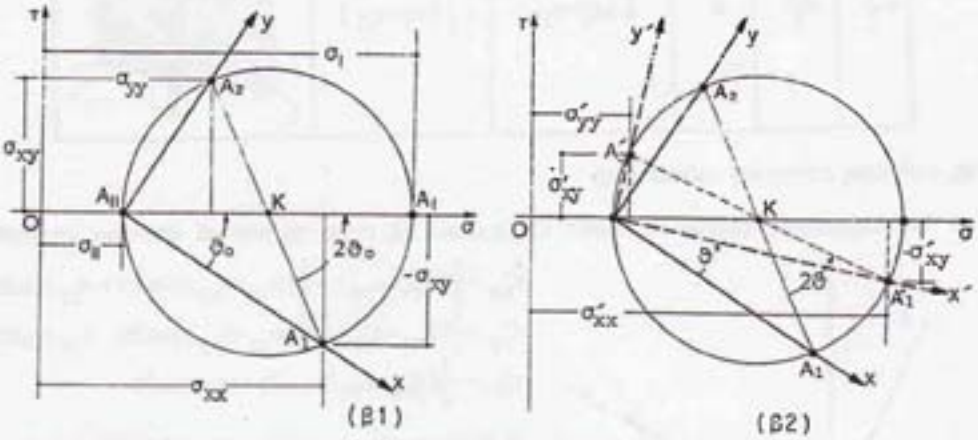
δ) Καθαρή διάτμηση.



(α1) (α2)

Το στοιχείο καταπονείται μόνο από διατμητικές τάσεις (Σχήμα α1). Τέτοια κατάσταση εμφανίζεται π.χ. στη στρέψη. Η καθαρή διάτμηση είναι ισοδύναμη με την εντατική κατάσταση που φαίνεται στο σχήμα α2. Άρα μπορεί να επιτευχθεί καθαρή διάτμηση αν εφαρμοσθεί κατά μία διεύθυνση καθαρός εφελκυσμός με ένταση $\sigma_I=\tau$ και κατά την κάθετη διεύθυνση καθαρή θλίψη με ένταση $\sigma_{II}=-\tau$.

ε) Κύκλος Mohr.



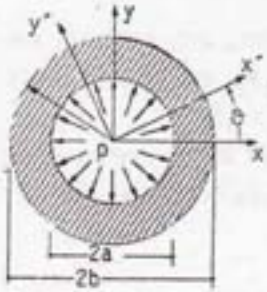
(β1) (β2)

Μία επίπεδη εντατική κατάσταση μπορεί να παρασταθεί από τον κύκλο του Mohr (Σχ.β1). Ο κύκλος μπορεί να κατασκευασθεί αν προσδιορισθούν τα σημεία A_1, A_2 με συντεταγμένες αντίστοιχα $(\sigma_{xx}, -\sigma_{xy})$, $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy})$ που αναφέρονται στο σύστημα συντεταγμένων Oστ. Το κέντρο K είναι το σημείο τομής της Oσ με την A_1A_2 και η ακτίνα είναι ίση με $(KA_1) = (KA_2)$. Οι κύριες τάσεις είναι $\sigma_I=(OA_I)$ και $\sigma_{II}=(OA_{II})$. (Σχ.β1).

Το κύριο σύστημα αξόνων συμπίπτει με το Ozt, ενώ ο άξονας των x έχει τη διεύθυνση $A_{II}A_1$ και ο άξονας των y τη διεύθυνση $A_{II}A_2$. Επομένως η γωνία στροφής θ_o από το αρχικό σύστημα στο κύριο είναι η γωνία $A_1A_{II}A_I$.

Αν είναι γνωστό το σύστημα $A_{II}xy$ (Σχήμα Β2), η εντατική κατάσταση στο σύστημα $A_{II}x'y'$ που προκύπτει από στροφή κατά γωνία θ δίνεται από τις συντεταγμένες των σημείων $A_1'(\sigma_{xx}', -\sigma_{xy}')$, $A_2'(\sigma_{yy}', \sigma_{xy}')$.

3.1



Να αποδειχθεί ότι το πεδίο των τάσεων

$$\sigma_{xx} = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left\{1 - \frac{b^2}{x^2+y^2} + \frac{2b^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left\{1 - \frac{b^2}{x^2+y^2} + \frac{2b^2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right\}$$

$$\sigma_{xy} = -2\frac{pa^2b^2}{b^2-a^2}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

επιλύει το πρόβλημα του δακτυλίου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Στον δακτύλιο θα πρέπει: (α) Η τάση η κάθετη στο κυκλικό σύνορο r=b να είναι μηδενική. (β) Η τάση η κάθετη στο κυκλικό σύνορο r=a να είναι ίση με -p. (γ) $\sigma'_{xy}=0$ για κάθε x', y'.

Ισχύει:

$$\sigma'_{xx} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\cos 2\theta + \sigma_{xy}\sin 2\theta$$

αλλά

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy} = \frac{2pa^2}{b^2-a^2}$$

και

$$\sigma_{xx}-\sigma_{yy} = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left\{\frac{2b^2}{(x^2+y^2)^2}(y^2-x^2)\right\} = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left\{\frac{2b^2}{r^4}(r^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta)\right\} = -\frac{pa^2}{b^2-a^2}\frac{2b^2}{r^2}\cos 2\theta$$

επομένως

$$\sigma'_{xx} = \frac{pa^2}{b^2-a^2} - \frac{pa^2b^2}{b^2-a^2}\frac{\cos^2 2\theta}{r^2} - 2\frac{pa^2b^2}{b^2-a^2}\frac{r\cos\theta r\sin\theta}{r^4}\sin 2\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma'_{xx} = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left\{1 - \frac{b^2}{r^2}(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)\right\} \Leftrightarrow \sigma'_{xx} = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left\{1 - \frac{b^2}{r^2}\right\}$$

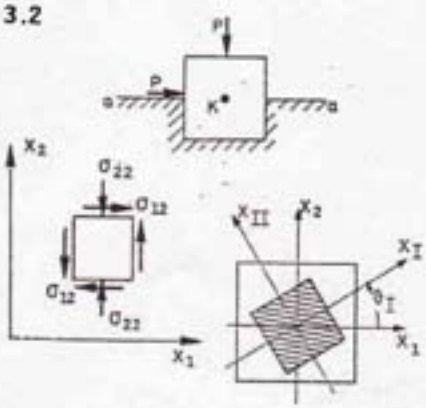
οπότε

$$\sigma'_{xx}\Big|_{r=b} = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left\{1-\frac{b^2}{b^2}\right\} = 0, \qquad \sigma'_{xx}\Big|_{r=a} = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left\{1-\frac{b^2}{a^2}\right\} = -p$$

$$\sigma'_{xy} = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})\sin 2\theta + \sigma_{xy}\cos 2\theta = \frac{pa^2b^2}{b^2-a^2}\frac{\cos 2\theta\sin 2\theta}{r^2} - \frac{pa^2b^2}{b^2-a^2}\frac{\sin 2\theta\cos 2\theta}{r^2} \Leftrightarrow \sigma'_{xy} = 0$$

δηλαδή ικανοποιούνται οι απαιτήσεις (α), (β) και (γ) του προβλήματος.

3.2



Το μικρών διαστάσεων πρίσμα του σχήματος δέχεται κατακόρυφη δύναμη P=2500kp και ίση εγκάρσια τέμνουσα δύναμη (όπως φαίνεται στο σχήμα). Αν υποθέσουμε ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων στη διατομή aa, εμβαδού A=2,5cm², να βρεθεί η εντατική κατάσταση σε οποιαδήποτε θέση K της διατομής.

Η κατακόρυφη δύναμη P προκαλεί θλιπτική ορθή τάση:

$$\sigma_{22} = \frac{P}{A} \Rightarrow \sigma_{22} = \frac{-2500}{2,5}\frac{kp}{cm^2} = -1000at$$

ενώ η εγκάρσια δύναμη P προκαλεί λόγω της πάκτωσης διατμητική τάση όπως στο σχήμα

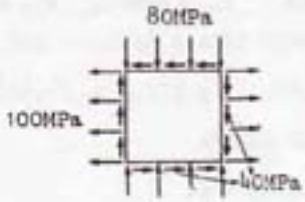
$$\sigma_{12} = \frac{P}{A} \Rightarrow \sigma_{12} = 1000at$$

οπότε

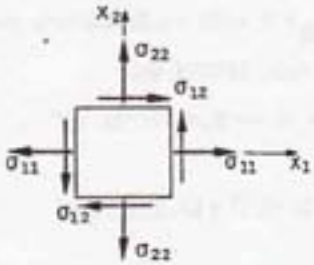
$$\sigma_{I,II} = \frac{1}{2}\sigma_{22} \pm \frac{1}{2}(\sigma_{22}^2 + 4\sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_I = 618{,}03\text{at} \\ \sigma_{II} = -1618{,}03\text{at} \end{cases}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{12}}{-\sigma_{22}} \Rightarrow \begin{cases} \theta_I = 31°43'2{,}82'' \\ \theta_{II} = -58°16'57{,}18'' \end{cases}$$

3.3



Σε ένα σημείο ενός μέλους μιας κατασκευής που υποβάλλεται σε επίπεδη ένταση υπάρχουν τάσεις σε οριζόντιο και κατακόρυφο επίπεδο όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Ζητούνται να προσδιορισθούν οι κύριες τάσεις και η μέγιστη διατμητική τάση στο σημείο αυτό, καθώς επίσης και τα επίπεδα πάνω στα οποία δρουν οι τάσεις αυτές.



Σύμφωνα με το συμβολισμό του διπλανού σχήματος έχουμε

$$\sigma_{11} = 100\text{MPa}, \quad \sigma_{22} = -80\text{MPa}, \quad \sigma_{12} = -40\text{MPa}$$

οπότε οι κύριες τάσεις δίνονται από τη σχέση

$$\sigma_{I,II} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \frac{1}{2}\{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{I,II} = 10 \pm 10\sqrt{97} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_I = 108{,}489\text{MPa} \\ \sigma_{II} = -88{,}489\text{MPa} \end{cases}$$

οπότε η γωνία στροφής του συστήματος αξόνων είναι:

$$\tan 2\theta_o = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \Leftrightarrow \tan 2\theta_o = -\frac{4}{9} \Leftrightarrow 2\theta_o = -23°57'45'' \Leftrightarrow \theta_o = -11°58'53''$$

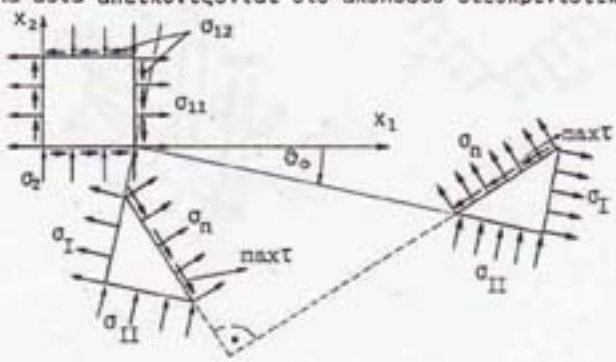
Η μέγιστη διατμητική τάση είναι

$$\max\tau = \frac{1}{2}|\sigma_I - \sigma_{II}| \Leftrightarrow \max\tau = 10\sqrt{97} = 98{,}489\text{MPa}$$

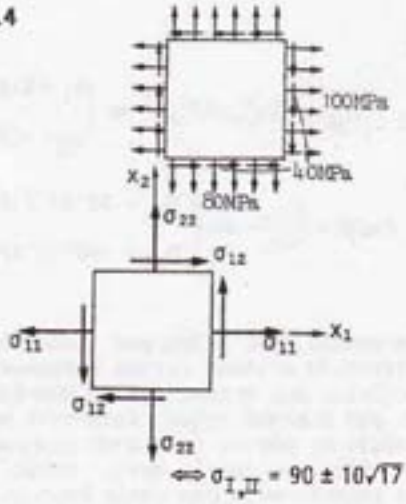
και η αντίστοιχή της ορθή τάση είναι:

$$2\sigma_n = \sigma_{11} + \sigma_{22} \Leftrightarrow \sigma_n = 10\text{MPa}$$

Ολα αυτά απεικονίζονται στο ακόλουθο διευκρινιστικό σχήμα



3.4



Σε ένα σημείο ενός στοιχείου μηχανής υπολογίσθηκαν οι τάσεις σε οριζόντιο και κατακόρυφο επίπεδο, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Ζητούνται να προσδιορισθούν οι κύριες τάσεις και η μέγιστη διατμητική τάση στο σημείο αυτό, καθώς επίσης και τα επίπεδα πάνω στα οποία δρουν οι τάσεις αυτές.

Σύμφωνα με το συμβολισμό των θετικών τάσεων (που υπενθυμίζουμε στο διπλανό σχήμα), έχουμε ότι

$$\sigma_{11} = 100\text{MPa}, \quad \sigma_{22} = 80\text{MPa}, \quad \sigma_{12} = -40\text{MPa}$$

οπότε οι κύριες τάσεις δίνονται από τη σχέση:

$$\sigma_{I,II} = \frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \pm \frac{1}{2}\left\{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{I,II} = 90 \pm 10\sqrt{17} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_I = 131{,}231\text{MPa} \\ \sigma_{II} = 48{,}769\ \text{MPa} \end{cases}$$

και $\sigma_{III} = 0$ κατά τη διεύθυνση του x_3

Η γωνία στροφής θ_o του συστήματος αξόνων είναι τέτοια ώστε

$$\tan 2\theta_o = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}} \Rightarrow \tan 2\theta_o = -4 \Rightarrow \theta_o = -37°58'55''$$

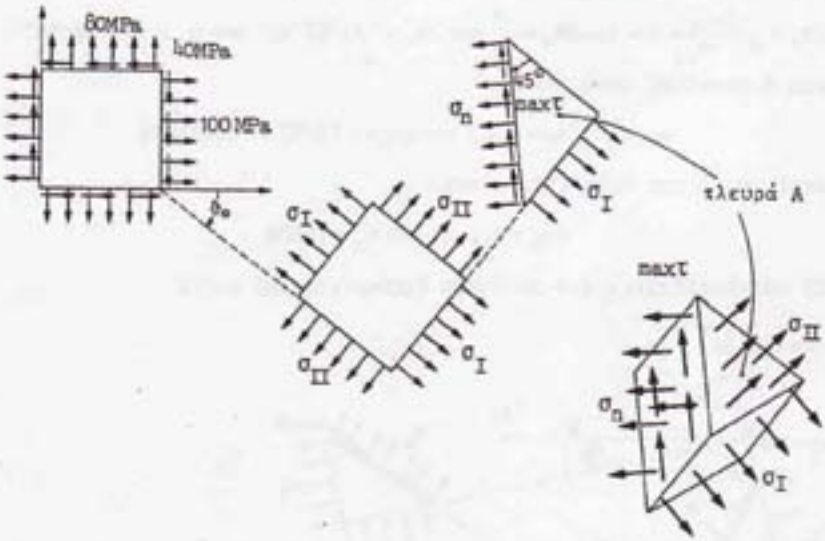
Η μέγιστη διατμητική τάση είναι:

$$\max\tau = \frac{1}{2}|\sigma_I - \sigma_{III}| \Leftrightarrow \max\tau = 45 + 5\sqrt{17} = 65{,}616\text{MPa}$$

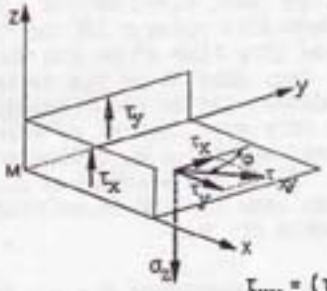
και η αντίστοιχή της ορθή τάση είναι:

$$2\sigma_n = \sigma_I + \sigma_{III} \Leftrightarrow \sigma_n = 65{,}616\text{MPa}$$

Όλα αυτά απεικονίζονται στο ακόλουθο διευκρινιστικό σχήμα.



3.5 Από το σημείο Μ ελαστικού σώματος διέρχονται τα ανά δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα xy, yz και zx. Στο επίπεδο xy επενεργεί κατά τη διεύθυνση (-z) η κάθετη τάση $\sigma_z = 200$at. Τα άλλα επίπεδα καταπονούνται μόνο από διατμητικές τάσεις και μάλιστα το yz από την $\tau_y = 150$at κατά τη διεύθυνση (+z) και το zx από τη $\tau_x = 80$at επίσης κατά τη διεύθυνση (+z). Ποιά είναι η τιμή της διατμητικής τάσης τ στο επίπεδο xy και ποιά γωνία σχηματίζει αυτή με τον άξονα των x. Ποιές είναι οι τιμές των κυρίων τάσεων στο Μ;



Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος και το διπλανό σχήμα σχήμα, έχουμε:

$\sigma_{yz} \equiv \tau_x = -80$at, $\sigma_{zx} \equiv \tau_y = -150$at, $\sigma_{zz} \equiv \sigma_z = 200$at

και

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$$

οπότε η διατμητική τάση στο επίπεδο xy είναι:

$$\tau_{xy} = (\tau_x^2 + \tau_y^2)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \tau_{xy} = 170\text{at}$$

$$\varphi = \arctan\frac{\tau_y}{\tau_x} \Leftrightarrow \varphi = 61°55'39''$$

Για τις κύριες τάσεις έχουμε:

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & -150 \\ 0 & -\sigma & -80 \\ -150 & -80 & 200-\sigma \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\sigma\{-\sigma(200-\sigma)-80^2\}+150^2\sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma(-\sigma^2+200\sigma+80^2+150^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma(\sigma^2-200\sigma-170^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_I = -97{,}231\text{at} \\ \sigma_{II} = 0\text{at} \\ \sigma_{III} = 297{,}231\text{at} \end{cases}$$

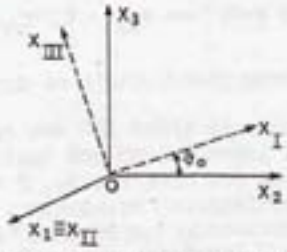
3.6 Δίνεται (σ_{ij}) ο τανυστής των τάσεων

$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 230 & 130 \\ 0 & 130 & 50 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

και ζητούνται: (α) Οι διευθύνσεις και οι τιμές των κύριων τάσεων, (β) Οι διευθύνσεις και οι τιμές των μέγιστων διατμητικών τάσεων.

α) Εστω ότι i,j=1,2,3. Προφανώς η μία των κυρίων τάσεων είναι η σ_{11}, οι άλλες δύο θα βρεθούν επιλύοντας το επίπεδο πρόβλημα στο επίπεδο Ox_2x_3, δηλαδή

$$\sigma_{I,II} = \frac{1}{2}(\sigma_{22}+\sigma_{33}) \pm \frac{1}{2}\{(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+4\sigma_{23}^2\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sigma_{I,II} = 140 \pm 50\sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_I = 298{,}114\text{MPa} \\ \sigma_{II} = -18{,}114\text{MPa} \end{cases}$$



η γωνία στροφής θ_o είναι τέτοια ώστε

$$\tan 2\theta_o = \frac{2\sigma_{23}}{\sigma_{22}-\sigma_{33}} \Rightarrow \tan 2\theta_o = \frac{13}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\theta_o = 55°18'17{,}5'' \text{ και } \theta_o = 27°39'8{,}7''$$

Δηλαδή

$\sigma_I = 298{,}114$MPa, $\sigma_{II} = 100$MPa, $\sigma_{III} = -18{,}114$MPa

με τις διευθύνσεις όπως φαίνονται στο σχήμα

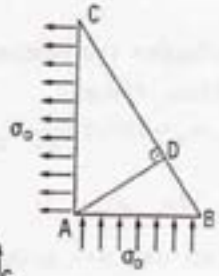
β) Οι μέγιστες διατμητικές τάσεις είναι:

$\tau_1 = \frac{1}{2}|\sigma_I - \sigma_{II}| = 99{,}057$MPa στο επίπεδο Ox_Ix_{II} στραμμένο κατά 45°

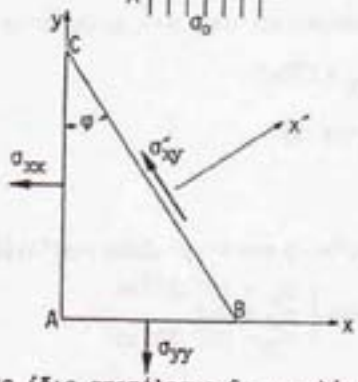
$\tau_2 = \frac{1}{2}|\sigma_{II} - \sigma_{III}| = 59{,}057 MPa$ στο επίπεδο $Ox_{II}x_{III}$ στραμμένο κατά γωνία 45°

$\tau_3 = \frac{1}{2}|\sigma_{III} - \sigma_{I}| = 158{,}114 MPa$ στο επίπεδο $Ox_{I}x_{III}$ στραμμένο κατά γωνία 45°

3.7



Ορθό πρίσμα ύψους t, του οποίου η διατομή είναι το ορθογώνιο τρίγωνο ABC του σχήματος, καταπονείται στην έδρα AB με μια θλιπτική τάση σ_o και στην έδρα AC με μια εφελκυστική τάση σ_o. Ζητούνται: (α) Να προσδιορισθεί η γωνία ACB έτσι ώστε στην έδρα BC να εμφανίζονται μόνο διατμητικές τάσεις οι οποίες και να υπολογισθούν. (β) Να υπολογισθούν οι τάσεις που εμφανίζονται στην τομή AD το επίπεδο της οποίας είναι κάθετο στο BC.



(α) Η εντατική κατάσταση που μας δόθηκε είναι επίπεδη, με

$$\sigma_{xx} = \sigma_o, \quad \sigma_{yy} = -\sigma_o, \quad \sigma_{xy} = 0$$

έχουμε δηλαδή μια κατάσταση καθαρής διάτμησης.

Διατμητικές τάσεις, χωρίς ορθές θα έχουμε, όταν η γωνία φ της τομής γίνει ίση με 45° οπότε η ένταση της διατμητικής τάσης σ'_{xy} στο νέο σύστημα αναφοράς θα είναι $\sigma'_{xy} = \sigma_o$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν βρίσκαμε τις μέγιστες διατμητικές τάσεις, δηλαδή

$$|\max\tau| = \frac{1}{2}|\sigma_I - \sigma_{II}| = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} = \sigma_o$$

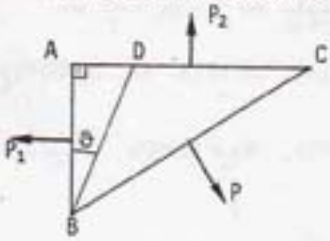
Μπορούσαμε βέβαια να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους στροφής για να φθάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Έτσι οι τάσεις πάνω στη BC που είναι κάθετος στην Ax' είναι:

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_{xx} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\varphi + \sigma_{xy}\sin 2\varphi \\ \sigma'_{xy} &= -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\varphi + \sigma_{xy}\cos 2\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \sigma'_{xx} &= \sigma_o \cos 2\varphi \\ \sigma'_{xy} &= -\sigma_o \sin 2\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{για } \varphi = 45° \Rightarrow \sigma'_{xx} = 0,\ \sigma'_{xy} = -\sigma_o$$

(β) Επειδή έχουμε καθαρή διάτμηση στην τομή AD έχουμε μόνο διατμητική τάση $\sigma'_{xy} = -\sigma_o$.

3.8

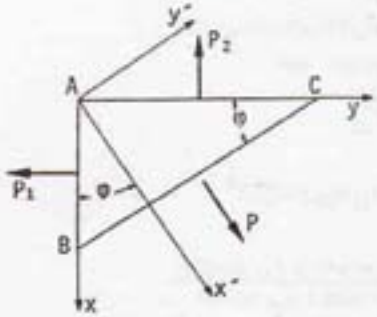


Η λεπτή τριγωνική πλάκα ABC του σχήματος έχει πάχος t και καταπονείται από τρεις ομοιόμορφα κατανεμημένες δυνάμεις P_1, P_2, P που δρουν κάθετα στις αντίστοιχες επιφάνειες. Είναι γνωστό ότι η αντίστοιχη της δύναμης P ορθή τάση έχει μέτρο σ_o. Ζητούνται να προσδιορισθούν οι τάσεις: (α) στις έδρες AB και BC. (β) σε μια τυχαία τομή BD που σχηματίζει γωνία θ με την

έδρα AB.

(25% Εξέτασης 10/9/1986)

(Πρόκειται για την άσκηση 1.12 του αντιμετωπίσαμε με εξισώσεις ισορροπίας).



Από την εκφώνηση συμπεραίνουμε ότι το σύστημα Axy είναι κύριο. Επίσης με στροφή του συστήματος κατά γωνία φ το νέο σύστημα Ax'y˝ είναι κύριο γιατί πάνω στη BC που είναι κάθετη στον άξονα Ax˝, δεν υπάρχουν διατμητικές τάσεις. Έχουμε δηλαδή δύο κύρια συστήματα, το Axy και το Ax'y˝. Κάτι τέτοιο συμβαίνει μόνον όταν έχουμε σφαιρικό τανυστή, οπότε κάθε σύστημα θα είναι κύριο.

Αφού λοιπόν οι τάσεις είναι ίδιες παντού, έχουμε:

$$\frac{P}{(BC)t}=\frac{P_1}{(AB)t}=\frac{P_2}{(AC)t} \Leftrightarrow \sigma'_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{xx}$$

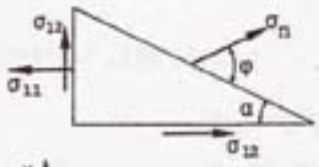
δηλαδή

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma'_{xx}=\sigma_o.$$

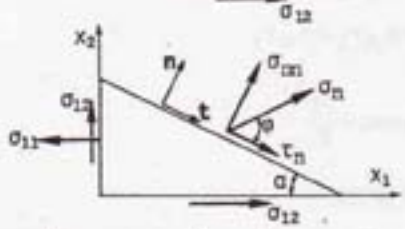
Είναι φανερό ότι και στη τομή BD οι τάσεις είναι κύριες και ίσες με την προηγούμενη τιμή.

Παρατήρηση: Αν αντιμετωπίζαμε το πρόβλημα με τον κύκλο του Mohr θα βλέπαμε ότι μόνον αν εκφυλισθεί ο κύκλος σε σημείο θα μπορούσαμε να έχουμε και σε μια άλλη τομή κύριες τάσεις.

3.9



Στις έδρες AB και AΓ ενός πρισματικού δοκιμίου με διατομή το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ και πάχος t επιδρούν οι τάσεις σ_{11} και σ_{12}, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογισθεί η ένταση και η διεύθυνση της τάσης σ_n που δρα πάνω στην έδρα BΓ.



Εστω **n** το κάθετο και **t** το εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα στην πλευρά **BΓ**, οι συνιστώσες των οποίων είναι:

$n_1=\sin\alpha$, $n_2=\cos\alpha$, $t_1=\cos\alpha$, $t_2=-\sin\alpha$.

Αναλύοντας την σ_n σε μια ορθή σ_{nn} και μια διατμητική τ_n συνιστώσα, έχουμε ότι:

$$\sigma_{nn}=\sigma_{ij}n_in_j \Leftrightarrow \sigma_{nn}=\sigma_{11}n_1^2+2\sigma_{12}n_1n_2 \Leftrightarrow \sigma_{nn}=\sigma_{11}\sin^2\alpha+2\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma_{nn}=\sigma_{11}\sin^2\alpha+\sigma_{12}\sin2\alpha.$$

επίσης

$$\tau_n=\sigma_{ij}n_it_j \Leftrightarrow \tau_n=\sigma_{11}n_1t_1+\sigma_{12}(n_1t_2+n_2t_1)$$
$$\Leftrightarrow \tau_n=\sigma_{11}\sin\alpha\cos\alpha+\sigma_{12}(-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) \Leftrightarrow \tau_n=\frac{\sigma_{11}}{2}\sin2\alpha+\sigma_{12}\cos2\alpha$$

οπότε

$$\sigma_n^2 = \sigma_{nn}^2 + \tau_n^2 \Leftrightarrow \sigma_n^2 = \sigma_{11}^2 \sin^4\alpha + 4\sigma_{12}^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4\sigma_{11}\sigma_{12}\sin^3\alpha\cos\alpha +$$
$$+ \sigma_{11}^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sigma_{12}^2(-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha(-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$
$$\Leftrightarrow \sigma_n^2 = \sigma_{11}^2 \sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) + \sigma_{12}^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 +$$
$$+ 2\sigma_{11}\sigma_{12}\sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma_n^2 = \sigma_{11}^2 \sin^2\alpha + \sigma_{11}\sigma_{12}\sin 2\alpha + \sigma_{12}^2$$

δηλαδή

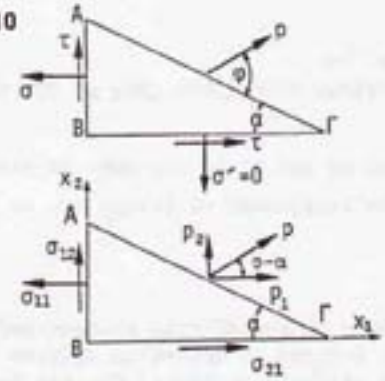
$$\sigma_n = (\sigma_{11}^2 \sin^2\alpha + \sigma_{12}^2 + \sigma_{11}\sigma_{12}\sin 2\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

και

$$\tan\varphi = \frac{\sigma_{nn}}{\tau_n} \Leftrightarrow \tan\varphi = \frac{2(\sigma_{11}\sin^2\alpha + \sigma_{12}\sin 2\alpha)}{\sigma_{11}\sin 2\alpha + \sigma_{12}\cos 2\alpha} .$$

Παρατήρηση: Αντίστοιχο πρόβλημα αντιμετωπίσαμε στην άσκηση 1.11 με εφαρμογή των εξισώσεων ισορροπίας.

3.10



Πρίσμα με διατομή το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος και γωνία $\alpha = 30°$ καταπονείται όπως στο σχήμα. Να υπολογισθεί η ολική τάση p στην πλευρά ΑΓ καθώς και η γωνία φ που σχηματίζει η διεύθυνσή της με την ΑΓ, αν σ=100Pa και τ=80Pa.

Σύμφωνα με το ορθογώνιο σύστημα αξόνων Bx_1x_2, ισχύουν:

$\sigma_{11} = 100\text{Pa}$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -80\text{Pa}$, $\sigma_{22} = 0$

και

$$p = (p_1^2 + p_2^2), \quad \tan(\varphi-\alpha) = \frac{p_2}{p_1}$$

όμως

$$p_i = \sigma_{ij} r_j \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \sigma_{11} r_1 + \sigma_{12} r_2 \\ p_2 = \sigma_{12} r_1 + \sigma_{22} r_2 \end{cases}$$

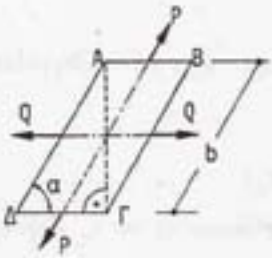
όπου

$$r_1 = \sin\alpha = \frac{1}{2}, \quad r_2 = \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

επομένως

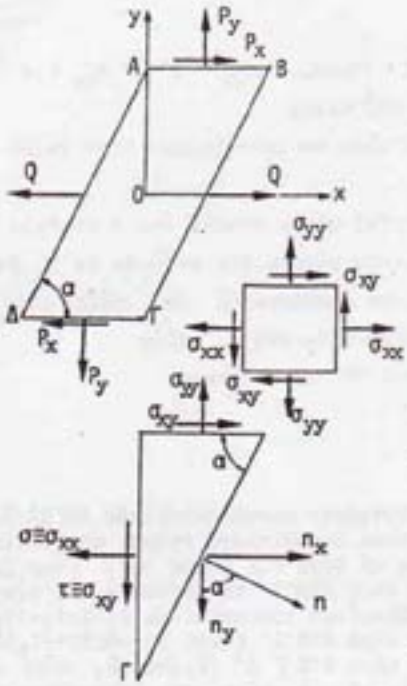
$$p = 44{,}4\ \text{Pa}, \quad \varphi = 94°15'36''$$

3.11



Ορθό πρίσμα ύψους h έχει βάση το παραλληλόγραμμο που φαίνεται στο διπλανό σχήμα και καταπονείται από τέσσερις, ανά δύο αντίθετες δυνάμεις P και Q. Θεωρώντας την κατανομή των τάσεων στο πρίσμα ομοιόμορφη να υπολογισθούν η ορθή τάση σ και η διατμητική τ στο διαγώνιο επίπεδο ΑΓ.

(Πρόκειται για την άσκηση 1.13 που την αντιμετωπίσαμε με εξισώσεις ισορροπίας).



Αναλύω την P σε δύο συνιστώσες μία κάθετη την P_y και μια εφαπτομενική την P_x οπότε

$$P_x = P\cos\alpha, \qquad P_y = P\sin\alpha$$

δηλαδή στην έδρα ΑΒ έχουμε ορθή τάση σ_{yy} και διατμητική σ_{xy} τέτοιες ώστε

$$\sigma_{yy} = \frac{P_y}{h(\Gamma\Delta)} \Leftrightarrow \sigma_{yy} = \frac{P\sin\alpha}{hb\cos\alpha} \Leftrightarrow \sigma_{yy} = \frac{P}{hb}\tan\alpha$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P_x}{h(\Gamma\Delta)} \Leftrightarrow \sigma_{xy} = \frac{P\cos\alpha}{hb\cos\alpha} \Leftrightarrow \sigma_{xy} = \frac{P}{hb}$$

επομένως η μόνη άγνωστη είναι η σ_{xx}.

Πάνω στην έδρα ΒΓ δρα η τάση σ_n η οποία προέρχεται από τη δύναμη Q που έχει διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα των x, δηλαδή

$$\sigma_{nx} = \frac{Q}{hb}, \qquad \sigma_{ny} = 0$$

Ισχύει όμως η σχέση:

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij}n_j \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{nx} = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y \\ \sigma_{ny} = \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y \end{cases}$$

όπου

$$n_x = \sin\alpha, \qquad n_y = -\cos\alpha$$

συνεπώς

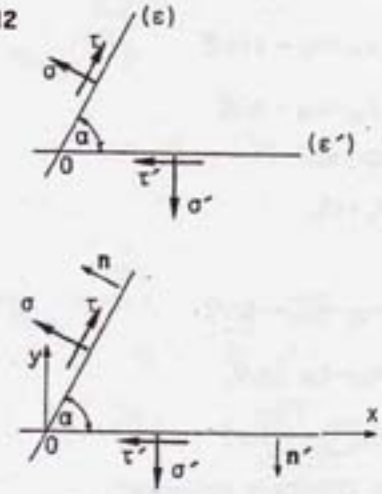
$$\frac{Q}{hb} = \sigma_{xx}\sin\alpha + \frac{P}{hb}(-\cos\alpha) \Leftrightarrow \sigma_{xx} = \frac{Q+P\cos\alpha}{hb\sin\alpha}$$

ενώ

$$0 = \frac{P}{hb}\sin\alpha - \frac{P}{hb}\tan\alpha\cos\alpha \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (ταυτότης)}$$

Προσδιορίσθηκαν δηλαδή η ορθή και η διατμητική τάση στο διαγώνιο επίπεδο ΑΓ.

3.12



Από το σημείο 0 παραμορφώσιμου στερεού σώματος διέρχονται δύο επίπεδα (ε) και (ε΄) τα οποία, σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία α. Πάνω στα επίπεδα αυτά δρουν οι διατμητικές τάσεις τ και τ΄ με διευθύνσεις όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να αποδειχθεί ότι οι αντίστοιχες ορθές τάσεις σ και σ΄ (με τις διευθύνσεις του σχήματος) συνδέονται με την σχέση:

$$\sigma' - \sigma = (\tau + \tau')\tan\alpha$$

(Πρόκειται για την άσκηση 1.15 που την αντιμετωπίσαμε με εξισώσεις ισορροπίας).

Εστω **n**, **n**΄ τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα στα επίπεδα (ε) και (ε΄), τα οποία έχουν συνημίτονα κατεύθυνσης (συνιστώσες)

$$n_x = -\sin\alpha, \quad n_y = \cos\alpha, \quad n'_x = 0, \quad n'_y = -1$$

Επίσης, έστω σ_n, σ'_n τα διανύσματα τάσης στα ε-

πίπεδα (ε), (ε΄) που έχουν συνιστώσες

$$\sigma_{nx} = -\sigma\sin\alpha + \tau\cos\alpha, \quad \sigma_{ny} = \sigma\cos\alpha + \tau\sin\alpha, \quad \sigma'_{nx} = -\tau', \quad \sigma'_{ny} = -\sigma'$$

οπότε η σχέση ομοιβαιότητας των τάσεων μας δίνει

$$\sigma_n n' = \sigma'_n n \Leftrightarrow -\sigma\cos\alpha - \tau\sin\alpha = \tau'\sin\alpha - \sigma'\cos\alpha \Leftrightarrow (\sigma'-\sigma)\cos\alpha = (\tau+\tau')\sin\alpha \Leftrightarrow$$

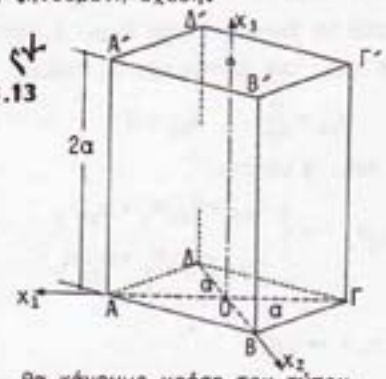
$$\Leftrightarrow \sigma'-\sigma = (\tau+\tau')\tan\alpha$$

Παρατήρηση: Από τη συνθήκη ομοιβαιότητας είναι γνωστό ότι η προβολή του διανύσματος της τάσης του επιπέδου (ε) πάνω στην κάθετο στο επίπεδο (ε΄), δηλαδή στην σ΄, πρέπει να είναι ίση με την προβολή του διανύσματος της τάσης του επιπέδου (ε΄) πάνω στην κάθετο στην τομή (ε) δηλαδή πάνω στη σ, οπότε

$$-\sigma\cos\alpha - \tau\sin\alpha = \tau'\sin\alpha - \sigma'\cos\alpha \Leftrightarrow \sigma'-\sigma = (\tau+\tau')\tan\alpha$$

η ζητούμενη σχέση.

3.13



Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, φορτίζεται ομοιόμορφα σε όλες τις έδρες του. Γνωρίζουμε ότι στην έδρα ΑΒΒ΄Α΄ το διάνυσμα των εξωτερικά επιβεβλημένων τάσεων είναι $\mathbf{t}_1 = 4c\mathbf{i}_1 + 11c\mathbf{i}_2 + 6c\mathbf{i}_3$, στην έδρα ΔΑΑ΄Δ΄ είναι $\mathbf{t}_2 = -8c\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + 2c\mathbf{i}_3$, ενώ στην έδρα Α΄Β΄Γ΄Δ΄ $|\mathbf{t}_3| = 6c\sqrt{2}$, όπου c σταθερά και $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ είναι τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x_1, x_2, x_3. Να προσδιορισθεί ο τανυστής των τάσεων.

Θα κάνουμε χρήση του τύπου

$$\boxed{\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j}$$

οπότε στην έδρα ΑΒΒ΄Α΄ με κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_2 + 0\mathbf{i}_3$$

έχουμε:

$$4c = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{11} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{12} \Leftrightarrow \sigma_{11} + \sigma_{12} = 4c\sqrt{2} \qquad (1)$$

$$11c = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{12} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{22} \Leftrightarrow \sigma_{12} + \sigma_{22} = 11c\sqrt{2} \qquad (2)$$

$$6c = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23} \Leftrightarrow \sigma_{13} + \sigma_{23} = 6c\sqrt{2} \qquad (3)$$

Στην έδρα ΔΑΑ΄Δ΄ με κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_2 + 0\mathbf{i}_3$$

παίρνουμε:

$$-8c = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{11} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{12} \Leftrightarrow \sigma_{11} - \sigma_{12} = -8c\sqrt{2} \qquad (4)$$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{12} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{22} \Leftrightarrow \sigma_{12} - \sigma_{22} = c\sqrt{2} \qquad (5)$$

$$2c = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{13} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{23} \Leftrightarrow \sigma_{13} - \sigma_{23} = 2c\sqrt{2} \qquad (6)$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τις αντίστοιχες εξισώσεις βρίσκουμε:

$$(1)+(4)\ \therefore \qquad 2\sigma_{11} = -4c\sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{11} = -2c\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{matrix}(1)-(4)\\(2)+(5)\end{matrix}\right\}\therefore \qquad 2\sigma_{12} = 12c\sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{12} = 6c\sqrt{2}$$

$$(2)-(5)\ \therefore \qquad 2\sigma_{22} = 10c\sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{22} = 5c\sqrt{2}$$

$$(3)+(6)\ \therefore \qquad 2\sigma_{13} = 8c\sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{13} = 4c\sqrt{2}$$

$$(3)-(6)\ \therefore \qquad 2\sigma_{23} = 4c\sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{23} = 2c\sqrt{2}$$

Επίσης στην έδρα Α΄Β΄Γ΄Δ΄ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα είναι:

$$\mathbf{n} = 0\mathbf{i}_1+0\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3$$

δηλαδή οι συνιστώσες του $\mathbf{t}_3$ είναι οι σ_{13}, σ_{23} και σ_{33}, επομένως:

$$|\mathbf{t}_3| = (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}^2)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 6c\sqrt{2} = (32c^2+8c^2+\sigma_{33}^2)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 72c^2 = 40c^2+\sigma_{33}^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma_{33}^2 = 32c^2 \Leftrightarrow \sigma_{33} = 4c\sqrt{2}$$

Συνεπώς ο τανυστής των τάσεων έχει την μορφή:

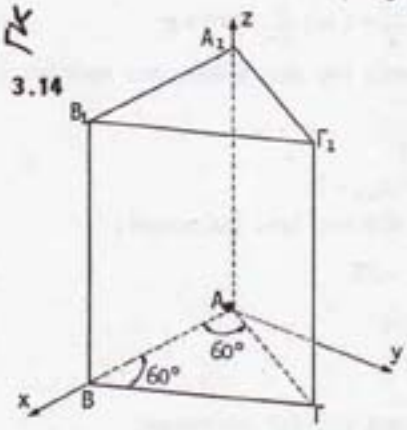
$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} -2c\sqrt{2} & 6c\sqrt{2} & 4c\sqrt{2} \\ 6c\sqrt{2} & 5c\sqrt{2} & 2c\sqrt{2} \\ 4c\sqrt{2} & 2c\sqrt{2} & 4c\sqrt{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow (\sigma_{ij}) = c\sqrt{2}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

οπότε με $C \equiv c\sqrt{2}$ έχουμε ότι:

$$(\sigma_{ij}) = C\begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Γκ

3.14



Το πρισματικό σώμα ΑΒΓΑ₁Β₁Γ₁ που έχει βάση το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εμφανίζει ένα ομοιόμορφο πεδίο τάσεων. Αυτό το πεδίο τάσεων το προκάλεσαν τα ακόλουθα ομοιόμορφα φορτία $\mathbf{t}^{(1)}$ στην έδρα $A_1B_1\Gamma_1$ και $-\mathbf{t}^{(1)}$ στην έδρα ΑΒΓ, $\mathbf{t}^{(2)}$ στην έδρα $B\Gamma\Gamma_1B_1$, $\mathbf{t}^{(3)}$ στην έδρα $A\Gamma\Gamma_1A_1$, και $\mathbf{t}^{(4)}$ στην έδρα $AB B_1A_1$. Γνωρίζουμε τις συνιστώσες των $\mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{t}^{(2)}$, $\mathbf{t}^{(3)}$ που είναι:

$$\mathbf{t}^{(1)} = (0, 2c, -2c)$$
$$\mathbf{t}^{(2)} = (-\sqrt{3}c, -c, c)$$
$$\mathbf{t}^{(3)} = (\sqrt{3}c, -c, c),$$ όπου c σταθερά

Να υπολογισθούν:

(α) Η εντατική κατάσταση στο σύστημα Axyz

(β) Οι συνιστώσες του $\mathbf{t}^{(4)}$

(γ) Οι κύριες τάσεις.

α) Ονομάζουμε

$$\mathbf{n}_o^{(k)}(n_x^{(k)}, n_y^{(k)}, n_z^{(k)}) \text{ για } k = 1,2,3$$

τα (προς τα έξω) κάθετα διανύσματα στις έδρες $A_1B_1\Gamma_1$, $B\Gamma\Gamma_1B_1$, $A\Gamma\Gamma_1A_1$ αντίστοιχα. Γενικά ισχύει ότι:

$$\Sigma\mathbf{n}^{(k)} = \mathbf{t}^{(k)}, \quad k = 1,2,3 \qquad (\alpha 1)$$

με άλλα λόγια

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x^{(k)} \\ n_y^{(k)} \\ n_z^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x^{(k)} \\ t_y^{(k)} \\ t_z^{(k)} \end{bmatrix} \quad k=1,2,3 \qquad (\alpha 2)$$

ή με τανυστική γραφή

$$\sigma_{ij} n_j^{(k)} = t_i^{(k)} \qquad i,j=x,y,z, \quad k=1,2,3 \tag{α3}$$

Δεδομένου ότι τα κάθετα διανύσματα $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$, καθώς και τα $\mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{t}^{(2)}$, $\mathbf{t}^{(3)}$ είναι γνωστά από την (α2), ή την (α3) προκύπτουν εννέα (9) γραμμικές σχέσεις ως προς τις έξι (6) συνιστώσες σ_{ij} του τανυστή των τάσεων. Αν το σύστημα των 9 εξισώσεων με τους 6 αγνώστους είναι συμβιβαστό, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε μονοσήμαντα τον τανυστή των τάσεων. Για να είναι όμως το σύστημα συμβιβαστό, πρέπει τα $\mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{t}^{(2)}$, $\mathbf{t}^{(3)}$ να είναι συμβιβαστά μεταξύ τους, δηλαδή, πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις αμοιβαιότητας:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{t}^{(1)}\mathbf{n}^{(2)} &= \mathbf{t}^{(2)}\mathbf{n}^{(1)} \\ \mathbf{t}^{(1)}\mathbf{n}^{(3)} &= \mathbf{t}^{(3)}\mathbf{n}^{(1)} \\ \mathbf{t}^{(2)}\mathbf{n}^{(3)} &= \mathbf{t}^{(3)}\mathbf{n}^{(2)} \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

αλλά

$$\mathbf{n}_1 = (0,0,1), \quad \mathbf{n}_2 = (\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2},0), \quad \mathbf{n}_3 = (-\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2},0)$$

οπότε οι σχέσεις (β) δίνουν τις παρακάτω ταυτότητες

$$0\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 2c\frac{1}{2} + (-2c)\ 0 = -\sqrt{3}c\ 0 + (-c)\ 0 + c\ 1 \Leftrightarrow c = c$$

$$0\ (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2c\ \frac{1}{2} + (-2c)\ 0 = \sqrt{3}c\ 0 + (-c)\ 0 + c\ 1 \Leftrightarrow c = c$$

$$-\sqrt{3}c\ (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-c)\ \frac{1}{2} + c\ 0 = \sqrt{3}c\ \frac{\sqrt{3}}{2} + (-c)\ \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = c$$

Μπορούμε λοιπόν, να προχωρήσουμε στη δημιουργία του συστήματος που προκύπτει από τις σχέσεις (α2).

Για k = 1 βρίσκουμε:

$$\sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 2c, \quad \sigma_{zz} = 2c \tag{γ}$$

Για k = 2 και λαμβάνοντας υπόψη την πρώτη από τις (γ), βρίσκουμε:

$$\sigma_{xx}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sigma_{xy}\frac{1}{2} = -c\sqrt{3} \tag{δ1}$$

$$\sigma_{xy}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sigma_{yy}\frac{1}{2} = -c \tag{δ2}$$

$$\sigma_{zy}\frac{1}{2} = c \tag{δ3}$$

Για k = 3 και λαμβάνοντας υπόψη την πρώτη από τις (γ) παίρνουμε:

$$-\sigma_{xx}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sigma_{xy}\frac{1}{2} = \sqrt{3}c \tag{ε1}$$

$$-\sigma_{xy}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sigma_{yy}\frac{1}{2} = -c \tag{ε2}$$

$$\sigma_{zy}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}c \tag{ε3}$$

Προσθέτοντας τις (ε1) και (δ1) βρίσκουμε ότι

$$\sigma_{xy} = 0$$

Από τις (δ1) και (δ2) προκύπτει ότι

$$\sigma_{xx} = -2c, \quad \sigma_{yy} = -2c$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (ε2) που δεν χρησιμοποιήθηκε επαληθεύεται (ταυτότης). Επίσης η δεύτερη σχέση από τις (γ) και οι (δ3), (ε3) δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Βλέπουμε λοιπόν ότι μπορούσαμε να αποφύγουμε την επαλήθευση (β) αφού το σύστημά μας αποτελείται μόνο από τις έξι εξισώσεις (γ), (δ1), (δ2) και (ε1).

Βέβαια τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά αν οι τάσεις $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$ εδίνοντο σε έδρες που δεν εμφανίζουν κανενός είδους παραλληλία προς τους άξονες x,y,z. Τότε η χρήση των εξισώσεων (β) είναι αναγκαία γιατί ελέγχουμε την ύπαρξη τυχόν λάθους δεδομένων, που θα καθιστούσαν αδύνατη τη λύση και μάταιη τη γραφή του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτουν από την (α2).

β) Λαμβάνοντας υπόψη ότι το κάθετο διάνυσμα στην έδρα ABB_1A_1 είναι $\mathbf{n}_4(0,-1,0)$ έχουμε από την (α2) τις συνιστώσες:

$$t_x^{(4)} = 0, \quad t_y^{(4)} = 2c, \quad t_z^{(4)} = -2c$$

γ) Αφού $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$, η σ_{xx} είναι κύρια τάση, δηλαδή ο άξονας Ox είναι κύριος. Μένει λοιπόν να υπολογισθούν οι άλλες δύο κύριες τάσεις και να προσδιορισθούν οι κύριες διευθύνσεις. Αυτό μπορεί να γίνει με περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox κατά γωνία θ_o, όπου

$$\tan 2\theta_o = \frac{2\sigma_{yz}}{\sigma_{yy}-\sigma_{zz}} = -1 \Rightarrow \theta_o = \begin{cases} -22,5^\circ \\ +67,5^\circ \end{cases}$$

οπότε οι κύριες τάσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_I = \sigma_{xx}$$

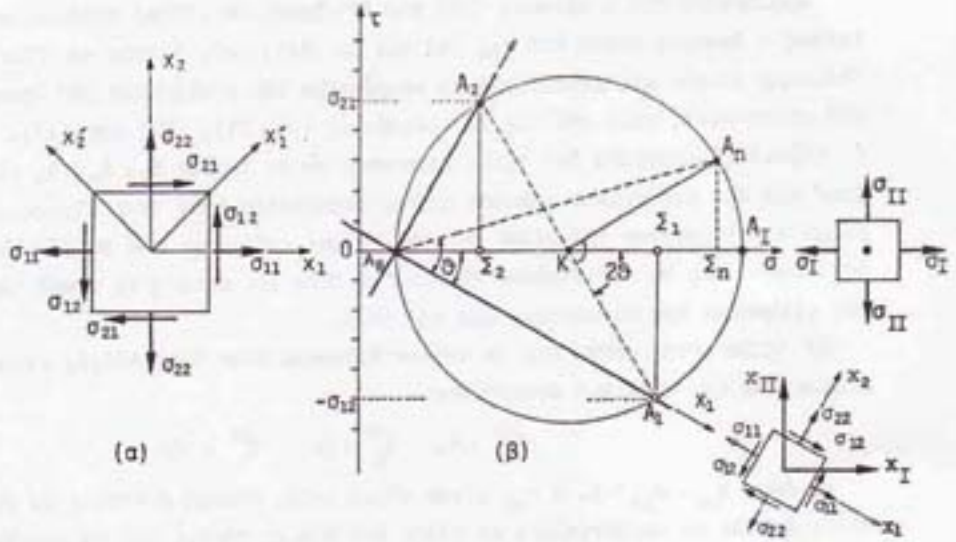
$$\sigma_{II,III} = \frac{1}{2}(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}) \pm \frac{1}{2}\{(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{yz}^2\}^{\frac{1}{2}}$$

οπότε

$$\sigma_I = 2c\sqrt{2}$$
$$\sigma_{II} = -2c$$
$$\sigma_{III} = -2c\sqrt{2}$$

3.15 Μιας επίπεδης εντατικής κατάστασης δίνονται σ_{11}= 1000at, σ_{22}=400at, σ_{12}=500at. Να βρεθούν γραφικά οι κύριες τάσεις και οι κύριες διευθύνσεις. Στη συνέχεια να υπολογισθεί γραφικά η ολική τάση σε τομή που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x_1.

Στο σχήμα (α) της επόμενης σελίδας, οι σ_{12}, σ_{21} έχουν τοποθετηθεί σύμφωνα με τη γνωστή σύμβαση. Στον κύκλο του Mohr όμως η σ_{12} θεωρείται αρνητική γιατί διαγράφει το τετράγωνο με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων (σ-τ) σημειώνουμε τα σημεία $A_1(\sigma_{11}, -\sigma_{12})$ και $A_2(\sigma_{22}, \sigma_{21})$, (σχήμα β). Ενώνουμε τα A_1 και A_2 και έτσι προσδιορίζουμε το K (κέντρο του κύκλου Mohr). Με κέντρο το K και ακτίνα (KA_1) ή (KA_2) φέρουμε κύκλο που η τομή του με τον άξονα σ δίνει τις κύριες τάσεις. Δηλαδή, αν κυτάξουμε το σχήμα (β) είναι $(OA_I)=\sigma_I$, $(OA_{II})=\sigma_{II}$ και μετρώντας τα μήκη των (OA_I),(OA_{II}) υπολογίζουμε, ανάλογα με τη χρησιμοποιούμενη κλίμακα, τα μέτρα των κυρίων τάσεων. Στο παράδειγμά μας σ_I = 1283at, σ_{II} = 117at. Η



γωνία μεταξύ x_1-Ox_I προσδιορίζεται από το τρίγωνο $KA_1\Sigma_1$:

$$\tan 2\theta = \frac{(A_1\Sigma_1)}{(K\Sigma_1)} = \frac{\sigma_{12}}{(O\Sigma_1)-(OK)} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}-(OA_1+KA_1)} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{II}-\frac{\sigma_I-\sigma_{II}}{2}} \Rightarrow 2\theta = 59{,}2^\circ$$

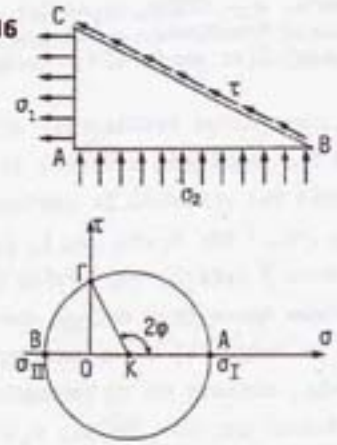
Το σχήμα (β) δείχνει ότι από τον x_1 πηγαίνουμε στον x_I διαγράφοντας γωνία θετική ($\overset{\frown}{\ }$).

Αν τώρα έχουμε τομή που σχηματίζει γωνία 45° με τον x_1, στον κύκλο του Mohr φέρνουμε ευθεία που σχηματίζει γωνία 2×45°=90° με την KA_1 (η KA_1 αντιπροσωπεύει τον x_1) οπότε οι συντεταγμένες του σημείου A_n (τομή της ευθείας με τον κύκλο του Mohr) δίνουν τις τάσεις σ_n, τ_{ns} που αναπτύσσονται στην τομή.

Συγκεκριμένα $\sigma_n = (O\Sigma_n)$, $\tau_{ns} = (\Sigma_n A_n)$. Άρα $|t_{o\lambda}| = \{(O\Sigma_n)^2+(\Sigma_n A_n)^2\}^{\frac{1}{2}} = (OA_n)$.

Προσοχή στο ότι η πραγματική διατμητική τάση είναι αντίθετη αυτής που προσδιορίζεται από τον κύκλο του Mohr.

3.16



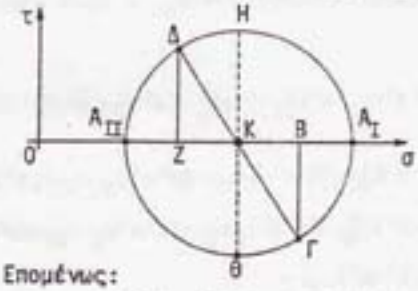
Ενα πρίσμα ABC με βάση το ορθογώνιο τρίγωνο ABC και πάχος t υποβάλλεται σε ομοιόμορφα κατανεμημένη θλιπτική τάση σ_2 στην έδρα ABB'A' και σε εφελκυστική τάση σ_1 στην έδρα ACC'A'. Ζητείται να υπολογισθεί η γωνία φ ώστε στην έδρα BC να υπάρχει μόνο μια διατμητική τάση τ η οποία και να υπολογισθεί.
(Πρόκειται για την άσκηση 1.16 του αντιμετωπίσαμε με εφαρμογή των εξισώσεων ισορροπίας).

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια του κύκλου Mohr ($\sigma_I = \sigma_1$, $\sigma_{II} = -\sigma_2$) οπότε διατμητικές τάσεις έχουμε στη γωνία $\varphi = (AK\Gamma)/2$ και η τιμή της τ είναι ίση με (ΟΓ). Είναι φανερό ο-

τι αν τα σ_I, σ_{II} δεν είναι ετερόσημα, το πρόβλημα δεν έχει λύση.

3.17 Να αποδειχθεί γραφικά με τη βοήθεια του κύκλου του Mohr η ισχύς των σχέσεων:

$$\sigma_{11} = \sigma_I - \tau_{max} + (\tau_{max}^2 - \sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma_{22} = \sigma_I - \tau_{max} - (\tau_{max}^2 - \sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}}$$



Από τον κύκλο του Mohr, έχουμε ότι:
$(OB)=\sigma_{11}$, $(OZ)=\sigma_{22}$, $(B\Gamma)=\sigma_{12}$, $(OA_I)=\sigma_I$, $(OA_{II})=\sigma_{II}$,

ενώ η ακτίνα του κύκλου είναι:

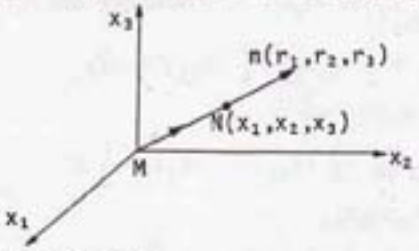
$$(KH) = \tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$$

Επομένως:

$$\sigma_{11} = (OB) = (OA_I)-(KA_I)+(KB) = \sigma_I - \tau_{max} + \{(K\Gamma)^2-(B\Gamma)^2\}^{\frac{1}{2}} = \sigma_I - \tau_{max} + (\tau_{max}^2 - \sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_{22} = (OZ) = (OA_I)-(KA_I)-(KZ) = \sigma_I - \tau_{max} - \{(K\Delta)^2-(\Delta Z)^2\}^{\frac{1}{2}} = \sigma_I - \tau_{max} - (\tau_{max}^2 - \sigma_{12}^2)^{\frac{1}{2}}$$

3.18 Σε σημείο Μ δίνονται οι κύριες τάσεις $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$. Για κάθε επίπεδο διερχόμενο από το Μ φέρνουμε την κάθετο σ'αυτό από το Μ και παίρνουμε επάνω της τμήμα $(MN) = \pm(|\sigma|)^{\frac{1}{2}}$, όπου σ είναι η ορθή τάση στο αντίστοιχο επίπεδο. Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ν. Τί σχήμα έχει;



$$r_1 = \frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$r_2 = \frac{x_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$r_3 = \frac{x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Οπότε από τη σχέση

$$\sigma_{nn} = \sigma_{ij} n_i n_j$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι το σύστημα $Mx_1x_2x_3$ είναι κύριο παίρνουμε

$$\sigma_{nn} = r_1^2\sigma_{11} + r_2^2\sigma_{22} + r_3^2\sigma_{33} \Leftrightarrow \sigma_{nn} = \frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}(x_1^2\sigma_I + x_2^2\sigma_{II} + x_3^2\sigma_{III})$$

αλλά $$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (MN)^2 = \frac{1}{\sigma_{nn}}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{nn} = \sigma_{nn}(x_1^2\sigma_I + x_2^2\sigma_{II} + x_3^2\sigma_{III}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{\frac{1}{\sqrt{\sigma_I}}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\frac{1}{\sqrt{\sigma_{II}}}}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\frac{1}{\sqrt{\sigma_{III}}}}\right)^2 = 1$$

ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος με σχήμα ελλειψοειδές.

3.19 Εστω, σ_I, σ_{II}, σ_{III} οι κύριες τάσεις σε ένα σημείο Μ. Αν ℓ, m, n είναι τα διευθύνοντα συνημίτονα ενός επιπέδου που διέρχεται από το Μ, τότε να αποδειχθεί ότι η διατμητική τάση τ_n στο επίπεδο αυτό, δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_n^2 = \ell^2 m^2 (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + m^2 n^2 (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + n^2 \ell^2 (\sigma_{III} - \sigma_I)^2$$

Αν σ_n είναι το διάνυσμα τάσης στο δοσμένο επίπεδο και σ_{nn} η ορθή τάση, ισχύουν:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \ell^2\sigma_I^2 + m^2\sigma_{II}^2 + n^2\sigma_{III}^2 \\ \sigma_{nn} &= \ell^2\sigma_I + m^2\sigma_{II} + n^2\sigma_{III} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2 = \ell^2\sigma_I^2 + m^2\sigma_{II}^2 + n^2\sigma_{III}^2 - (\ell^2\sigma_I^2 + m^2\sigma_{II}^2 + n^2\sigma_{III}^2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \tau_n^2 = \ell^2\sigma_I^2 + m^2\sigma_{II}^2 + n^2\sigma_{III}^2 - \ell^4\sigma_I^2 - m^4\sigma_{II}^2 - n^4\sigma_{III}^2 - 2\ell^2m^2\sigma_I\sigma_{II} - 2m^2n^2\sigma_{II}\sigma_{III} - 2n^2\ell^2\sigma_{III}\sigma_I$$

$$\Longleftrightarrow \tau_n^2 = \ell^2(1-\ell^2)\sigma_I^2 + m^2(1-m^2)\sigma_{II}^2 + n^2(1-n^2)\sigma_{III}^2 - 2\ell^2m^2\sigma_I\sigma_{II} - 2m^2n^2\sigma_{II}\sigma_{III} - 2n^2\ell^2\sigma_{III}\sigma_I$$

$$\Longleftrightarrow \tau_n^2 = \ell^2(m^2+n^2)\sigma_I + m^2(n^2+\ell^2)\sigma_{II} + n^2(\ell^2+m^2)\sigma_{III}^2 -$$

$$- 2\ell^2m^2\sigma_I\sigma_{II} - 2m^2n^2\sigma_{II}\sigma_{III} - 2n^2\ell^2\sigma_{III}\sigma_I \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \tau^2 = \ell^2m^2(\sigma_I^2 - 2\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2) + m^2n^2(\sigma_{II}^2 - 2\sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}^2) + n^2\ell^2(\sigma_{III}^2 - 2\sigma_{III}\sigma_I + \sigma_I^2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \tau^2 = \ell^2m^2(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + m^2n^2(\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + n^2\ell^2(\sigma_{III} - \sigma_I)^2$$

3.20 Αν σ_{ij} είναι οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων, s_{ij} οι συνιστώσες του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων και $I_{1,2,3}$, $\hat{I}_{1,2,3}$ τα αναλοίωτα μεγάθη των αντίστοιχων τανυστών να αποδειχθούν οι σχέσεις:

α) $\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{6}(\sigma_{ii})^2 = -\hat{I}_2$

β) $-I_2 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{2}(\sigma_{ii})^2$

γ) $\frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij}\sigma_{kk} - \frac{1}{6}(\sigma_{ii})^3 = -I_1I_2 + \frac{1}{3}I_1^3$

δ) $\hat{I}_3 = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki}$

ε) $\hat{I}_3 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - \frac{1}{3}\sigma_{ij}^2\sigma_{kk} + \frac{2}{27}(\sigma_{ii})^3$

Εξ ορισμού για ένα τανυστή $T = (t_{ij})$ έχουμε:

$$I_1 = t_{11} + t_{22} + t_{33} = t_{ii}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{13} \\ t_{31} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= t_{11}t_{22} + t_{22}t_{33} + t_{33}t_{11} - (t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2), \text{ για } t_{ij} = t_{ji}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= t_{11}t_{22}t_{33} + 2t_{12}t_{23}t_{31} - (t_{11}t_{23}^2 + t_{22}t_{31}^2 + t_{33}t_{12}^2), \text{ για } t_{ij} = t_{ji}$$

οπότε

α) $\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{1}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) + s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2 =$

$$= \frac{1}{2}(s_{11} + s_{22} + s_{33})^2 - (s_{11}s_{22} + s_{22}s_{33} + s_{33}s_{11}) + (s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2) = -\hat{I}_2$$

επειδή $s_{ii} = 0$

Το ίδιο μπορεί να αποδειχθεί και ως εξής

$$s_{ij}s_{ij} = (\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk})(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}) = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}\sigma_{kk} + \frac{1}{9}(\delta_{ij})^2(\sigma_{kk})^2 =$$
$$= \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{2}{3}(\sigma_{ii})^2 + \frac{1}{9}3(\sigma_{ii})^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sigma_{ii})^2 = -2\bar{I}_2$$

β) $$\frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{2}(\sigma_{ii})^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 -$$
$$- \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{33}\sigma_{11}) =$$
$$= -(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2) = -I_2$$

γ) $$\frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij}\sigma_{kk} - \frac{1}{6}(\sigma_{ii})^3 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij}\sigma_{kk} - \frac{1}{2}(\sigma_{ii})^3 + \frac{1}{3}(\sigma_{ii})^3 =$$
$$= \{\frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{2}(\sigma_{ii})^2\}\sigma_{ii} + \frac{1}{3}(\sigma_{ii})^3 =$$
$$= I_2 I_1 + \frac{1}{3}I_1^3,$$ λόγω του <β>.

δ) $$\frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} = \frac{1}{3}\{s_{11}^3 + s_{22}^3 + s_{33}^3 + 6s_{12}s_{23}s_{31} + 3s_{11}(s_{12}^2 + s_{13}^2) + 3s_{22}(s_{23}^2 + s_{21}^2) +$$
$$+ 3s_{33}(s_{31}^2 + s_{32}^2)\} =$$
$$= \frac{1}{3}\{(s_{11} + s_{22} + s_{33})^3 - 6s_{11}s_{22}s_{33} - 3s_{11}s_{22}(s_{11} + s_{22}) -$$
$$- 3s_{22}s_{33}(s_{22} + s_{33}) - 3s_{33}s_{11}(s_{33} + s_{11})\} + 2s_{12}s_{23}s_{31} + s_{12}^2(s_{11} + s_{22}) +$$
$$+ s_{23}^2(s_{22} + s_{33}) + s_{31}^2(s_{31} + s_{11}) =$$
$$= s_{11}s_{22}s_{33} + 2s_{12}s_{23}s_{31} - s_{12}^2 s_{33} - s_{23}^2 s_{11} - s_{31}^2 s_{22} = \bar{I}_3.$$

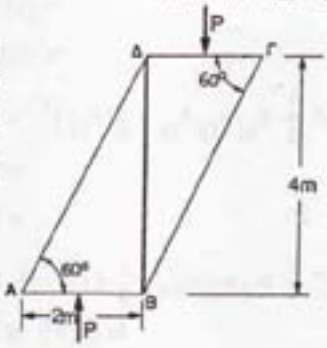
ε) $$\frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} = \frac{1}{3}(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{\ell\ell})(\sigma_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\sigma_{\ell\ell})(\sigma_{ki} - \frac{1}{3}\delta_{ki}\sigma_{\ell\ell}) =$$
$$= \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - \frac{1}{9}(\sigma_{ij}\sigma_{jk}\delta_{ki} + \sigma_{jk}\sigma_{ki}\delta_{ij} + \sigma_{ki}\sigma_{ij}\delta_{jk})\sigma_{\ell\ell} +$$
$$+ \frac{1}{27}(\sigma_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki} + \sigma_{jk}\delta_{ki}\delta_{ij} + \sigma_{ki}\delta_{ij}\delta_{jk})(\sigma_{\ell\ell})^2 - \frac{1}{81}\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}(\sigma_{\ell\ell})^3 =$$
$$= \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - \frac{1}{9}\{(\sigma_{ij})^2\sigma_{kk} + (\sigma_{jk})^2\sigma_{ii} + (\sigma_{ki})^2\sigma_{jj}\} +$$
$$+ \frac{1}{27}(\sigma_{ij}\delta_{ij} + \sigma_{jk}\delta_{jk} + \sigma_{ki}\delta_{ki})(\sigma_{\ell\ell})^2 - \frac{1}{81}\delta_{ik}\delta_{ki}(\sigma_{\ell\ell})^3 =$$
$$= \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - \frac{1}{9}\{(\sigma_{ij})^2 + (\sigma_{jk})^2 + (\sigma_{ki})^2\}\sigma_{ii} +$$
$$+ \frac{1}{27}(\sigma_{ii} + \sigma_{jj} + \sigma_{kk})(\sigma_{\ell\ell})^2 - \frac{1}{81}\delta_{ii}(\sigma_{\ell\ell})^3 =$$
$$= \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - \frac{1}{9}3(\sigma_{ij})^2\sigma_{\ell\ell} + \frac{1}{27}3(\sigma_{\ell\ell})^3 - \frac{3}{81}(\sigma_{\ell\ell})^3 =$$
$$= \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - \frac{1}{3}(\sigma_{ij})^2\sigma_{\ell\ell} + \frac{2}{27}(\sigma_{\ell\ell})^3$$

3.α. Ονομάζουμε σ_n, σ_n', σ_n'' τα διανύσματα τάσης που αντιστοιχούν σε τρεις τυχαίες κάθετες τομές στο σημείο Μ. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα $(\sigma_n)^2+(\sigma_n')^2+(\sigma_n'')^2$ δεν μεταβάλλεται αν μεταβληθούν οι τομές.
(Υπόδειξη: αποδείξτε ότι $(\sigma_n)^2+(\sigma_n')^2+(\sigma_n'')^2=\sigma_I^2+\sigma_{II}^2+\sigma_{III}^2$).

3.β. Αποδείξτε με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης ότι και το άθροισμα των ορθών συνιστωσών $\sigma_{nn}+\sigma_{nn}'+\sigma_{nn}''$ των σ_n, σ_n', σ_n'' δεν μεταβάλλεται από την εκλογή των τριών καθέτων τομών.
(Υπόδειξη: Με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης δείξτε ότι: $\sigma_{nn}+\sigma_{nn}'+\sigma_{nn}''=\sigma_I+\sigma_{II}+\sigma_{III}$)

3.γ. Η επίπεδη πλάκα ΑΒΓΔ πάχους t=10cm, αποτελείται από δύο ξεχωριστά τμήματα ΑΒΓ και ΒΔΓ. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ έχει εφαρμοσθεί μία θλιπτική δύναμη P=899t και μία διατμητική δύναμη Q αγνώστου φοράς και μέτρου. Στις πλευρές ΒΓ και ΑΔ είναι γνωστή μόνο η ορθή τάση σ_{nn}=625at. Αν είναι γνωστός ο συντελεστής τριβής $\mu=\sqrt{3}/3$,
α) Να βρεθεί η Q (φορά και μέτρο).
β) Να βρεθεί η διατμητική τάση στην πλευρά ΒΓ.
γ) Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η σ_{nn};

(60% Προχ. Διαγων. 11/12/1989)



3.δ. Εστω (n_I,n_{II},n_{III}), (n_I',n_{II}',n_{III}') οι συνιστώσες δύο τυχαίων καθέτων διανυσμάτων **n** και **n**΄ ως προς το κύριο σύστημα τάσεων $Ox_Ix_{II}x_{III}$. Εστω ακόμα σ_n και σ_n' τα διανύσματα τάσης που δρούν αντίστοιχα στα κάθετα προς το **n** και **n**΄ επίπεδα. Να αποδειχθεί τότε ότι τόσο η προβολή του σ_n πάνω στο **n**΄ όσο και η προβολή του σ_n' πάνω στο **n** είναι ίσες με: $n_In_I'\sigma_I+n_{II}n_{II}'\sigma_{II}+n_{III}n_{III}'\sigma_{III}$, όπου σ_I, σ_{II}, σ_{III} οι κύριες τάσεις.

3.ε. Ονομάζουμε (n_I,n_{II},n_{III}) τις συνιστώσες ενός διανύσματος ως προς το κύριο σύστημα τάσεων $Ox_Ix_{II}x_{III}$. Εστω σ_n το διάνυσμα τάσης που δρα σε επίπεδο που έχει κάθετο διάνυσμα το **n**. Συμβολίζουμε με σ_{nn} και τ_n την ορθή και διατμητική συνιστώσα της σ_n. Να αποδειχθεί τότε ότι οι συνιστώσες $(\tau_{nI},\tau_{nII},\tau_{nIII})$ της τ_n στο κύριο σύστημα συντεταγμένων δίνονται από τις σχέσεις:

$$\tau_{nI}=n_I(\sigma_I-\sigma_{nn})=n_I[n_{II}^2(\sigma_I-\sigma_{II})+n_{III}^2(\sigma_I-\sigma_{III})]$$

$$\tau_{nII}=n_{II}(\sigma_{II}-\sigma_{nn})=n_{II}[n_{III}^2(\sigma_{II}-\sigma_{III})+n_I^2(\sigma_{III}-\sigma_I)]$$

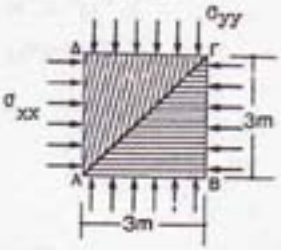
$$\tau_{nIII}=n_{III}(\sigma_{III}-\sigma_{nn})=n_{III}\ n_I^2(\sigma_{III}-\sigma_I)+n_{II}^2(\sigma_{III}-\sigma_{II})$$

ενώ η τ_n δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_n^2=n_{II}^2n_{III}^2(\sigma_{II}-\sigma_{III})^2+n_{III}^2n_I^2(\sigma_{III}-\sigma_I)^2+n_I^2n_{II}^2(\sigma_I-\sigma_{II})^2$$

όπου σ_I, σ_{II}, σ_{III} οι κύριες τάσεις.

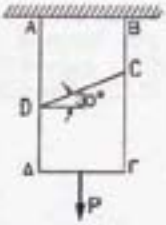
3.ς. Σε ένα τμήμα μιας κατασκευής πρέπει να τοποθετηθεί μια τετραγωνική πλάκα πλευράς 3m. Η καταπόνηση που θα δεχθεί η πλάκα είναι σ_{xx}= -100MPa και σ_{yy}=-120MPa. Αντί της τετραγωνικής πλάκας διαθέτουμε δύο τριγωνικά τμήματα ΑΒΓ και ΑΓΔ, τα οποία απλώς τοποθετούμε (χωρίς συγκόλληση) όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα. Αν ο συντελεστής τριβής είναι f=0,20, να εξετασθεί αν με τη σύνθετη αυτή κατασκευή μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα. Σε ποιά όρια πρέπει να βρίσκεται η σ_{xx} ώστε να μη καταλύεται η ισορροπία των τμημάτων ΑΒΓ και ΑΓΔ.



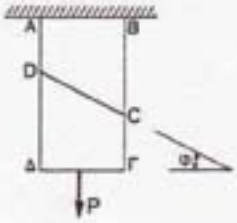
3.ζ. Η ορθή τάση σ_{nn} σε ένα επίπεδο έχει κατευθύνον συνημίτονο ℓ. Συμβολίζουμε με τ_n τη διατμητική τάση στο ίδιο επίπεδο. Αν οι δύο μικρότερες κύριες τάσεις είναι ίσες, να αποδειχθεί ότι:

$$\sigma_I = \sigma_{nn} + \frac{\tau_n}{\ell}(1-\ell^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \sigma_{II} = \sigma_{III} = \sigma_{nn} - \frac{\tau_n \cdot \ell}{(1-\ell^2)^{\frac{1}{2}}}$$

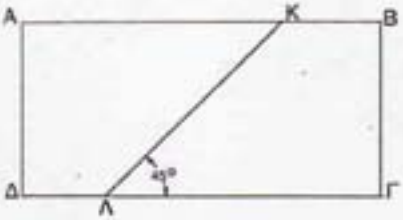
3.η. Η ράβδος ΑΒΓΔ διατομής 100mm² αποτελείται από δύο τμήματα ABCD και DCΓΔ συγκολλημένα στην πλευρά CD όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ζητείται να υπολογισθεί το μέγιστο εφελκυστικό φορτίο P που μπορούμε να επιβάλλουμε στη ράβδο αν η συγκόλληση μπορεί να αντέξει (παραλάβει) ορθές τάσεις ίσες με $\sigma_{\epsilon\tau}$= 400Pa και διατμητικές ίσες με $\tau_{\epsilon\tau}$=300Pa.



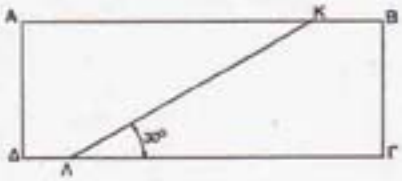
3.θ. Η ράβδος ΑΒΓΔ διατομής 100mm² εφελκύεται με φορτίο P. Αν στην τομή CD που φαίνεται στο διπλανό σχήμα η ορθή τάση είναι 100MPa και η διατμητική 40MPa να υπολογισθούν:
α) Η γωνία που σχηματίζει η CD με την ΓΔ.
β) Το φορτίο P.



3.ι. Η ορθογωνική πλάκα ΑΒΓΔ αποτελείται από τα τμήματα ΑΚΛΔ και ΚΒΓΛ όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Αν οι πλευρές ΚΛ των δύο τμημάτων της πλάκας θεωρηθούν απόλυτα λείες (δηλαδή δεν εμφανίζεται τριβή κατά την ολίσθηση των δύο τμημάτων) να εξετασθεί εαν είναι δυνατόν να επιβληθούν στις τέσσερις πλευρές της πλάκας θλιπτικές τάσεις ίσες με 150MPa. Τι θα συνέβαινε στην περίπτωση που η γωνία ΚΛΓ ήταν αυθαίρετη καί όχι 45°;



3.ια. Η ορθογωνική πλάκα ΑΒΓΔ αποτελείται από δύο τμήματα ΑΚΛΔ και ΚΒΓΛ, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, συγκολλημένα μεταξύ τους με μιά κόλλα που επιτρέπει να αναπτυχθούν τάσεις ορθές το πολύ ίσες με $\sigma_{\epsilon\tau}$=350Pa και διατμητικές το πολύ ίσες με $\tau_{\epsilon\tau}$ = 300Pa. Αν οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ καταπονούνται από θλιπτική τάση ίση με 50MPa, να προσδιορισθούν τα όρια μέσα στα οποία πρέπει να κυμαίνεται η επιβεβλημένη στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ ορθή τάση.



3.ιβ. Ποιό από τα παρακάτω μητρώα μπορεί να περιστάνει τον τανυστή των τάσεων στο σύστημα Oxy

$$\begin{bmatrix} c_1x+c_2y & c_5x-c_1y \\ c_5x-c_1y & c_3x+c_4 \end{bmatrix}, \quad \frac{y^2}{4}\begin{bmatrix} -6x^2 & 4xy \\ 4xy & -y^2 \end{bmatrix}$$

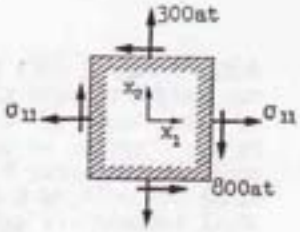
όπου c_i σταθερές.

3.ιγ. Να προσδιορισθούν στο κύριο σύστημα των τάσεων, τα κατευθύνοντα συνημίτονα του επιπέδου στο οποίο η διατμητική τάση έχει την κατεύθυνση δοσμένης ευθείας s, που ορίζεται με τα κατευθύνοντα συνημίτονά της.

3.ιδ. Να εξετασθεί αν το παρακάτω μητρώο μπορεί να περιστάνει τον τανυστή των τάσεων στο σύστημα αξόνων Oxyz. Τα c_i είναι σταθερές.

$$\begin{bmatrix} c_1 yz & c_4 z^2 & c_5 y^2 \\ c_4 z^2 & c_2 xz & c_6 x^2 \\ c_5 y^2 & c_6 x^2 & c_3 xy \end{bmatrix}$$

3.ιε. Σε ένα σημείο ενός στοιχείου μηχανής προσδιορίσθηκε η εντατική κατάσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν η μικρότερη κύρια τάση είναι σ_{II}=-100at να προσδιορισθούν η σ_{11} και η διεύθυνση του κυρίου συστήματος των τάσεων.

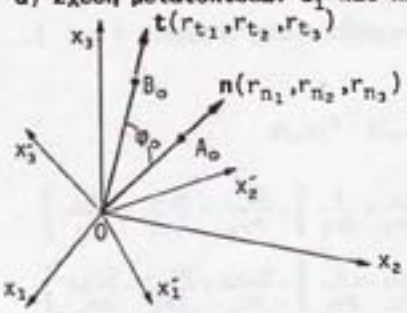


4

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Α. τριδιάστατη παραμορφωσιακή κατάσταση

α) Σχέση μετατοπίσεων u_i και παραμορφώσεων ε_{ij}.



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$$

δηλαδή

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \qquad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \qquad 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2},$$

$$2\varepsilon_{31} = \gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

β) Συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων ε'_{ij} στο νέο σύστημα αξόνων $Ox_1'x_2'x_3'$

$$\varepsilon'_{ij} = r_{ik} r_{j\ell} \varepsilon_{k\ell}$$

γ) Ορθή παραμόρφωση κατά δοσμένη διεύθυνση n.

από την παραπάνω σχέση για $i=j=n$ το $\varepsilon_{nn} = [(OA)-(OA_o)]/(OA_o)$ είναι

$$\varepsilon_{nn} = r_{nk}\, r_{n\ell}\, \varepsilon_{k\ell}$$

αναπτύσσοντας βρίσκουμε

$$\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{11} r_{n1}^2 + \varepsilon_{22} r_{n2}^2 + \varepsilon_{33} r_{n3}^2 + 2\varepsilon_{12} r_{n1} r_{n2} + 2\varepsilon_{23} r_{n2} r_{n3} + 2\varepsilon_{31} r_{n3} r_{n1}$$

δ) Μεταβολή της γωνίας φ_o των διανυσμάτων n και t

Αν φ η γωνία των διανυσμάτων **n** και **t** μετά την παραμόρφωση

$$\cos\varphi - \cos\varphi_o = 2\varepsilon_{ij} r_{ni} r_{tj}$$

Αν η αρχική γωνία φ μεταξύ των διανυσμάτων **n** και **t** είναι $\varphi = \frac{\pi}{2}$, τότε

$$\gamma_{nt} = \varphi_o - \varphi = 2\varepsilon_{ij} r_{ni} r_{tj} \Rightarrow \varepsilon_{nt} = \varepsilon_{ij} r_{ni} r_{tj}$$

όπου γ_{nt} η διατμητική παραμόρφωση.

ε) Ανηγμένη διόγκωση

$$\theta = \frac{dV - dV_o}{dV_o} \Leftrightarrow \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

όπου V_o, V ο αρχικός και τελικός όγκος.

στ) Συνισταμένη διατμητική παραμόρφωση γ_1, γ_2, γ_3

$$\gamma_1 = \pm(\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \gamma_2 = \pm(\gamma_{21}^2 + \gamma_{23}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \gamma_3 = \pm(\gamma_{31}^2 + \gamma_{32}^2)^{\frac{1}{2}}$$

όπου γ_1 η μεταβολή της κλίσης του Ox_1 ως προς το επίπεδο Ox_1x_2.

ζ) Μέγιστη συνισταμένη διατμητική παραμόρφωση.

Υπολογίζεται όπως και η μέγιστη διατμητική τάση, δηλαδή

$$\gamma_{n,max} = \max\left[\pm(\varepsilon_I - \varepsilon_{II}),\ \pm(\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III}),\ \pm(\varepsilon_{III} - \varepsilon_I)\right]$$

η) Παραμορφώσεις λόγω θερμοκρασίας.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{\theta}_{ij} + \alpha\cdot\Delta T\delta_{ij} \qquad \theta = \theta^{\theta} + 3\alpha\cdot\Delta T\delta_{ij}$$

όπου $\varepsilon^{\theta}_{ij}$, θ^{θ} οι παραμορφώσεις και η ανηγμένη διόγκωση λόγω των εξωτερικών φορτίων μόνο.

θ) Διαγωνοποίηση του τανυστή των παραμορφώσεων.

Η διαδικασία είναι ίδια με αυτή που περιγράψαμε στα κεφάλαια 2 και 3.

ι) Συνθήκες συμβιβαστού.

$$\varepsilon_{ij,k\ell} + \varepsilon_{k\ell,j\ell} - \varepsilon_{ik,j\ell} - \varepsilon_{j\ell,ik}$$

δηλαδή

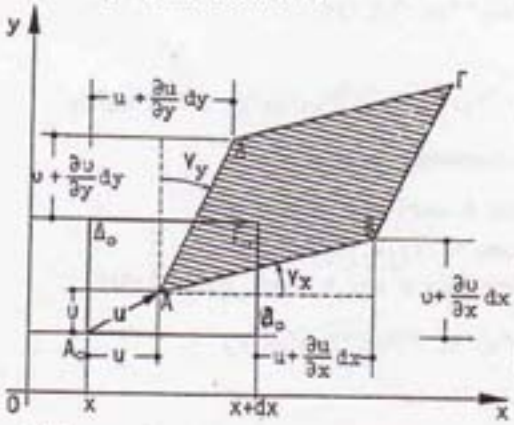
$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2} \qquad \frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_1\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right]$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_2\partial x_3} \qquad \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[-\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right]$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_{31}}{\partial x_3\partial x_1} \qquad \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left[-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x_2}\right]$$

Β. επίπεδη παραμόρφωση

α) Γεωμετρική ερμηνεία.



$$\varepsilon_{xx} = \frac{(AB) - (A_oB_o)}{(A_oB_o)}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{(A\Delta) - (A_o\Delta_o)}{(A_o\Delta_o)}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_x + \gamma_y$$

οπότε

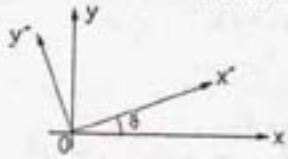
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

και

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\gamma_{xy}}{2} \Bigg\} \varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

β) Συνιστώσες των παραμορφώσεων στο Ox'y'



$$\varepsilon'_{xx} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\cos 2\theta + \varepsilon_{xy}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon'_{yy} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) - \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\cos 2\theta - \varepsilon_{xy}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon'_{xy} = -\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\sin 2\theta + \varepsilon_{xy}\cos 2\theta$$

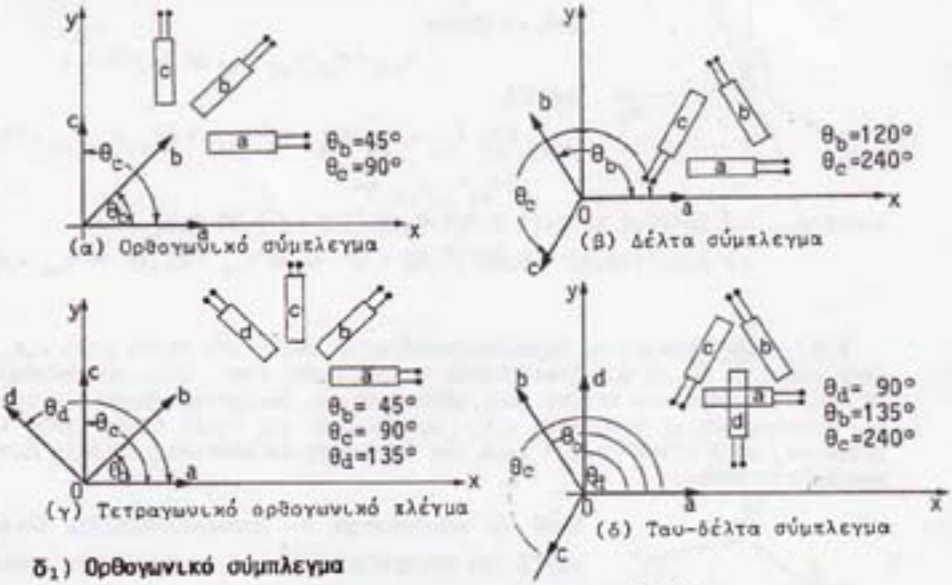
γ) Κύριες παραμορφώσεις - κύριες διευθύνσεις.

$$\varepsilon_{I,II} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) \pm \frac{1}{2}\left[(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

όπου η γωνία θ_o που δίνει τη γωνία των κυρίων αξόνων είναι

$$\tan 2\theta_o = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}$$

δ) Σύμπλεγμα (ροζέτα) μηκυνσιομέτρων.



(α) Ορθογωνικό σύμπλεγμα (β) Δέλτα σύμπλεγμα

(γ) Τετραγωνικό ορθογωνικό πλέγμα (δ) Ταυ-δέλτα σύμπλεγμα

δ₁) Ορθογωνικό σύμπλεγμα

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \qquad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_c \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_b - \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c)$$

$$\varepsilon_{I,II} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) \pm \frac{1}{2}\left[(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

δ₂) Σύμπλεγμα δέλτα.

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{2}{3}(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \frac{\varepsilon_a}{3} \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\varepsilon_b - \varepsilon_c)$$

$$\varepsilon_{I,II} = \frac{1}{3}(\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c) \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{1}{3}(2\varepsilon_a - \varepsilon_b - \varepsilon_c)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ε) Εξίσωση συμβιβαστού.

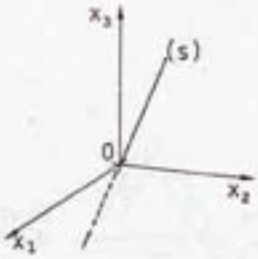
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

στ) Κύκλος Mohr

Η κατασκευή του είναι αυτή που περιγράψαμε για τις τάσεις.

4.1. Αν ε_{ij} είναι ο τανυστής των παραμορφώσεων με $i,j=1,2,3$ (δηλαδή στο σύστημα αξόνων $Ox_1x_2x_3$) να υπολογισθεί η ορθή παραμόρφωση κατά την διεύθυνση Os που έχει κατευθύνοντα συνημίτονα $r_{s1}=0,35$, $r_{s2}=0,82$ και $r_{s3}>0$ το αντίστοιχο στις δύο προηγούμενες τιμές των συνημιτόνων.

$$(\varepsilon_{ij})=10^{-4}\begin{bmatrix}10 & 80 & 0\\ 80 & 5 & 30\\ 0 & 30 & 100\end{bmatrix}$$



Στρέφουμε το σύστημα αξόνων $Ox_1x_2x_3$ έτσι ώστε ο Ox_1 να συμπέσει με τη διεύθυνση (s) όπου η παραμόρφωση δίνεται από τη σχέση

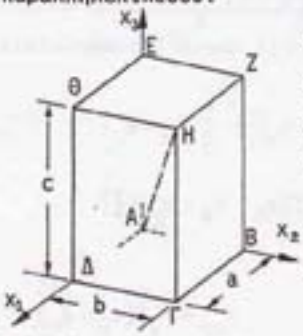
$$\varepsilon_{ss}=r_{si}\cdot r_{sj}\cdot\varepsilon_{ij} \text{ με } i,j=1,2,3$$

δηλαδή

$$\varepsilon_{ss}=r_{s1}^2\,\varepsilon_{11}+r_{s2}^2\,\varepsilon_{22}+r_{s3}^2\,\varepsilon_{33}+2r_{s1}r_{s2}\varepsilon_{12}+2r_{s2}r_{s3}\varepsilon_{23}+$$
$$+2r_{s3}r_{s1}\varepsilon_{13} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 10^4\varepsilon_{ss}=0,35^2\,10+0,82^2\,5+(1-0,35^2-0,82^2)100+2\;0,35\;0,82\;80+$$
$$+2\;0,82(1-0,35^2-0,82^2)^{\frac{1}{2}}\;30+0 \Longleftrightarrow 10^4\varepsilon_{ss}=93,30 \Longleftrightarrow \varepsilon_{ss}=0,00933$$

4.2. Ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου οι ακμές του έχουν μήκη a,b,c τέτοια ώστε a=b=c/2. Αν το παραλληλεπίπεδο παραμορφωθεί έτσι, ώστε τα παράπλευρα επίπεδά του να παραμένουν μεταξύ τους κάθετα και οι ανηγμένες επιμηκύνσεις (συμβατικές παραμορφώσεις) των ακμών a,b,c να παίρνουν τις τιμές 1/50, 1/80, 1/100 αντίστοιχα, ποιά είναι τότε η τιμή της ανηγμένης επιμήκυνσης κατά τη διαγώνιο του παραλληλεπιπέδου.



Κατά την παραμόρφωση του παραλληλεπιπέδου δίνεται ότι οι ακμές του παραμένουν κάθετες, συνεπώς το ορθογώνιο σύστημα $Ax_1x_2x_3$ που ορίζουν αποτελεί το σύστημα αξόνων των κυρίων παραμορφώσεων.

Στρέφουμε το σύστημα έτσι, ώστε ο άξονας Ax_1 να συμπέσει με τη διαγώνιο AH, η παραμόρφωση κατά τη διεύθυνσή της δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{ss}=r_{si}r_{sj}\varepsilon_{ij}, \quad \text{με } i,j=1,2,3$$

δηλαδή

$$\varepsilon_{ss}=r_{s1}^2\varepsilon_{11}+r_{s2}^2\varepsilon_{22}+r_{s3}^2\varepsilon_{33}$$

αλλά τα κατευθύνοντα συνημίτονα της (AH) βρίσκονται από τις συνιστώσες της δηλαδή

$$r_{s1}^2=\frac{(A\Delta)^2}{(AH)^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2}{a^2+a^2+(2a)^2}=\frac{1}{6}$$

$$r_{s2}^2=\frac{(AB)^2}{(AH)^2}=\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{b^2}{b^2+b^2+(2b)^2}=\frac{1}{6}$$

$$r_{s3}^2=\frac{(AE)^2}{(AH)^2}=\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{(2a)^2}{a^2+a^2+(2a)^2}=\frac{2}{3}$$

ενώ $\varepsilon_{11}=\frac{1}{50}$, $\varepsilon_{22}=\frac{1}{80}$ και $\varepsilon_{33}=\frac{1}{100}$

οπότε

$$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{50} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{80} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{100} = \frac{29}{2400}\ (= 1{,}2083\%).$$

Παρατήρηση

Αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα γεωμετρικά έχουμε ότι

$$(AH')^2 = (A\Delta')^2 + (AB')^2 + (AE')^2$$

αλλά

$$(A\Delta') = (A\Delta)(1+\varepsilon_{11}),\quad (AB') = (AB)(1+\varepsilon_{22}),\quad (AE') = (AE)(1+\varepsilon_{33})$$

οπότε

$$\varepsilon_{ss} = \frac{(AH')-(AH)}{(AH)} = \left\{\frac{(A\Delta)^2}{(AH)^2}(1+\varepsilon_{11})^2 + \frac{(AB)^2}{(AH)^2}(1+\varepsilon_{22})^2 + \frac{(AB)^2}{(AH)^2}(1+\varepsilon_{33})^2\right\}^{\frac{1}{2}} - 1 =$$

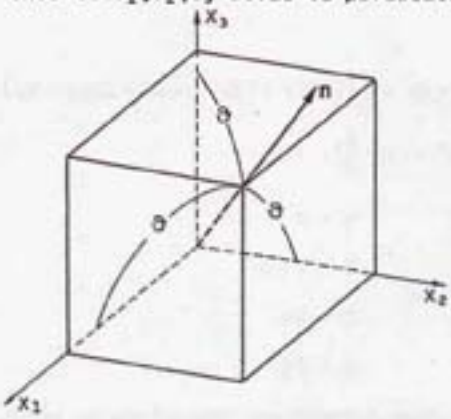
$$= \left\{\frac{1}{6}(1+\frac{1}{50})^2 + \frac{1}{6}(1+\frac{1}{80})^2 + \frac{2}{3}(1+\frac{1}{100})^2\right\}^{\frac{1}{2}} - 1 = 1{,}2089\%$$

περίπου όσο και προηγουμένως.

4.3. Δίνεται ο τανυστής των παραμορφώσεων

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot 10^{-5}$$

Ζητούνται να προσδιορισθούν (α) η ορθή παραμόρφωση κατά μήκος της διεύθυνσης που έχει ίσες γωνίες κλίσεως με τους τρεις άξονες αναφοράς x_1, x_2, x_3. (β) η διατμητική παραμόρφωση για τις διευθύνσεις των αξόνων $s = 3/5\,\mathbf{i}_1 + 4/5\,\mathbf{i}_2$, $q = 2/5\,\mathbf{i}_1 - 3/10\,\mathbf{i}_2 + \sqrt{3}/2\,\mathbf{i}_3$ όπου τα $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων αναφοράς.



α) Οι παραμορφώσεις κατά τη διεύθυνση **n** κεκλιμένη ως προς τους άξονες του συστήματος αναφοράς προσδιορίζονται από τη σχέση

$$\varepsilon_{nn} = r_{ni} r_{nj} \varepsilon_{ij} \quad \text{με } i,j = 1,2,3$$

όπου r_{ni} ή r_{nj} τα κατευθύνοντα συνημίτονα της διεύθυνσης του **n** και ε_{ij} οι συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων.

Στο σχήμα φαίνεται το διάνυσμα **n** κατά μήκος της διεύθυνσης που έχει ίσες γωνίες κλίσεως θ με κάθε έναν από τους τρεις άξονες αναφοράς x_1, x_2, x_3. Δηλαδή η προβολή του **n** πάνω σε κάθε έναν από τους άξονες έχει μέτρο ίσο με cosθ που πρέπει να προσδιορισθεί. Έχουμε

$$n^2 = 3\cos^2\theta \Leftrightarrow 1 = 3\cos^2\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

υποθέτοντας ότι το **n** είναι μοναδιαίο, δηλαδή

$$r_{n1} = r_{n2} = r_{n3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

συνεπώς

$$\varepsilon_{nn} = r_{n1}^2\varepsilon_{11} + r_{n2}^2\varepsilon_{22} + r_{n3}^2\varepsilon_{33} + 2r_{n1}r_{n2}\varepsilon_{12} + 2r_{n2}r_{n3}\varepsilon_{23} + 2r_{n3}r_{n1}\varepsilon_{31} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{nn} = r_{n1}^2(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{23} + 2\varepsilon_{31}) \Leftrightarrow \varepsilon_{nn} = 4\cdot 10^{-5}$$

β) Η διατμητική παραμόρφωση για τις διευθύνσεις **s**, **q** προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{sq} = r_{si} r_{qj} \varepsilon_{ij}$$

όπου r_{si}, r_{qj} είναι τα κατευθύνοντα συνημίτονα των μοναδιαίων διανυσμάτων **s**, **q** δηλαδή

$$r_{s1} = \frac{3}{5}, \qquad r_{q1} = \frac{2}{5}$$
$$r_{s2} = \frac{4}{5}, \qquad r_{q2} = -\frac{3}{10}$$
$$r_{s3} = 0, \qquad r_{q3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

οπότε

$$\varepsilon_{sq} = r_{s1}r_{q1}\varepsilon_{11} + r_{s1}r_{q2}\varepsilon_{12} + r_{s1}r_{q1}\varepsilon_{13} + r_{s2}r_{q1}\varepsilon_{21} + r_{s2}r_{q2}\varepsilon_{22} + r_{s2}r_{q3}\varepsilon_{23} +$$
$$+ r_{s3}r_{q1}\varepsilon_{31} + r_{s3}r_{q2}\varepsilon_{32} + r_{s3}r_{q3}\varepsilon_{33} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10^5\varepsilon_{sq} = \frac{3}{5}\frac{2}{5}2 - \frac{3}{5}\frac{3}{10} + \frac{4}{5}\frac{2}{5} - \frac{4}{5}\frac{3}{10}(-2) + \frac{4}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon_{sq} = (11 + 12\sqrt{3})\cdot 10^{-6} = 3{,}178\cdot 10^{-5}$$

4.4. Κάτω από ποιές συνθήκες οι παρακάτω εκφράσεις για τις μετατοπίσεις u και u και την διατμητική παραμόρφωση ε_{xy} είναι συμβιβαστές;
$u = \alpha x^2y^2 + \beta xy^2 + cx^2y$, $\quad u = \alpha x^2y + \beta xy$, $\quad \varepsilon_{xy} = \gamma x^2y + \delta xy + \gamma x^2 + \eta y$

Πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Leftrightarrow \gamma x^2y + \delta xy + \gamma x^2 + \eta y = \frac{1}{2}(2\alpha x^2y + 2\beta xy + cx^2 + 2\alpha xy + by) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\gamma-\alpha)x^2y + (\delta-\beta-\alpha)xy + \left(\gamma - \frac{c}{2}\right)x^2 + \left(\eta - \frac{\beta}{2}\right)y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \alpha \\ \delta = \beta+\alpha \\ \gamma = \frac{c}{2} \\ \eta = \frac{\beta}{2} \end{cases} \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{matrix} \gamma = \alpha \\ \delta = 2\eta+\alpha \\ c = 2\alpha \\ \beta = 2\eta \end{matrix}$$

οπότε οι συμβιβαστές εκφράσεις μετατοπίσεων-διατμητικής παραμόρφωσης είναι οι

$$u = \alpha x^2y^2 + 2\eta x^2y + 2\alpha x^2y, \quad u = \alpha x^2y + 2\eta xy, \quad \varepsilon_{xy} = \alpha x^2y + (2\eta+\alpha)xy + \alpha x^2 + \eta y$$

4.5. Πεδίο μετατοπίσεων περιγράφεται στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ από τις σχέσεις: $10^4u_1 = x_1^2+x_2^2$, $10^4u_2 = 3+x_1x_3$ και $10^2u_3 = -6x_3^2$ εκπεφρασμένες σε m. Να προσδιορισθεί η ορθή παραμόρφωση στο σημείο M(0,1,3) κατά την διεύθυνση s που ορίζεται με το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{s} = 3/5\,\mathbf{i}_1 + 4/5\,\mathbf{i}_2$, όπου $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x_1, x_2, x_3 αντίστοιχα.

Εξ ορισμού

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Leftrightarrow \varepsilon_{11} = 2x_1\ 10^{-4}\ , \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(2x_2 + x_3)10^{-4}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Leftrightarrow \varepsilon_{22} = 0\ , \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\ x_1\ 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Leftrightarrow \varepsilon_{33} = -12x_3\ 10^{-5}; \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_{31} = 0$$

δηλαδή ο τανυστής των παραμορφώσεων έχει την μορφή

$$(\varepsilon_{ij}) = \frac{10^{-4}}{2}\begin{bmatrix} 40x_1 & 20x_2+10x_3 & 0 \\ 20x_2+10x_3 & 0 & 10x_1 \\ 0 & 10x_1 & -24x_3 \end{bmatrix}$$

επομένως στο σημείο M έχουμε

$$(\varepsilon_{ij})_M = \frac{10^{-4}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -72 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (\varepsilon_{ij})_M = 10^{-5}\begin{bmatrix} 0 & 25 & 0 \\ 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{bmatrix}$$

οπότε η παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση s είναι

$$\varepsilon_{ss} = r_{si}r_{sj}\varepsilon_{ij} \Leftrightarrow \varepsilon_{ss} = r_{s1}^2\varepsilon_{11} + r_{s2}^2\varepsilon_{22} + r_{s3}^2\varepsilon_{33} + 2r_{s1}r_{s2}\varepsilon_{12} + 2r_{s2}r_{s3}\varepsilon_{23} + 2r_{s3}r_{s1}\varepsilon_{31}$$

όπου $r_{s1} = \frac{3}{5}$, $r_{s2} = \frac{4}{5}$ και $r_{s3} = 0$ τα διευθύνοντα συνημίτονα του s.

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$10^5\varepsilon_{ss} = 0+0+0+2\ \frac{3}{5}\frac{4}{5}\ 25 \Leftrightarrow \varepsilon_{ss} = 24\ 10^{-5}$$

Παρατήρηση:

Εκφράζοντας διανυσματικά το πεδίο των μετατοπίσεων έχουμε

$$10^4\mathbf{u} = (x_1^2 + x_2^2)\mathbf{i}_1 + (3 + x_1x_3)\mathbf{i}_2 - 60x_3^2\mathbf{i}_3$$

οπότε η μετατόπιση κατά τη διεύθυνση s εκφράζεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$u_s = \mathbf{u}\cdot\mathbf{s} \Leftrightarrow u_s = 10^{-4}\left\{\frac{3}{5}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{4}{5}(3 + x_1x_3)\right\} \Leftrightarrow 5\cdot 10^4 u_s = 3(x_1^2 + x_2^2) + 4(3 + x_1x_3)$$

Επομένως η παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση s είναι

$$\varepsilon_{ss} = \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \Leftrightarrow \varepsilon_{ss} = \frac{\partial u_s}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_s}$$

όπου

$$\frac{dx_1}{dx_s} = r_{s1} \Leftrightarrow \frac{dx_1}{dx_s} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{dx_2}{dx_s} = r_{s2} \Leftrightarrow \frac{dx_2}{dx_s} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{dx_3}{dx_s} = r_{s3} \Leftrightarrow \frac{dx_3}{dx_s} = 0$$

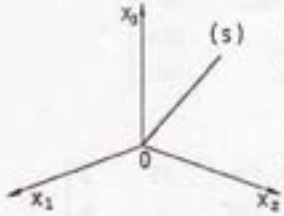
συνεπώς

$$5\ 10^4\varepsilon_{ss} = (6x_1 + 4x_3)\frac{3}{5} + 6x_2\ \frac{4}{5} + 0 \Leftrightarrow 25\ 10^4\varepsilon_{ss} = 18x_1 + 24x_2 + 12x_3.$$

Άρα στο σημείο Μ, δηλαδή όταν $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ παίρνουμε

$$25\cdot 10^{-4}\varepsilon_{ss} = 0 + 24 + 36 \iff \varepsilon_{ss} = \frac{60}{25}\cdot 10^{-4} \iff \varepsilon_{ss} = 24\cdot 10^{-5}$$

4.6. Οι συνιστώσες των παραμορφώσεων στο σημείο 0 παραμορφωμένου σώματος στο ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα αξόνων $Ox_1x_2x_3$ είναι $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=\varepsilon_o$ και $\gamma_{12}=\gamma_{23}=\gamma_{31}=\gamma_o$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των ευθειών που διέρχονται από το 0 και η επιμήκυνση κατά τη διεύθυνσή τους είναι ίση με ε_o.



Εστω (s) ευθεία του τόπου, τότε η παραμόρφωση κατά τη διεύθυνσή της δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_{ss} = r_{si}r_{sj}\varepsilon_{ij}, \text{όπου } i,j = 1,2,3$$

δηλαδή

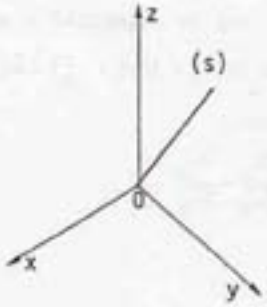
$$\varepsilon_{ss} = r_{s1}^2\varepsilon_{11} + r_{s1}r_{s2}\varepsilon_{12} + r_{s1}r_{s3}\varepsilon_{13} + r_{s2}^2\varepsilon_{22} + r_{s2}r_{s3}\varepsilon_{23} +$$
$$+ r_{s2}r_{s1}\varepsilon_{21} + r_{s3}^2\varepsilon_{33} + r_{s3}r_{s1}\varepsilon_{31} + r_{s3}r_{s2}\varepsilon_{32}$$

οπότε

$$\varepsilon_o = (r_{s1}^2+r_{s2}^2+r_{s3}^2)\varepsilon_o + 2(r_{s1}r_{s2}+r_{s2}r_{s3}+r_{s3}r_{s1})\frac{\gamma_o}{2} \iff$$
$$\iff 0=\gamma_o\left(\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_2x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{x_3x_1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right) \iff x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$$

είναι ο ζητούμενος τόπος.

4.7. Αν $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ είναι οι κύριες παραμορφώσεις σε σημείο παραμορφωμένου σώματος να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των διευθύνσεων που διέρχονται από το σημείο αυτό και έχουν δοσμένη ορθή παραμόρφωση ε.



Εστω 0 το σημείο του παραμορφωμένου σώματος και x,y,z οι άξονες κατά τη διεύθυνση των κυρίων παραμορφώσεων $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ αντίστοιχα.

Αν (s) τυχούσα ευθεία του τόπου γνωρίζουμε ότι η παραμόρφωση κατά την διεύθυνσή της δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{ss} = r_{si}r_{sj}\varepsilon_{ij}, \text{ με } i,j = x,y,z$$

δηλαδή

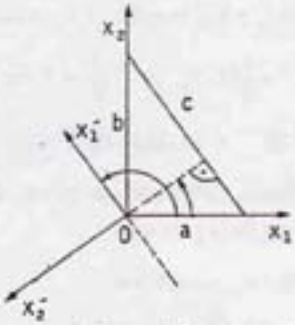
$$\varepsilon_{ss} = r_{xx}^2\varepsilon_{xx} + r_{yy}^2\varepsilon_{yy} + r_{zz}^2\varepsilon_{zz} \iff$$

$$\iff \varepsilon = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\varepsilon_I + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\varepsilon_{II} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\varepsilon_{III} \iff$$

$$\iff (x^2+y^2+z^2)\varepsilon = x^2\varepsilon_I + y^2\varepsilon_{II} + z^2\varepsilon_{III} \iff x^2(\varepsilon-\varepsilon_I) + y^2(\varepsilon-\varepsilon_{II}) + z^2(\varepsilon-\varepsilon_{III}) = 0$$

είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

4.8. Οι ορθές παραμορφώσεις κατά τις διευθύνσεις των κάθετων πλευρών με μήκη a και b και της υποτείνουσας μήκους c, στοιχειώδους ορθογωνίου τριγώνου γύρω από σημείο παραμορφωμένου σώματος, είναι ε_a, ε_b, ε_c αντίστοιχα. Να βρεθεί η γωνιακή παραμόρφωση γ των δύο κάθετων πλευρών του τριγώνου.



Εστω Ox_1x_2 το σύστημα αξόνων που σχηματίζουν οι δύο κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου, αν αυτό στραφεί έτσι ώστε να γίνει Ox_1' παράλληλος προς την υποτείνουσα τότε η παραμόρφωση κατά την διεύθυνση αυτού δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_{11}' = r_{1i}r_{1j}\varepsilon_{ij}, \text{ όπου } i,j=1,2$$

δηλαδή

$$\varepsilon_{11}' = r_{11}^2\varepsilon_{11} + r_{12}^2\varepsilon_{22} + 2r_{11}r_{12}\varepsilon_{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_c = \frac{a^2}{c^2}\varepsilon_a + \frac{b^2}{c^2}\varepsilon_b - 2\frac{ab}{c^2}\frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \gamma ab = a^2\varepsilon_a + b^2\varepsilon_b - c^2\varepsilon_c \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{ab}(a^2\varepsilon_a + b^2\varepsilon_b - c^2\varepsilon_c).$$

4.9. Να αποδειχθεί ότι, αν ένα στοιχείο παραμορφώσιμου σώματος βρίσκεται σε επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση και μάλιστα σε καθαρή διάτμηση ε_{xy} ως προς σύστημα αξόνων Oxy, οι ορθές συνιστώσες των παραμορφώσεων για οποιοδήποτε άλλο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oξη είναι πάντοτε αντίθετες. Να δοθούν οι εκφράσεις γιατις παραμορφώσεις $\varepsilon_{\xi\xi}$, $\varepsilon_{\eta\xi}$, $\varepsilon_{\eta\eta}$.

Είναι

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$$

οπότε

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \frac{1}{2}(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})\cos 2\theta + \varepsilon_{xy}\sin 2\theta = \varepsilon_{xy}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{\eta\eta} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})\cos 2\theta - \varepsilon_{xy}\sin 2\theta = -\varepsilon_{xy}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{\eta\xi} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})\sin 2\theta + \varepsilon_{xy}\cos 2\theta = \varepsilon_{xy}\cos 2\theta$$

πράγματι σε κάθε σύστημα αξόνων Oξη οι ορθές συνιστώσες των παραμορφώσεων είναι αντίθετες, μάλιστα ισχύουν οι σχέσεις

$$\varepsilon_{\xi\xi} = -\varepsilon_{\eta\eta} = \varepsilon_{xy}\sin 2\theta$$
$$\varepsilon_{\eta\xi} = \varepsilon_{\xi\eta} = \varepsilon_{xy}\cos 2\theta$$

Παρατήρηση:

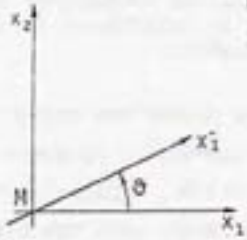
Αυτό προκύπτει βέβαια πιό άμεσα χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το ίχνος του τανυστή είναι αναλλοίωτο. Άρα

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 0 = \varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta} \Leftrightarrow \varepsilon_{\xi\xi} = -\varepsilon_{\eta\eta}$$

4.10. Το σημείο M ενός επίπεδου ελάσματος παρουσιάζει τις εξής παραμορφώσεις: $\varepsilon_{11} = 0{,}002$, $\varepsilon_{22} = 0{,}003$ και $\varepsilon_{12} = 0{,}0007$. Ζητούνται: (α) Πόση είναι η μεταβολή του μήκους ενός στοιχειώδους τμήματος ds που περνά από το M και σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα x_1. (β) Πόση είναι η μεταβολή της ορθής γωνίας που οι πλευρές της σχηματίζουν γωνίες 30° και 120° αντίστοιχα με τον άξονα x_1. (γ) Ποιές είναι οι κύ-

ριες παραμορφώσεις και ποιές οι κατευθύνσεις που εμφανίζονται;

α)



Η παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση x_1' που σχηματίζει γωνία 30° με τον x_1 είναι:

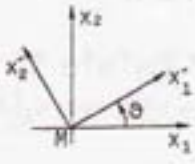
$$\varepsilon_{11}' = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\cos 2\theta + \varepsilon_{12}\sin 2\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{11}' = \frac{1}{2}(2+3)\ 10^{-3} + \frac{1}{2}(2-3)\ 10^{-3}\ \frac{1}{2} + 7\ 10^{-4}\ \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{11}' = \frac{1}{2}(45+7\sqrt{3})\ 10^{-4} = 28{,}562\cdot 10^{-4}$$

με άλλα λόγια η μεταβολή του μήκους στοιχειώδους τμήματος ds είναι 0,286%.

β)



Η παραμόρφωση της γωνίας $Mx_1'x_2'$ είναι

$$\varepsilon_{12}' = -\frac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\sin 2\theta + \varepsilon_{12}\cos 2\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{12}' = -\frac{1}{2}(2-3)\ 10^{-3}\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 7\ 10^{-4}\ \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{12}' = \frac{1}{2}\ 10^{-4}(5\sqrt{3}+7) = 7{,}830\cdot 10^{-4}$$

με άλλα λόγια η γωνία $Mx_1'x_2'$ μικραίνει κατά $15{,}66\cdot 10^{-4}$ rad = 0°5′23″

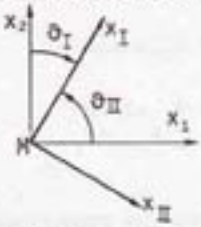
γ) Οι κύριες παραμορφώσεις δίνονται από τη σχέση

$$\varepsilon_{I,II} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \pm \frac{1}{2}\{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2\}^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{I,II} = \frac{1}{2}(2+3)\ 10^{-3} \pm \frac{1}{2}\{(2-3)^2\ 10^{-6} + 4\ 7^2\ 10^{-8}\}^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \varepsilon_{I,II} = 10^{-4}\ (25 \pm \sqrt{74}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{I} = 33{,}602\cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_{II} = 16{,}398\cdot 10^{-4}$$

με γωνία στροφής θ τέτοια ώστε

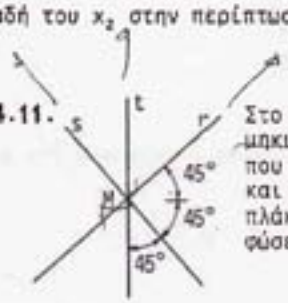


$$\tan 2\theta = \frac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}} \Leftrightarrow \tan 2\theta = \frac{2\cdot 7\cdot 10^{-4}}{(2-3)\cdot 10^{-3}} \Leftrightarrow \tan 2\theta = -1{,}4$$

$$\Leftrightarrow \theta_I = -27\ 13'52'', \quad \theta_{II} = 62\ 46'8''$$

Για να προσδιορίσουμε επακριβώς τις κατευθύνσεις Mx_I, Mx_{II} κάνουμε χρήση του γεγονότος ότι ο x_I σχηματίζει τη μικρότερη γωνία με τον άξονα που έχει την αλγεβρικά μεγαλύτερη τιμή της παραμόρφωσης, δηλαδή του x_2 στην περίπτωσή μας.

4.11.

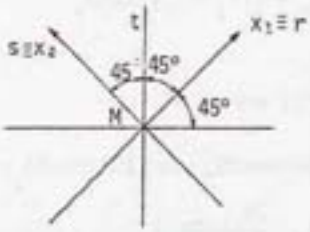


Στο σημείο Μ μιας λεπτής πλάκας μετρήθηκαν με τη βοήθεια μηκυναισομέτρων οι επιμηκύνσεις κατά τις διευθύνσεις r,s,t που φαίνονται στο σχήμα και είναι $\varepsilon_{rr} = 0{,}005$, $\varepsilon_{ss} = 0{,}001$ και $\varepsilon_{tt} = 0{,}003$. Να βρεθεί η παραμορφωσιακή κατάσταση της πλάκας στο σημείο Μ, να υπολογισθούν οι κύριες παραμορφώσεις και οι διευθύνσεις των κυρίων αξόνων.

(30% Εξέτασης 10/9/1986)

Επιλέγοντας σύστημα αξόνων αναφοράς το Mx_1x_2 έτσι ώστε $x_1 \equiv r$ και $x_2 \equiv s$ ξέρουμε ότι

$$\varepsilon_{11} = 5\ 10^{-3}, \quad \varepsilon_{22} = 10^{-3}$$



Στρέφοντας τον x_1 κατά $\theta = 45°$ έτσι ώστε να συμπέσει με τη διεύθυνση του t βρίσκουμε

$$\varepsilon_{tt} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\cos 2\theta + \varepsilon_{12}\sin 2\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{tt} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) + \varepsilon_{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\ 10^{-3} = \frac{1}{2}(5+1)\ 10^{-3} + \varepsilon_{12} \Leftrightarrow \varepsilon_{12} = 0$$

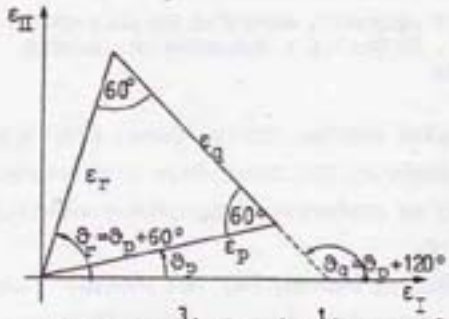
Με άλλα λόγια, η παραμορφωσιακή κατάσταση της πλάκας στο σημείο M εκφράζεται από τον τανυστή των παραμορφώσεων

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Το επιλεγμένο σύστημα αξόνων είναι κύριο σύστημα και οι παραμορφώσεις κατά τις διευθύνσεις αυτές είναι οι ζητούμενες κύριες παραμορφώσεις.

Γκ

4.12 Να αποδειχθεί ότι οι ορθές συνιστώσες των παραμορφώσεων $\varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_r$ κατά τις πλευρές ισόπλευρου τριγώνου σε παραμορφωμένο σώμα συδέονται με τις κύριες παραμορφώσεις στην ίδια, θεωρούμενη επίπεδη, παραμορφωσιακή κατάσταση $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$ με τις σχέσεις $3(\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) = 2(\varepsilon_p+\varepsilon_q+\varepsilon_r)$ και $3(\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) = 2\{(2\varepsilon_p-\varepsilon_q-\varepsilon_r)^2 + 3(\varepsilon_q-\varepsilon_r)^2\}^{1/2}$. Επίσης να αποδειχθεί ότι η γωνία θ_p που σχηματίζουν οι διευθύνσεις των παραμορφώσεων ε_I και ε_p δίνεται από τη σχέση $\tan 2\theta_p = \{\sqrt{3}(\varepsilon_q-\varepsilon_r)\}/(2\varepsilon_p-\varepsilon_q-\varepsilon_r)$.



Ισχύουν οι σχέσεις

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2}(\varepsilon_I+\varepsilon_{II}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})\cos 2\theta_p$$

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2}(\varepsilon_I+\varepsilon_{II}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})\cos 2(\theta_p+120°)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_I+\varepsilon_{II}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})\cos 2(\theta_p+60°)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε

$$\varepsilon_p+\varepsilon_q+\varepsilon_r = \frac{3}{2}(\varepsilon_I+\varepsilon_{II}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})\{\cos 2\theta_p + \cos 2(\theta_p+120°) + \cos 2(\theta_p+60°)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_p+\varepsilon_q+\varepsilon_r = \frac{3}{2}(\varepsilon_I+\varepsilon_{II}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})(\cos 2\theta_p + \cos 2\theta_p\cos 240° - \sin 2\theta_p\sin 240° + \cos 2\theta_p\cos 120° -$$

$$-\sin 2\theta_p\sin 120°) \Leftrightarrow \varepsilon_p+\varepsilon_q+\varepsilon_r = \frac{3}{2}(\varepsilon_I+\varepsilon_{II}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})(\cos 2\theta_p - \frac{1}{2}\cos 2\theta_p +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta_p - \frac{1}{2}\cos 2\theta_p - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta_p) \Leftrightarrow 2(\varepsilon_p+\varepsilon_q+\varepsilon_r) = 3(\varepsilon_I+\varepsilon_{II}),$$

την πρώτη ζητούμενη σχέση

Επίσης

$$2\varepsilon_p-\varepsilon_q-\varepsilon_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})\{2\cos 2\theta_p - \cos 2(\theta_p+120°) - \cos 2(\theta_p+60°)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\varepsilon_p-\varepsilon_q-\varepsilon_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})(2\cos 2\theta_p - \cos 2\theta_p\cos 240° + \sin 2\theta_p\sin 240° - \cos 2\theta_p\cos 120° +$$

$$+\sin 2\theta_p\sin 120°) \Leftrightarrow 2\varepsilon_p-\varepsilon_q-\varepsilon_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})(2\cos 2\theta_p + \frac{1}{2}\cos 2\theta_p - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta_p +$$

$$+\frac{1}{2}\cos 2\theta_p+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta_p) \Leftrightarrow 2\varepsilon_p-\varepsilon_q-\varepsilon_r=\frac{3}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})\cos 2\theta_p \qquad (\alpha)$$

και

$$\varepsilon_q-\varepsilon_r=\frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})\{\cos 2(\theta_p+120^\circ)-\cos 2(\theta_p+60^\circ)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_q-\varepsilon_r=\frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})(\cos 2\theta_p\cos 240^\circ-\sin 2\theta_p\sin 240^\circ-\cos 2\theta_p\cos 120^\circ+\sin 2\theta_p\sin 120^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_q-\varepsilon_r=\frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})(-\frac{1}{2}\cos 2\theta_p+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta_p+\frac{1}{2}\cos 2\theta_p+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta_p)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_q-\varepsilon_r=\frac{\sqrt{3}}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})\sin 2\theta_p \Leftrightarrow \sqrt{3}(\varepsilon_q-\varepsilon_r)=\frac{3}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})\sin 2\theta_p \qquad (\beta)$$

οπότε από τις (α), (β) βρίσκουμε

$$(2\varepsilon_p-\varepsilon_q-\varepsilon_r)^2+3(\varepsilon_q-\varepsilon_r)^2=\frac{9}{4}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})^2(\cos^2 2\theta_p+\sin^2 2\theta_p) \Leftrightarrow$$

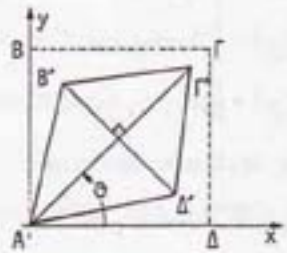
$$\Leftrightarrow 2\{(2\varepsilon_p-\varepsilon_q-\varepsilon_r)^2+3(\varepsilon_q-\varepsilon_r)^2\}^{\frac{1}{2}}=3(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})$$

και

$$\tan 2\theta_p=\frac{\sqrt{3}(\varepsilon_q-\varepsilon_r)}{2\varepsilon_p-\varepsilon_q-\varepsilon_r}$$

δηλαδή τη δεύτερη και τρίτη από τις ζητούμενες σχέσεις

4.13. Η διαγώνιος ΑΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ υφίσταται ανηγμένη επιμήκυνση ε_1 ενώ η διαγώνιος ΔΒ, ανηγμένη επιμήκυνση $(-\varepsilon_2)$. Να βρεθεί η ανηγμένη επιμήκυνση της πλευράς ΑΒ και η μεταβολή της γωνίας ΔΑΒ



Το δοσμένο σύστημα παραμορφώσεων είναι κύριο, αφού οι διαγώνιοι του τετραγώνου απλώς επιμηκύνονται χωρίς να στρέφονται (παραμένουν κάθετες) δηλαδή $\varepsilon_{12}=0$.

Στρέφουμε το σύστημα Oxy των καθέτων πλευρών του τετραγώνου έτσι ώστε η πλευρά ΑΔ να ταυτισθεί με τη διαγώνιο ΑΓ οπότε με $\theta=45^\circ$ βρίσκουμε

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon'_{xx}&=\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})+\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\cos 2\theta+\frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\theta \Leftrightarrow \varepsilon_1=\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})+\frac{1}{2}\gamma_{xy}\\
\varepsilon'_{yy}&=\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})-\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\cos 2\theta-\frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\theta \Leftrightarrow -\varepsilon_2=\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})-\frac{1}{2}\gamma_{xy}\\
\varepsilon'_{xy}&=-\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\sin 2\theta+\frac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\theta \Leftrightarrow 0=-\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})
\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned}\varepsilon_1-\varepsilon_2&=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_1+\varepsilon_2&=\gamma_{xy}\\ \varepsilon_{xx}&=\varepsilon_{yy}\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=\varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}&=\varepsilon_1+\varepsilon_2\\ \varepsilon_{xx}&=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\end{aligned}$$

όπου ε_{xx} η ανηγμένη επιμήκυνση των καθέτων πλευρών και γ_{xy} η μεταβολή των ορθών γωνιών.

4.14. Να αποδειχθεί ότι για τις αποκλίνουσες συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων e_{ij} ισχύει η σχέση: $-2(e_{11}e_{22}+e_{22}e_{33}+e_{33}e_{11}) = (e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2)$

Εξ ορισμού

$$e_{11} = \varepsilon_{11} - \frac{\theta}{3}$$

$$e_{22} = \varepsilon_{22} - \frac{\theta}{3}$$

$$e_{33} = \varepsilon_{33} - \frac{\theta}{3}$$

όπου

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

προσθέτοντας

$$e_{11}+e_{22}+e_{33} = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} - \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e_{11}+e_{22}+e_{33} = 0 \Leftrightarrow (e_{11}+e_{22}+e_{33})^2 = 0 \Leftrightarrow e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2+2e_{22}e_{33}+2e_{33}e_{11}+2e_{33}e_{11} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(e_{11}e_{22}+e_{22}e_{33}+e_{33}e_{11}) = (e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2).$$

4.15. Πεδίο μετατοπίσεων περιγράφεται στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxyz από τις σχέσεις $u = 3xy^2$, $v = 2zx$ και $w = z^2 - xy$. Να προσδιορισθεί ο τανυστής των παραμορφώσεων (ε_{ij}) και να ελεγχθεί αν ικανοποιούνται οι συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων.

Εξ ορισμού έχουμε

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \Leftrightarrow \varepsilon_{xx} = 3y^2, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_{xy} = 3xy + z$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow \varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_{yz} = \frac{x}{2}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \Leftrightarrow \varepsilon_{zz} = 2z, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_{zx} = -\frac{y}{2}$$

δηλαδή έχουμε τον τανυστή των παραμορφώσεων

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} 3y^2 & 3xy+z & -\frac{y}{2} \\ 3xy+z & 0 & \frac{x}{2} \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 2z \end{bmatrix}, \text{ όπου } i,j = x,y,z$$

Οι συνθήκες συμβιβαστού θα ικανοποιούνται αυτόματα, δεδομένου ότι οι παραμορφώσεις προκύπτουν από ένα συνεχές πεδίο μετατοπίσεων. Για λόγους μόνο διδακτικούς ας το διαπιστώσουμε

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y} \Leftrightarrow 6 = 6, \quad \frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) \Leftrightarrow 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_{yz}}{\partial z\partial y} \Leftrightarrow 0 = 0, \quad \frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial z\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) \Leftrightarrow 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_{zx}}{\partial z\partial x} \Leftrightarrow 0 = 0, \quad \frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) \Leftrightarrow 0 = 0$$

4.16. Οκτάεδρο επίπεδο λέμε εκείνο που έχει ίσες κλίσεις με τις διευθύνσεις των κυρίων παραμορφώσεων ε_I, ε_{II}, ε_{III}. Να αποδειχθεί ότι η οκτάεδρος ορθή και διατμητική συνιστώσα των παραμορφώσεων είναι αντίστοιχα:
$\varepsilon_{\eta\eta} = 1/3(\varepsilon_I+\varepsilon_{II}+\varepsilon_{III})$ και $\gamma_\eta = 2/3\{(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})^2+(\varepsilon_{II}-\varepsilon_{III})^2+(\varepsilon_{III}-\varepsilon_{II})^2\}^{\frac{1}{2}}$

Ισχύει η σχέση $\varepsilon_{\alpha\beta}=r_{\alpha i}r_{\beta j}\varepsilon_{ij}$, μετασχηματισμού των παραμορφώσεων από από το σύστημα αξόνων για τις τιμές των i,j στο σύστημα αξόνων για τις τιμές των α, β.

Στη δοσμένη περίπτωση

$$i,j = I,II,III, \quad \alpha,\beta = \eta,\zeta,\xi$$

όπου x_I, x_{II}, x_{III} το σύστημα αξόνων κατά τις διευθύνσεις των κυρίων παραμορφώσεων και η,ζ,ξ δεξιόστροφο σύστημα με τον άξονα η κάθετο στο οκτάεδρο επίπεδο.

Οπότε

$$\varepsilon_{\eta\eta} = r^2_{\eta I}\varepsilon_I + r^2_{\eta II}\varepsilon_{II} + r^2_{\eta III}\varepsilon_{III}$$

αλλά

$$r_{\eta I} = r_{\eta II} = r_{\eta III} = r = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

οπότε

$$\varepsilon_{\eta\eta} = \frac{1}{3}(\varepsilon_I+\varepsilon_{II}+\varepsilon_{III})$$

όμοια

$$\varepsilon_{\eta\zeta} = r_{\eta I}r_{\zeta I}\varepsilon_I + r_{\eta II}r_{\zeta II}\varepsilon_{II} + r_{\eta III}r_{\zeta III}\varepsilon_{III} =$$
$$= r(r_{\zeta I}\varepsilon_I + r_{\zeta II}\varepsilon_{II} + r_{\zeta III}\varepsilon_{III})$$
$$\varepsilon_{\eta\xi} = r_{\eta I}r_{\xi I}\varepsilon_I + r_{\eta II}r_{\xi II}\varepsilon_{II} + r_{\eta III}r_{\xi III}\varepsilon_{III} =$$
$$= r(r_{\xi I}\varepsilon_I + r_{\xi II}\varepsilon_{II} + r_{\xi III}\varepsilon_{III})$$

Η συνισταμένη διατμητική παραμόρφωση είναι

$$\gamma^2_\eta = \gamma^2_{\eta\zeta} + \gamma^2_{\eta\xi} = 4(\varepsilon^2_{\eta\zeta} + \varepsilon^2_{\eta\xi})$$

αλλά

$$\varepsilon^2_{\eta\zeta} + \varepsilon^2_{\eta\xi} = r^2\{(r_{\zeta I}\varepsilon_I + r_{\zeta II}\varepsilon_{II} + r_{\zeta III}\varepsilon_{III})^2 + (r_{\xi I}\varepsilon_I + r_{\xi II}\varepsilon_{II} + r_{\xi III}\varepsilon_{III})^2\}$$
$$= r^2\{(r^2_{\zeta I}+r^2_{\xi I})\varepsilon^2_I + (r^2_{\zeta II}+r^2_{\xi II})\varepsilon^2_{II} + (r^2_{\zeta III}+r^2_{\xi III})\varepsilon^2_{III} +$$
$$+2\varepsilon_I\varepsilon_{II}(r_{\zeta I}r_{\zeta II}+r_{\xi I}r_{\xi II}) + 2\varepsilon_{II}\varepsilon_{III}(r_{\zeta II}r_{\zeta III}+r_{\xi II}r_{\xi III}) +$$
$$+2\varepsilon_{III}\varepsilon_I(r_{\zeta III}r_{\zeta I} + r_{\xi III}r_{\xi I})\}$$

αλλά

$$r^2_{\eta i} + r^2_{\zeta i} + r^2_{\zeta i} = 1 \Leftrightarrow r^2_{\zeta i} + r^2_{\xi i} = 1 - r^2$$

και

$$r_{\eta i}r_{\eta j} + r_{\zeta i}r_{\zeta j} + r_{\xi i}r_{\xi j} = 0 \overset{i\neq j}{\Longleftrightarrow} r_{\zeta i}r_{\zeta j}+r_{\xi i}r_{\xi j} = -r_{\eta i}r_{\eta j} = -r^2$$

οπότε

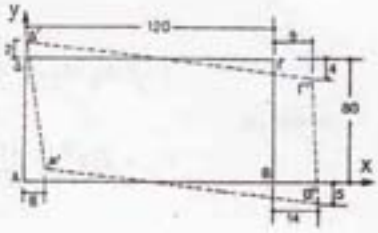
$$\varepsilon^2_{\eta\zeta} + \varepsilon^2_{\eta\xi} = r^2\left[(1-r^2)(\varepsilon^2_I + \varepsilon^2_{II} + \varepsilon^2_{III}) - 2r^2(\varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_{III}\varepsilon_I)\right] =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(2\varepsilon^2_I + 2\varepsilon^2_{II} + 2\varepsilon^2_{III} - 2\varepsilon_I\varepsilon_{II} - 2\varepsilon_{II}\varepsilon_{III} - 2\varepsilon_{III}\varepsilon_I) =$$

$$= \frac{1}{9}\{(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})^2 + (\varepsilon_{II}-\varepsilon_{III})^2 + (\varepsilon_{III}-\varepsilon_I)^2\}$$

Συνεπώς

$$\gamma_\eta = 2(\varepsilon^2_{\eta\zeta} + \varepsilon^2_{\eta\xi})^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\{(\varepsilon_I - \varepsilon_{II})^2 + (\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III})^2 + (\varepsilon_{II} - \varepsilon_I)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

4.α. Η ορθογωνική πλάκα ΑΒΓΔ παραμορφώνεται και παίρνει τη θέση Α΄Β΄Γ΄Δ΄, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν η παραμόρφωση θεωρείται ομοιόμορφη, ζητούνται:
α) Οι παραμορφώσεις ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy}.
β) Ο τανυστής των στροφών.
γ) Οι κύριες παραμορφώσεις και οι διευθύνσεις των κυρίων αξόνων.



4.β. Αν ε_{ij} είναι ο τανυστής των παραμορφώσεων με $i,j=1,2,3$ (δηλαδή στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$)

$$\varepsilon_{ij} = 10^{-6}\begin{bmatrix} 2330 & -760 & 550 \\ -760 & 910 & 425 \\ 550 & 425 & 1250 \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθεί η ορθή παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση Os που έχει κατευθύνοντα συνημίτονα $r_{s_1}=0,23$, $r_{s_2}=0,56$ και $r_{s_3}>0$ το αντίστοιχο στις δύο προηγούμενες τιμές συνημιτόνων. Στη συνέχεια να προσδιορισθούν οι κύριες παραμορφώσεις και τα αντίστοιχα συνημίτονα κατεύθυνσής τους.

4.γ. Να εξετασθεί αν οι παρακάτω παραμορφώσεις είναι συμβιβαστές:

α)
$$\varepsilon_{11}=1+2x_1^2+3x_2^2+x_3$$
$$\varepsilon_{22}=2+x_1^2+2x_2^2+3x_3$$
$$\varepsilon_{33}=1+3x_1+2x_2+x_3^2$$
$$\gamma_{12}=8x_1x_2$$
$$\gamma_{23}=0$$
$$\gamma_{31}=0$$

β)
$$\varepsilon_{11}=x_1x_2+3x_2^2$$
$$\varepsilon_{22}=3+2x_2+4x_3$$
$$\varepsilon_{33}=2+2x_1x_2+3x_2x_3+3x_3x_1$$
$$\gamma_{12}=6x_1x_2$$
$$\gamma_{23}=2x_1$$
$$\gamma_{31}=2x_2$$

4.δ. Πεδίο μετατοπίσεων περιγράφεται στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ από τις εκπεφρασμένες σε m σχέσεις:

$$u_1=(x_1^2+10)\ 10^{-3} \qquad u_2=2x_2x_3\ 10^{-3} \qquad u_3=(x_3^2-x_1x_2)\ 10^{-3}$$

Αν Β(2,0,0) και Γ(0,2,3) είναι δύο σημεία του σώματος πριν την παραμόρφωση, να προσδιορισθεί η παραμόρφωση στα διάφορα σημεία της ΒΓ καθώς επίσης και η μεταβολή του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος (ΒΓ).

4.ε. Δίνονται οι τανυστές των παραμορφώσεων

$$10^{-5}\begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad 10^{-6}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 10 \\ 4 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

Για κάθε τανυστή να προσδιορισθούν: (α) Οι κύριες παραμορφώσεις με τις διευθύνσεις τους. (β) Οι μέγιστες διατμητικές παραμορφώσεις. (γ) Η ορθή παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση του διανύσματος s που σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα Ox_1 και 120° με τον άξονα Ox_2.

4.ς. Σε ένα σημείο επιπέδου ελάσματος μετρήθηκαν οι παραμορφώσεις:

$$\varepsilon_{11}=200\cdot10^{-6},\quad \varepsilon_{22}=-56\cdot10^{-6},\quad \gamma_{12}=230\cdot10^{-6}\,\text{rad}$$

Ζητούνται: (α) Οι κύριες παραμορφώσεις. (β) Οι διευθύνσεις των κυρίων αξόνων. (γ) Η ορθή παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση s που σχηματίζει γωνία 50° με τον άξονα x_1.

4.ζ. Σε κάποιο σημείο ενός σώματος επικρατεί επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy}. Ζητούνται να προσδιορισθούν οι ε_{yy}, ε_{xy} αν γνωρίζουμε την $\varepsilon_{xx}=2,5\ 10^{-4}$ και ότι οι κύριες παραμορφώσεις είναι $\varepsilon_I=10^{-4}$ και $\varepsilon_{II}=-3\ 10^{-4}$. Πόση είναι η γωνία στροφής μεταξύ του κυρίου συστήματος αξόνων και του αρχικού;

4.η. Να εξετασθεί αν οι συναρτήσεις: $u_1=c(x_2-x_1)$, $u_2=c(x_1-x_2)$ και $u_3=cx_1x_3$ μπορούν να παριστάνουν πεδίο μετατοπίσεων συνεχούς παραμορφώσιμου σώματος.

4.θ. Εξετάστε αν είναι δυνατόν να υπάρχει το πεδίο μετατοπίσεων που σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ να περιγράφεται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια να προσδιορισθούν: (α) Οι μετατοπίσεις του σημείου A(1,2,1). (β) Η σχετική μετατόπιση μετά την παραμόρφωση των σημείων B(2,0,0) και Γ(0,1,3).

4.ι. Το γενικευμένο πεδίο μετατοπίσεων ενός σώματος δίνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες x,y,z:

$$u = 0,03 + 0,015x^2y$$
$$v = 0,03xz+0,005y^2$$
$$w = 0,005+0,001yz+0,003z^2$$

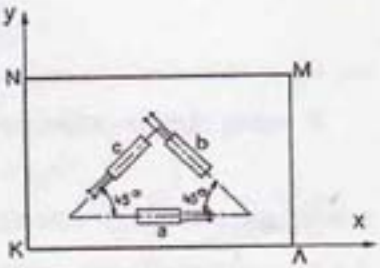
Ζητούνται να προσδιορισθούν οι τανυστές των παραμορφώσεων και των στροφών στο σημείο (1,0,2).

4.ια. Σε μια λεπτή ορθογωνική πλάκα ΚΛΜΝ που υφίσταται ομοιόμορφη καταπόνηση έχουμε κολλήσει τρία μηκυνσιόμετρα a,b,c όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, εκ των οποίων τα b,c δεν έδειξαν καμμία ένδειξη, ενώ το a έδειξε 0,001. Να υπολογισθεί:

α) Η παραμορφωσιακή κατάσταση στο σύστημα xKy.

β) Η παραμορφωσιακή κατάσταση σε σύστημα στραμμένο κατά 45°.

(30% Προχ. Διαγων. 11/12/1989)



4.ιβ. Μιας επίπεδης παραμορφωσιακής κατάστασης δίνονται: $\varepsilon_{11}=10^{-3}$, $\varepsilon_{22}=0,4\ 10^{-3}$, $\varepsilon_{12}=0,5\ 10^{-3}$. Να βρεθούν γραφικά οι κύριες παραμορφώσεις και οι κύριες διευθύνσεις. Στη συνέχεια να υπολογισθεί γραφικά η παραμόρφωση σε τομή που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x_1.

(20% Προχ. Διαγων. 11/12/1989)

5

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ - ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

Αναφερόμαστε σε ομογενή και ισότροπα υλικά με μέτρο ελαστικότητας E και λόγο του Poisson ν.

Α. σχέση παραμορφώσεων - τάσεων

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{E}p\delta_{ij}$$

δηλαδή αναπτύσσοντάς την παίρνουμε

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\right] = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{3\nu}{E}p \qquad \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{33})\right] = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{3\nu}{E}p \qquad \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{11})\right] = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33} - \frac{3\nu}{E}p \qquad \varepsilon_{31} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{31}$$

όπου p η υδροστατική πίεση, δηλαδή

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{ii} \Longleftrightarrow p = \frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$$

$\tau = \gamma G$

$\sigma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}G = \frac{1+\nu}{E}\varepsilon_{xy}$

και δ_{ij} το "δέλτα του Kronecker".

Β. σχέση τάσεων - παραμορφώσεων

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\theta\delta_{ij}$$

η οποία μας δίνει όταν αναπτυχθεί, τις σχέσεις

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\right] = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{11} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\theta \qquad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{22} + \nu(\varepsilon_{33}+\varepsilon_{11})\right] = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{22} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\theta \qquad \sigma_{23} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{23}$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{33} + \nu(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\right] = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{33} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\theta \qquad \sigma_{31} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{31}$$

όπου $\theta = \frac{\Delta V}{V}$ η ανηγμένη διόγκωση.

Γ. σχέση υδροστατικής πίεσης ανηγμένης διόγκωσης

$$p = K\theta$$

όπου K το μέτρο διόγκωσης που δίνεται από τον τύπο:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

συνεπώς ο λόγος του Poisson ν έχει τιμή τέτοια ώστε

$$0 < \nu \le \frac{1}{2}$$

Δ. Θερμικές τάσεις

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\theta\,\delta_{ij} - \gamma\,\Delta T\,\delta_{ij}$$

όπου

$$\gamma = \frac{E\alpha}{1-2\nu}$$

και ΔT η μεταβολή της θερμοκρασίας, α ο συντελεστής θερμικής διαστολής.

5.1. Κάντε μιά απόδειξη του νόμου του Hooke $\varepsilon_{11} = 1/E[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})]$ για ένα σώμα που βρίσκεται σε τριαξονική καταπόνηση, χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι "Μία ράβδος από το ίδιο υλικό με το σώμα, όταν εφελκύεται με μία διαμήκη τάση σ_{11} παρουσιάζει επιμήκυνση $\varepsilon_{11}=\sigma_{11}/E$ και εγκάρσια συστολή $\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=-\nu\varepsilon_{11}$".

(6η εξέτασης 25/2/1983)

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας η ε_{11} είναι το αποτέλεσμα των τριών παραμορφώσεων $(\varepsilon_{11})_1$, $(\varepsilon_{11})_2$, $(\varepsilon_{11})_3$ που θα προκαλούσε κάθε μία από τις σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} αν ενεργούσε από μόνη της. Οπότε και με τη βοήθεια της παρατήρησης που μας δίνεται έχουμε:

α) Με την επίδραση μόνον της σ_{11} προκαλείται επιμήκυνση $(\varepsilon_{11})_1 = \frac{1}{E}\sigma_{11}$.

β) Με την επίδραση μόνον της σ_{22} προκαλείται κατά την διεύθυνση x_1 εγκάρσια συστολή $(\varepsilon_{11})_2=-\nu\varepsilon_{22} \Longleftrightarrow (\varepsilon_{11})_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_{22}$.

γ) Με την επίδραση μόνον της σ_{33} προκαλείται κατά τη διεύθυνση x_1 εγκάρσια συστολή $(\varepsilon_{11})_3=-\nu\varepsilon_{33} \Longleftrightarrow (\varepsilon_{11})_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_{33}$.

Συνεπώς

$$\varepsilon_{11} = (\varepsilon_{11})_1+(\varepsilon_{11})_2+(\varepsilon_{11})_3 \Longleftrightarrow \varepsilon_{11}=\frac{1}{E}(\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}-\nu\sigma_{33}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon_{11}=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})]$$

5.2. Από τον γενικευμένο νόμο του Hooke για ομογενή και ισότροπα υλικά ζητούνται: (α) Οι σχέσεις που συνδέουν τους συντελεστές του Lamé λ,μ με το μέτρο ελαστικότητας σε εφελκυσμό (μέτρο του Young) E και το λόγο της εγκάρσιας συστολής (λόγος του Poisson) ν. (β) Να βρεθούν οι τύποι για το μέτρο διάτμησης G και το μέτρο διόγκωσης K, βάσει των προαναφερθέντων ποσοτήτων λ, μ, ν, E. (γ) Να γραφούν οι απλοποιημένες σχέσεις μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων.

Ο γενικευμένος νόμος του Hooke για ομογενή ισότροπα υλικά εκφράζεται μαθηματικώς με τη μορφή μητρώων σαν

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0\\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0\\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{31}\\ 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11}+c_{12}\varepsilon_{22}+c_{12}\varepsilon_{33}\\ \sigma_{22} = c_{12}\varepsilon_{11}+c_{11}\varepsilon_{22}+c_{12}\varepsilon_{33}\\ \sigma_{33} = c_{12}\varepsilon_{11}+c_{12}\varepsilon_{22}+c_{11}\varepsilon_{33}\\ \sigma_{23} = 2c_{44}\varepsilon_{23}\\ \sigma_{31} = 2c_{44}\varepsilon_{31}\\ \sigma_{12} = 2c_{44}\varepsilon_{12}\end{array}\right.$$

Επιπλέον οι τρεις ελαστικές σταθερές c_{11}, c_{12} και c_{44} δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά ισχύουν οι σχέσεις

$$\lambda = c_{12},\ \mu = c_{44},\ \lambda+2\mu = c_{11}$$

όπου λ, μ οι σταθερές του Lamé

α) $\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{12}\varepsilon_{33} \Longleftrightarrow \sigma_{11} = c_{12}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) + (c_{11}-c_{12})\varepsilon_{11} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11}$

όμοια $\sigma_{22} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{22}$

και $\sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33}$

προσθέτω $3p = (3\lambda+2\mu)\theta$, όπου $\theta = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$ $\quad 3p = \sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$

Το μέτρο ελαστικότητας συνδέει την τάση σ_{11} σε μονοαξονικό εφελκυσμό με τη δη-

μιουργούμενη παραμόρφωση ε_{11}, δηλαδή

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$$

στην περίπτωση όμως αυτή

$$\sigma_{11} = 3p \Longleftrightarrow \sigma_{11} = (3\lambda+2\mu)\theta$$

ενώ

$$\sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11} \Longleftrightarrow (3\lambda + 2\mu)\theta = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11} \Longleftrightarrow \varepsilon_{11} = \frac{\lambda+\mu}{\mu}\theta$$

επομένως

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \Longleftrightarrow E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

Ο λόγος του Poisson ορίζεται σαν η απόλυτη τιμή του λόγου της εγκάρσιας συστολής προς τη διαμήκη επιμήκυνση σε μονοαξονικό εφελκυσμό, δηλαδή

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \frac{-(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{2\varepsilon_{11}} = \frac{\varepsilon_{11}-\theta}{2\varepsilon_{11}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\theta}{\varepsilon_{11}}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Για να εκφράσουμε τους συντελεστές του Lamé λ,μ συναρτήσει των ν,Ε επιλύουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \\ \nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} E = \dfrac{\mu(2(\lambda+\mu)+\lambda)}{\lambda+\mu} \\ \lambda+\mu = \dfrac{\lambda}{2\nu} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} E = \mu\dfrac{\frac{2\lambda}{2\nu}+\lambda}{\frac{\lambda}{2\nu}} \\ 2\nu = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} E = 2\mu(1+\nu) \\ \dfrac{2\nu}{1-2\nu} = \dfrac{\lambda}{\mu} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{array}\right.$$

β) Το μέτρο διάτμησης ορίζεται από τη σχέση

$$G = c_{44} \Longleftrightarrow G = \mu \Longleftrightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Το μέτρο διόγκωσης ορίζεται σαν ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ της επιβεβλημένης υδροστατικής πίεσης p και της μεταβολής του όγκου του υλικού $\frac{\Delta V}{V} = \theta$, δηλαδή

$$K = \frac{p}{\theta} \Longleftrightarrow K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow K = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{3(1+\nu)} \Longleftrightarrow K = \frac{3\nu+1-2\nu}{3(1+\nu)(1-2\nu)}E \Longleftrightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

γ) Είχαμε βρει προηγουμένως ότι

$$3p = (3\lambda+2\mu)\theta \Longleftrightarrow \sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33} = \left(\frac{3\nu}{1-2\nu}+1\right)\frac{E}{1+\nu}\theta \Longleftrightarrow \sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33} = \frac{E\theta}{1-2\nu}$$

και $\sigma_{11} = \lambda\theta+2\mu\varepsilon_{11} \Longleftrightarrow \sigma_{11} = \dfrac{\nu E\theta}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \dfrac{E}{1+\nu}\varepsilon_{11} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} = \frac{\nu}{E}\frac{E\theta}{1-2\nu} + \varepsilon_{11} \Longleftrightarrow \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\{(1+\nu)\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\{\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\}$$

όμοια

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\{\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33}+\sigma_{11})\}$$

και

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\{\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\}$$

5.3. Στο σημείο Μ ενός σώματος από ισότροπο υλικό δίνεται το κύριο σύστημα τάσεων. Συμπίπτει το σύστημα αυτό με το σύστημα κυρίων παραμορφώσεων και γιατί;

(5% Προχ. Διαγ. 21/11/1983)

Από το γεγονός ότι $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}$ $i \neq j$ προκύπτει ότι όταν $\sigma_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ τότε και $\varepsilon_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ και αντίστροφα. Αυτό σημαίνει ότι τα κύρια συστήματα των τανυστών τάσεων και παραμορφώσεων συμπίπτουν.

Στην περίπτωση επίπεδης έντασης μπορούμε να κάνουμε και την εξής απόδειξη. Εστω Ox_1x_2 ένα τυχαίο σύστημα συντεταγμένων αξόνων. Τότε το κύριο σύστημα παραμορφώσεων σχηματίζει γωνία θ_o με το Ox_1x_2 τέτοια ώστε

$$\tan 2\theta_o = \frac{2\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}} \Leftrightarrow \tan 2\theta_o = \frac{\sigma_{12}}{\mu}\frac{1}{\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}} = \frac{\sigma_{12}}{\frac{E}{2(1+\nu)}}\frac{E}{\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}-(\sigma_{22}-\nu\sigma_{11})} =$$

$$= \frac{2\sigma_{12}(1+\nu)}{(1+\nu)(\sigma_{11}-\sigma_{22})} = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}$$

Δηλαδή για ομογενές και ισότροπο υλικό (ισχύει ο νόμος του Hooke) η γωνία στροφής θ_o του κύριου συστήματος παραμορφώσεων ισούται με τη γωνία στροφής του κύριου συστήματος τάσεων ως προς τυχόν σύστημα αναφοράς Ox_1x_2. Με άλλα λόγια τα συστήματα κύριων αξόνων τάσεων και παραμορφώσεων ταυτίζονται.

5.4. Οι κύριες παραμορφώσεις σε σημείο παραμορφωμένου σώματος με μέτρο ελαστικότητας Ε και λόγο του Poisson ν πληρούν τη σχέση $\varepsilon_I = \varepsilon_{II} = \varepsilon_{III}/n$. Να βρεθούν οι κύριες τάσεις.

Οι απλοποιημένες σχέσεις μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων κατά τον νόμο του Hooke είναι

$$\varepsilon_I = \frac{1}{E}\{\sigma_I - \nu(\sigma_{II}+\sigma_{III})\}$$
$$\varepsilon_{II} = \frac{1}{E}\{\sigma_{II} - \nu(\sigma_{III}+\sigma_I)\}$$
$$\varepsilon_{III} = \frac{1}{E}\{\sigma_{III} - \nu(\sigma_I+\sigma_{II})\}$$

οπότε

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{II} \Leftrightarrow \frac{1}{E}\{\sigma_I - \nu(\sigma_{II}+\sigma_{III})\} = \frac{1}{E}\{\sigma_{II} - \nu(\sigma_{III}+\sigma_I)\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma_I - \sigma_{II} = -\nu(\sigma_{III}+\sigma_I - \sigma_{II} - \sigma_{III}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma_I - \sigma_{II} = -\nu(\sigma_I - \sigma_{II}) \Leftrightarrow (1+\nu)(\sigma_I - \sigma_{II}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma_I = \sigma_{II}$$

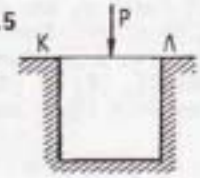
επίσης

$$n\varepsilon_I = \varepsilon_{III} \Leftrightarrow \frac{n}{E}\{\sigma_I - \nu(\sigma_{II}+\sigma_{III})\} = \frac{1}{E}\{\sigma_{III} - \nu(\sigma_I+\sigma_{II})\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n\sigma_I - n\nu\sigma_I - n\nu\sigma_{III} - \sigma_{III} + 2\nu\sigma_I = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{n(1-\nu)+2\nu\}\sigma_I = (1+n\nu)\sigma_{III} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma_{III} = \frac{n(1-\nu)+2\nu}{1+n\nu}\sigma_I$$

Επομένως

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{II} = \frac{\varepsilon_{III}}{n} \Leftrightarrow \sigma_I = \sigma_{II} = \frac{1+nv}{n(1-v)+2v}\,\sigma_{III}$$

5.5



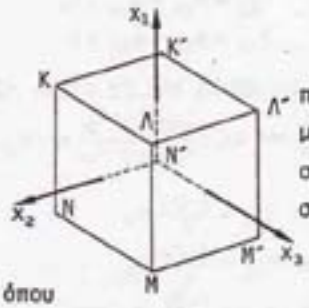
Κύβος από ομογενές και ισότροπο υλικό με μέτρο ελαστικότητας $E=2\times10^6$ at και λόγο του Poisson $v=0,3$, βρίσκεται εγκλωβισμένος σε υποδοχή, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ελεύθερη επιφάνειά του ΚΛ πιέζεται με μία κατακόρυφη δύναμη $P=250$ kp, η οποία υποτίθεται ότι κατανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια ΚΛ που έχει εμβαδό $A=2,50\ cm^2$. Ζητείται να βρεθεί η εντατική κατάσταση σε οποιοδήποτε σημείο του κύβου υπό την προϋπόθεση ότι τα τοιχώματα της υποδοχής είναι απολύτως ανένδοτα.

(20% Εξέτασης 11/9/1979)

Εφόσον τα τοιχώματα της υποδοχής είναι τελείως ανένδοτα, πρέπει

$$\varepsilon_{22} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{E}\{\sigma_{22}-v(\sigma_{33}+\sigma_{11})\} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{E}\{\sigma_{33}-v(\sigma_{11}+\sigma_{22})\} = 0$$



προσθέτοντας και αφαιρώντας τις δύο αυτές εξισώσεις παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{22}+\sigma_{33}-v(2\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) = 0\\ \sigma_{22}-\sigma_{33}+v(\sigma_{22}-\sigma_{33}) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(1-v)(\sigma_{22}+\sigma_{33}) = 2v\sigma_{11}\\ (1+v)(\sigma_{22}-\sigma_{33}) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{v}{1-v}\,\sigma_{11}$$

όπου

$$\sigma_{11} = \frac{P}{A} \Leftrightarrow \sigma_{11} = \frac{-250\ kp}{2,5\ cm^2} \Leftrightarrow \sigma_{11} = -100\ at$$

οπότε

$$\sigma_{22} = \frac{0,3}{1-0,3}(-100at) \Leftrightarrow \sigma_{22} = -\frac{300}{7}\ at = -42,857\ at$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{22} \Leftrightarrow \sigma_{33} = -\frac{300}{7}at = -42,857\ at$$

και

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - v(\sigma_{22}+\sigma_{33})) \Leftrightarrow \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}\left(1-\frac{2v^2}{1-v}\right) \Leftrightarrow \varepsilon_{11} = \frac{1-v-2v^2}{(1-v)E}\,\sigma_{11} \Leftrightarrow$$

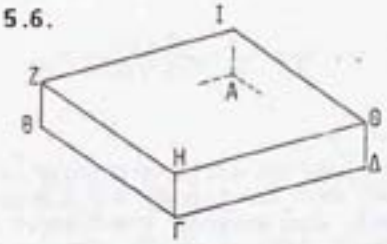
$$\Leftrightarrow \varepsilon_{11} = \frac{1-0,3-2\cdot0,3^2}{1-0,3}\,\frac{-100\ at}{2\times10^6 at} \Leftrightarrow \varepsilon_{11} = \frac{0,7-0,18}{1,4}\,(-10^{-4}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{11} = -\frac{26}{7}\,10^{-5} = -3,714\ 10^{-5}$$

Με άλλα λόγια ο τανυστής (σ_{ij}) εκφράζει την εντατική κατάσταση και ο τανυστής (ε_{ij}) την παραμορφωσιακή, όπου

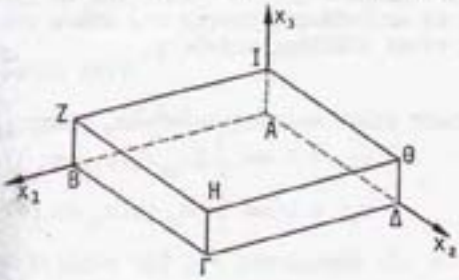
$$(\sigma_{ij}) = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix}700 & 0 & 0\\ 0 & 300 & 0\\ 0 & 0 & 300\end{bmatrix} at \qquad (\varepsilon_{ij}) = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix}26 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot10^{-5}$$

5.6.



Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔΖΗΘΙ του σχήματος με (ΑΒ)=50mm, (ΑΔ)=100mm και (ΑΙ)=30mm είναι κατασκευασμένο από χάλυβα με μέτρο ελαστικότητας E=200GPa και λόγο του Poisson ν=0,3. Γνωρίζουμε ότι αυτό υπόκειται σε υδροστατική πίεση σ_o και ότι η μεταβολή του μήκους της ΑΔ είναι -30μm. Ζητούνται να υπολογισθούν: (α) Η μεταβολή του μήκους των ακμών ΑΒ και ΑΙ. (β) Η υδροστατική πίεση σ_o που ασκείται στις έδρες του πρίσματος, και (γ) Η μεταβολή του όγκου του πρίσματος.

(15% Προχ. Διαγ. 25/10/1986)



Δίνεται ότι το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ΑΒΓΔΖΗΘΙ υπόκειται σε υδροστατική πίεση σ_o, δηλαδή

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_o$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

Επίσης η μεταβολή της ΑΔ είναι -30μm, οπότε

$$\varepsilon_{22} = \frac{-30\mu m}{100mm} \Leftrightarrow \varepsilon_{22} = \frac{-30\ 10^{-6}m}{100\ 10^{-3}m} \Leftrightarrow \varepsilon_{22} = -3\ 10^{-4}$$

αλλά

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\{\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\} \Leftrightarrow \varepsilon_{11} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_o \qquad (\alpha)$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\{\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33}+\sigma_{11})\} \Leftrightarrow \varepsilon_{22} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_o \qquad (\beta)$$
$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\{\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\} \Leftrightarrow \varepsilon_{33} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_o \qquad (\gamma)$$

επομένως η (β) μας δίνει

$$-3\ 10^{-4} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_o \Leftrightarrow -3\ 10^{-4} = \frac{1-2\ 0,3}{200\ 10^9 Pa}\sigma_o \Leftrightarrow -3\ 10^{-4}200\ 10^9\frac{1}{0,4}Pa = \sigma_o \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma_o = -150\ 10^6 Pa \Leftrightarrow \sigma_o = -150MPa$$

Από τις (α), (β) βρίσκουμε ότι

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} \Leftrightarrow \varepsilon_{11} = -3\ 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{\Delta\ell_{AB}}{(AB)} = -3\ 10^{-4} \Leftrightarrow \Delta\ell_{AB} = -3\ 10^{-4}50\ 10^{-3}m \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Delta\ell_{AB} = -15\ 10^{-6}m = -15\mu m$$

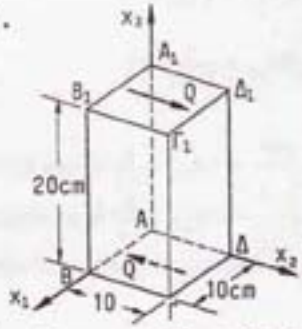
και από τις (β), (γ) παίρνουμε ότι

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{22} \Leftrightarrow \varepsilon_{33} = -3\ 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{\Delta\ell_{AI}}{(AI)} = -3\ 10^{-4} \Leftrightarrow \Delta\ell_{AI} = -3\ 10^{-4}30\ 10^{-3}m \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Delta\ell_{AI} = -9\ 10^{-6}m = -9\mu m$$

και η μεταβολή του όγκου είναι

$$\frac{\Delta V}{V} = \theta \Leftrightarrow \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \Leftrightarrow \Delta V = 3\varepsilon_{11}V \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Delta V = 3(-3\ 10^{-4})50\ 10^{-3}100\ 10^{-3}30\ 10^{-3}m^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Delta V = -9\ 10^{-4}5\ 10^{-2}10^{-1}3\ 10^{-2}m^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Delta V = -135\ 10^{-9}m^3 = -135\ mm^3$$

5.7.



Το χαλύβδινο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο υποβάλλεται σε κάποια ένταση. Μετά την παραμόρφωσή του παρατηρούμε ότι οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ έχουν επιμηκυνθεί κατά 1‰ ενώ η πλευρά AA_1 κατά 2‰. Γνωρίζουμε ακόμη ότι οι βάσεις ΑΒΓΔ και $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ παραμένουν ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ότι επάνω τους εφαρμόζονται οι διατμητικές δυνάμεις Q=20 t. Επιπλέον δίνεται ότι $\varepsilon_{33}=0$ και ζητείται να προσδιορισθεί ο τανυστής των τάσεων στο δοσμένο σύστημα αξόνων $Ax_1x_2x_3$. Το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα είναι 2×10^6at και ο λόγος του Poisson 0,3.

(35% Προχ. Διαγ. 11/1/1984)

Το ότι η ΑΒ επιμηκύνθηκε 1‰ σημαίνει $\varepsilon_{11}=10^{-3}$. Αντίστοιχα η επιμήκυνση της ΑΔ κατά 1‰ σημαίνει ότι $\varepsilon_{22}=10^{-3}$ και η επιμήκυνση της AA_1 κατά 2‰ σημαίνει πως $\varepsilon_{33}=2\cdot10^{-3}$.

Το ότι οι βάσεις ΑΒΓΔ και $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ παραμένουν ορθογώνια παραλληλόγραμμα σημαίνει πως $\varepsilon_{12}=0$. Μας δίνεται επίσης ότι $\varepsilon_{13}=0$.

Θεωρούμε ότι οι διατμητικές δυνάμεις Q κατανέμονται ομοιόμορφα πάνω στις έδρες ΑΒΓΔ και $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ δηλαδή οι διατμητικές τάσεις είναι

$$\sigma_{32}=\frac{Q}{F}\Leftrightarrow\sigma_{32}=\frac{20\cdot10^3}{10^4}\frac{kp}{cm^2}\Leftrightarrow\sigma_{32}=200\ at$$

οπότε

$$\varepsilon_{32}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{32}\Leftrightarrow\varepsilon_{32}=\frac{1,3}{2\cdot10^6}\,2\cdot10^2\Leftrightarrow\varepsilon_{32}=1,3\cdot10^{-4}$$

Με άλλα λόγια, η παραμορφωσιακή κατάσταση του σώματος εκφράζεται από τον τανυστή των παραμορφώσεων (ε_{ij}) με $i,j=1,2,3$

$$(\varepsilon_{ij})=\begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 1,3\\ 0 & 1,3 & 20\end{bmatrix}10^{-4}$$

Ο νόμος του Hooke εκφράζεται από τις σχέσεις

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{11}&=\frac{1}{E}\{\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\}\\ \varepsilon_{22}&=\frac{1}{E}\{\sigma_{22}-\nu(\sigma_{33}+\sigma_{11})\}\\ \varepsilon_{33}&=\frac{1}{E}\{\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}(1-2\nu)(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=\frac{E}{1-2\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})$$

για $\theta=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$ γράφεται

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=\frac{E}{1-2\nu}\theta$$

οπότε

$$\sigma_{22}+\sigma_{33}=\frac{E}{1-2\nu}\theta-\sigma_{11}$$

αντικαθιστώντας το στην

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\{\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\}\Leftrightarrow\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\{\sigma_{11}-\frac{\nu E\theta}{1-2\nu}+\nu\sigma_{11}\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E\varepsilon_{11}=(1+\nu)\sigma_{11}-\frac{\nu E}{1-2\nu}\theta\Leftrightarrow\sigma_{11}=\frac{E}{1+\nu}(\varepsilon_{11}+\frac{\nu}{1-2\nu}\theta)$$

όμοια

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1+v}(\varepsilon_{22} + \frac{v}{1-2v}\,\theta)$$

αντίστοιχα

$$\sigma_{33} = \frac{E}{1+v}(\varepsilon_{33} + \frac{v}{1-2v}\,\theta)$$

αντικαθιστώντας

$$\sigma_{11} = \frac{2\ 10^6}{1,3}(10 + \frac{0,3}{0,4}\ 40)10^{-4} \Longrightarrow \sigma_{11} = \frac{2\ 40\ 10^2}{1,3} \Longrightarrow \sigma_{11} = \frac{8}{13}10^5 at = 6153,846\ at$$

$$\sigma_{22} = \frac{2\ 10^6}{1,3}(10 + \frac{0,3}{0,4}\ 40)10^{-4} \Longrightarrow \sigma_{22} = \frac{2\ 40\ 10^2}{1,3} \Longrightarrow \sigma_{22} = \frac{8}{13}10^5 at = 6153,846\ at$$

$$\sigma_{33} = \frac{2\ 10^6}{1,3}(20 + \frac{0,3}{0,4}\ 40)10^{-4} \Longrightarrow \sigma_{33} = \frac{2\ 50\ 10^2}{1,3} \Longrightarrow \sigma_{11} = \frac{1}{13}10^5 at = 7692,308\ at$$

και $\sigma_{23} = 2000\,at$, $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{12} = 0$.

Με άλλα λόγια ο τανυστής των τάσεων είναι

$$(\sigma_{ij}) = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 26 \\ 0 & 26 & 1000 \end{bmatrix} 10^2\ at$$

5.8. Σε ένα σημείο ομογενούς και ελαστικού σώματος δίνεται (ε_{ij})ο τανυστής των παραμορφώσεων. Αν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι E=206GPa και ο λόγος του Poisson v=0,30 να προσδιορισθεί ο τανυστής των τάσεων (σ_{ij}) στο δοσμένο σημείο.

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Από τον νόμο του Hooke έχουμε ότι

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\{\sigma_{11} - v(\sigma_{22}+\sigma_{33})\} \Longleftrightarrow E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - v(\sigma_{22}+\sigma_{33}) \Longleftrightarrow \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + v(\sigma_{22}+\sigma_{33}) \quad (\alpha)$$

και

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}\{\sigma_{22} - v(\sigma_{33}+\sigma_{11})\} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}\{\sigma_{33} - v(\sigma_{11}+\sigma_{22})\} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow E(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) = (1-v)(\sigma_{22}+\sigma_{33}) - 2v\sigma_{11} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sigma_{22}+\sigma_{33} = \frac{E}{1-v}(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) + \frac{2v}{1-v}\,\sigma_{11} \quad (\beta)$$

Αντικαθιστώντας στην (α) όπου $\sigma_{22}+\sigma_{33}$ την (β) έχουμε:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + \frac{Ev}{1-v}(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) + \frac{2v^2}{1-v}\,\sigma_{11} \Longleftrightarrow \frac{1-v-2v^2}{1-v}\,\sigma_{11} = \frac{E}{1-v}\{(1-v)\varepsilon_{11} + v(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\} \Longrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (1-2v+v-2v^2)\sigma_{11} = E\{(1-v)\varepsilon_{11} + v(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\} \Longleftrightarrow (1-2v)(1+v)\sigma_{11} = E\{(1-v)\varepsilon_{11} +$$

$$+ v(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\}$$

δηλαδή

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\{(1-v)\varepsilon_{11} + v(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\}$$

αντίστοιχα

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\{(1-v)\varepsilon_{22} + v(\varepsilon_{33}+\varepsilon_{11})\}$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\{(1-v)\varepsilon_{33} + v(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\}$$

επομένως με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\sigma_{11} = \frac{206\ 10^9 Pa}{1,3\ 0,4}\{0,7\cdot 10 + 0,3\cdot 12\}10^{-4} \Longleftrightarrow \sigma_{11} = \frac{206}{4\ 1,3}\ 10,6\cdot 10^6 Pa \Longleftrightarrow \sigma_{11} = \frac{103}{2\ 13}\ 106 MPa \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{11} = \frac{103}{13}\,53\text{MPa} = 419{,}923\text{Mpa}$$

$$\sigma_{22} = \frac{206\ 10^9\text{Pa}}{1{,}3\ 0{,}4}(0{,}7\ 5+0{,}3\ 17)\ 10^{-4} \Leftrightarrow \sigma_{22} = \frac{206}{4\ 1{,}3}\,8{,}6\ 10^6\text{Pa} \Leftrightarrow \sigma_{22} = \frac{103}{2\cdot 13}\,86\text{MPa} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{22} = \frac{103}{13}\,43\ \text{MPa} = 340{,}692\text{MPa}$$

$$\sigma_{33} = \frac{206\ 10^9\text{Pa}}{1{,}3\ 0{,}4}(0{,}7\ 7+0{,}3\ 15)\ 10^{-4} \Leftrightarrow \sigma_{33} = \frac{206}{4\ 1{,}3}\,9{,}4\ 10^6\text{Pa} \Leftrightarrow \sigma_{33} = \frac{103}{2\ 13}\,94\text{MPa} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{33} = \frac{103}{13}\,47\ \text{MPa} = 372{,}385\ \text{MPa}$$

επίσης

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} \Leftrightarrow \sigma_{12} = \frac{206\ 10^9\text{Pa}}{1{,}3}\,10^{-4} \Leftrightarrow \sigma_{12} = \frac{103}{13}\,2\text{MPa} = 15{,}846\text{MPa}$$

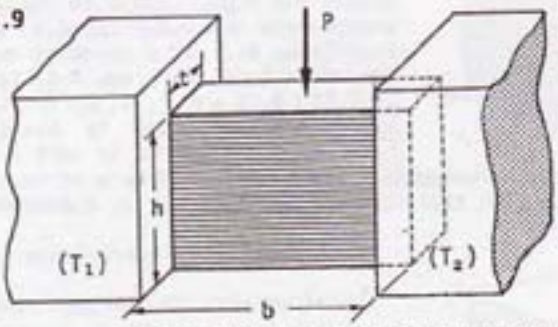
$$\sigma_{13} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{13} \Leftrightarrow \sigma_{13} = \frac{206\ 10^9\text{Pa}}{1{,}3}\,4\ 10^{-4} \Leftrightarrow \sigma_{13} = \frac{103}{13}\,8\text{MPa} = 63{,}385\text{MPa}$$

$$\sigma_{23} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{23} = \sigma_{23} = \frac{206\ 10^9\text{Pa}}{1{,}3}\,5\ 10^{-4} \Leftrightarrow \sigma_{23} = \frac{103}{13}\,10\text{MPa} = 79{,}231\text{MPa}$$

δηλαδή ο τανυστής των τάσεων είναι

$$(\sigma_{ij}) = \frac{103}{13}\begin{bmatrix} 53 & 2 & 8 \\ 2 & 43 & 10 \\ 8 & 10 & 47 \end{bmatrix}\text{MPa} = \begin{bmatrix} 419{,}923 & 15{,}846 & 63{,}385 \\ 15{,}846 & 340{,}692 & 79{,}231 \\ 63{,}385 & 79{,}231 & 372{,}385 \end{bmatrix}\text{MPa}$$

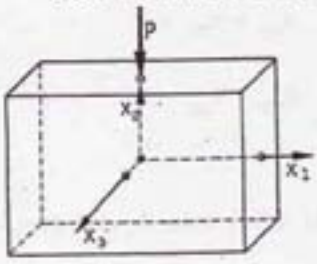
5.9



Μια λεπτή κατακόρυφη πλάκα διαστάσεων h×b×t περιορίζεται αριστερά και δεξιά από κατακόρυφα τοιχώματα (T_1) και (T_2) με πολύ μεγάλη ακαμψία, ώστε πρακτικά να θεωρούνται απαραμόρφωτα, ενώ στην κάτω πλευρά στηρίζεται στο έδαφος που επίσης θεωρείται απαραμόρφωτο. Αν η πλάκα φορτίζεται με ένα φορτίο P όπως φαίνεται στο σχήμα και υποθέσουμε ότι αυτό κατανέμεται ομοιόμορφα, όπως ακριβώς θεωρούμε ότι ομοιόμορφες είναι παντού οι τάσεις, ζητούνται να προσδιορισθούν οι τάσεις και οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στην πλάκα καθώς και η μεταβολή του πάχους t. Τί θα συμβεί όταν το πάχος της πλάκας γίνει πολύ μεγάλο (θεωρητικά άπειρο);

Δίδονται: h=3m, b=2,5m, t=0,1m, P=250t και $E=2\cdot 10^6\text{kp/cm}^2$, ν=0,3

(20% εξέτασης Μαΐου 1980)



Το φορτίο P κατανέμεται όπως είπαμε ομοιόμορφα, δηλαδή αναπτύσσεται τάση

$$\sigma_{22} = \frac{-P}{b\ t} \Leftrightarrow \sigma_{22} = \frac{-250\ 10^3}{250\ 10}\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \Leftrightarrow \sigma_{22} = -100\ \text{at}$$

Κάθετα στον άξονα x_3 έχουμε ελεύθερο σύνορο, δηλαδή

$$\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$$

Το ότι τα τοιχώματα θεωρούνται άκαμπτα σημαίνει ότι

$$\varepsilon_{11} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{E}\{\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{11} = \nu\sigma_{22} \Leftrightarrow \sigma_{11} = -30\text{at}$$

οπότε οι παραμορφώσεις κατά τις άλλες δύο διευθύνσεις είναι

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\{\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33}+\sigma_{11})\} \Longrightarrow \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\{\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}\} \Longleftrightarrow \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}10^{-6}(-100+0,3\ 30) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon_{22} = -4,55\ 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\{\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\} \Longleftrightarrow \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \Longleftrightarrow \varepsilon_{33} = \frac{-0,3}{2}\cdot 10^{-6}\ (-100-30) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon_{33} = 1,95\ 10^{-5}$$

Με άλλα λόγια η εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση εκφράζεται αντίστοιχα από τους τανυστές (σ_{ij}) και (ε_{ij}), όπου

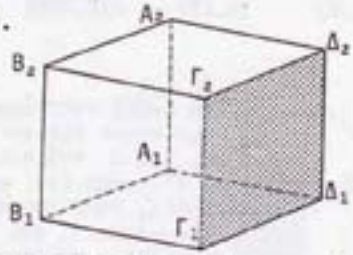
$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} at\ , \quad (\varepsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4,55 & 0 \\ 0 & 0 & 1,95 \end{bmatrix}\cdot 10^{-5}$$

και η ζητούμενη μεταβολή πάχους της πλάκας είναι

β) $$\frac{\Delta t}{t} = \varepsilon_{33} \Longleftrightarrow \frac{\Delta t}{t} = 1,95\ 10^{-5} \Longleftrightarrow \Delta t = 1,95\ 10^{-4}\ cm$$

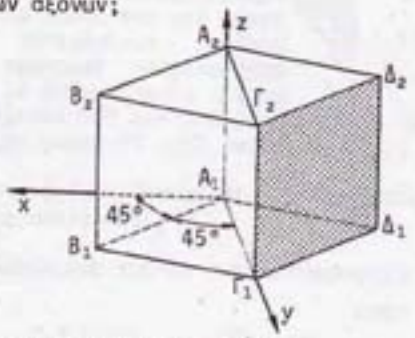
Για $t \to \infty$ έχουμε πρόβλημα επίπεδης παραμορφωσιακής κατάστασης ($\varepsilon_{33}=0$) και θα πρέπει να επαναληφθεί η επίλυση με αυτό το δεδομένο.

5.10.



Ο κύβος $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ με μήκος ακμής 5m αποτελείται από ομογενές και ισότροπο υλικό. Υποθέτοντας ότι οι τάσεις κατανέμονται ομοιόμορφα στο σώμα, ζητάμε να υπολογίσουμε την παραμόρφωση των διαγωνίων Δ_1B_2 και $B_1\Delta_1$ αν γνωρίζουμε ότι: α) Η μεταβολή του μήκους των διαγωνίων $A_1\Gamma_1$, $A_1\Gamma_2$ και $A_1\Delta_1$ είναι αντίστοιχα 0,2%, 0,3% και 0,1%. β) Το διάνυσμα τάσης που αντιστοιχεί κατά το διαγώνιο επίπεδο $A_1\Gamma_1\Gamma_2A_2$ είναι κάθετο σε αυτό (το $A_1\Gamma_1\Gamma_2A_2$). Η ακμή A_1A_2 σχηματίζει μετά την παραμόρφωση γωνία $(\pi/2 - 0,001)$ με το παραμορφωμένο επίπεδο $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$. Ποιές είναι οι κύριες παραμορφώσεις και οι διευθύνσεις των κυρίων αξόνων;

(40% Προχ. Διαγωνίσματος 23/11/1985)



Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα τάσης που αντιστοιχεί κατά το διαγώνιο επίπεδο $A_1\Gamma_1\Gamma_2A_2$ είναι κάθετο σε αυτό δηλαδή επιλέγοντας σύστημα αναφοράς το Oxyz έχουμε

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$$

επομένως

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = 0$$

από την παραμόρφωση της $A_1\Gamma_1$

$$\varepsilon_{yy} = 2\cdot 10^{-3}$$

Η παραμόρφωση της $A_1\Delta_1$ προκύπτει αν στραφούμε περί τον z κατά $\theta_z=45°$ έτσι ώστε ο y να συμπέσει με την $A_1\Delta_1$, δηλαδή

$$\varepsilon'_{A_1\Delta_1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\cos 2\theta_z + \varepsilon_{xy}\sin 2\theta_z \Longleftrightarrow 10^{-3} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ 10^{-3} = \varepsilon_{xx} + 2\ 10^{-3} \Leftrightarrow \varepsilon_{xx} = 0.$$

Επίσης η παραμόρφωση της $A_1\Gamma_2$ προκύπτει αν στραφούμε περί τον x κατά $\theta_x = 45°$ έτσι ώστε ο y να συμπέσει με την $A_1\Gamma_2$, δηλαδή

$$\varepsilon_{A_1\Gamma_2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz})\cos 2\theta_x + \varepsilon_{yz}\sin 2\theta_x \Leftrightarrow 3\ 10^{-3} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}) + \varepsilon_{yz} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\ 10^{-3} = 2\ 10^{-3} + \varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{yz} \Leftrightarrow 2\varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zz} = 4\ 10^{-3}. \qquad (a)$$

Είναι όμως γνωστό ότι η A_1A_2 σχηματίζει μετά την παραμόρφωση γωνία $(\frac{\pi}{2} - 0{,}001)$ με το παραμορφωμένο επίπεδο $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ και ότι $\gamma_{xz} = 0$, οπότε

$$\gamma_{yz} = 10^{-3} \Leftrightarrow 2\varepsilon_{yz} = 10^{-3} \Leftrightarrow \varepsilon_{yz} = 0{,}5\ 10^{-3} \Leftrightarrow \varepsilon_{yz} = 5\ 10^{-4}$$

επομένως η (a) μας δίνει

$$\varepsilon_{zz} = 3\ 10^{-3}$$

Η με άλλα λόγια ο τανυστής των παραμορφώσεων (ε_{ij}) για $i,j = x,y,z$ είναι

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 3 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

και οι κύριες παραμορφώσεις είναι

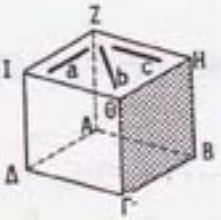
$$\varepsilon_{I,II} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}) \pm \frac{1}{2}\{(\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz})^2 + 4\varepsilon_{yz}^2\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2\ 10^3\varepsilon_{I,II} = 5 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_I = 3{,}207\ 10^{-3} \\ \varepsilon_{II} = 1{,}793\ 10^{-3} \end{cases}$$

προφανώς η $\varepsilon_{III} = 0$

και η γωνία στροφής είναι θ_o

$$\tan 2\theta_o = \frac{2\varepsilon_{yz}}{\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz}} \Leftrightarrow \tan 2\theta_o = -1 \Leftrightarrow 2\theta_o = -45° \Leftrightarrow \theta_o = -22°30'$$

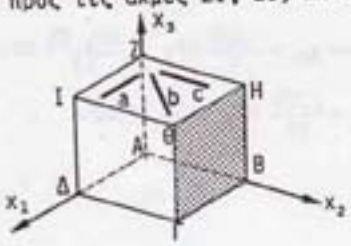
5.11



Ο κύβος ΑΒΓΔΖΗΘΙ του σχήματος είναι κατασκευασμένος από ομογενές και ισότροπο υλικό με μέτρο ελαστικότητας E=200GPa και λόγο του Poisson ν=0,30. Ζητούνται να προσδιορισθούν η εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση στον κύβο, καθώς επίσης οι κύριες τάσεις και οι διευθύνσεις τους, αν γνωρίζουμε ότι:

α) Η ορθή τάση που εφαρμόζεται στην έδρα ΖΗΘΙ είναι θλιπτική με ένταση 100MPa. β) Οι γωνίες ΔΑΖ και ΒΑΖ δεν μεταβλήθηκαν. γ) Οι ενδείξεις τριών μηκυνσιομέτρων a,b,c που τοποθετήσαμε στην έδρα ΖΗΘΙ παράλληλα προς τις ακμές ΖΙ, ΖΘ, ΖΗ είναι $\varepsilon_a = 5\ 10^{-4}$, $\varepsilon_b = 10^{-4}$, $\varepsilon_c = 2\ 10^{-4}$.

(35% Προχ. Διαγων. 25/10/1986)



Στο (α) μας δίνεται ότι

$$\sigma_{33} = -100\text{MPa}$$

Από το (β) παίρνουμε ότι:

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0$$

και

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$$

ενώ από το (γ) παίρνουμε:

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_a \Leftrightarrow \varepsilon_{11}=5\ 10^{-4} \quad \text{και} \quad \varepsilon_{22}=\varepsilon_c \Leftrightarrow \varepsilon_{22}=2\ 10^{-4}$$

για στροφή του Ax_1x_2 κατά $\theta=45^\circ$ περί τον Ax_3 βρίσκουμε την διεύθυνση του μηκυνσιομέτρου b, δηλαδή

$$\varepsilon_b=\varepsilon'_{11} \Leftrightarrow \varepsilon_b=\frac{1}{2}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+\frac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\cos 2\theta+\varepsilon_{12}\sin 2\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{-4}2 = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+2\varepsilon_{12} \Leftrightarrow 2\varepsilon_{12}=2\ 10^{-4}-5\ 10^{-4}-2\ 10^{-4} \Leftrightarrow \varepsilon_{12}=-\frac{5}{2}10^{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{12}=-25\ 10^{-5}$$

αλλά

$$\varepsilon_{12}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \Leftrightarrow \sigma_{12}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} \Leftrightarrow \sigma_{12}=\frac{200\ 10^9 Pa}{1+0,3}(-25\ 10^{-5}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{12}=\frac{-50}{1,3}10^6 Pa \Leftrightarrow \sigma_{12}=\frac{-500}{13}\ MPa \cong -38,462\ MPa.$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Hooke έχουμε ότι

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{11}&=\frac{1}{E}\{\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\}\\ \varepsilon_{22}&=\frac{1}{E}\{\sigma_{22}-\nu(\sigma_{33}+\sigma_{11})\}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}=\frac{1-\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22})-\frac{2\nu}{E}\sigma_{33} \Leftrightarrow \sigma_{11}+\sigma_{22}=\frac{E}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+\frac{2\nu}{1-\nu}\sigma_{33} \qquad (\alpha)$$

οπότε η

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}\{\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{33}=\frac{1}{E}\sigma_{33}-\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})-\frac{2\nu^2}{E(1-\nu)}\sigma_{33} \Leftrightarrow \varepsilon_{33}=\frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)}\sigma_{33}-\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{33}=\frac{1-0,3-2\ 0,3^2}{200\ 10^9 Pa(1-0,3)}(-100\ 10^6 Pa)-\frac{0,3}{1-0,3}(5+2)\ 10^{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{33}=-\frac{0,7-0,18}{2\ 0,7}\ 10^{-3}-\frac{3}{7}\ 7\ 10^{-4} \Leftrightarrow \varepsilon_{33}=-\frac{0,52}{1,4}\ 10^{-3}-3\ 10^{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{33}=-\frac{52}{14}\ 10^{-4}-3\ 10^{-4} \Leftrightarrow \varepsilon_{33}=-(\frac{26}{7}+3)\cdot 10^{-4} \Leftrightarrow \varepsilon_{33}=-\frac{47}{7}\ 10^{-4}\cong -6,714\ 10^{-4}$$

επίσης

$$\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}=\frac{1+\nu}{E}(\sigma_{11}-\sigma_{22}) \Leftrightarrow \sigma_{11}-\sigma_{22}=\frac{E}{1+\nu}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}) \qquad (\beta)$$

προσθέτοντας τις (α), (β) βρίσκουμε ότι

$$2\sigma_{11}=\frac{2\nu}{1-\nu}\sigma_{33}+\frac{E}{(1-\nu)(1+\nu)}\{(1-\nu)(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})+(1+\nu)(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma_{11}=\frac{2\nu}{1-\nu}\sigma_{33}+\frac{E}{1-\nu^2}(2\varepsilon_{11}+2\nu\varepsilon_{22}) \Leftrightarrow \sigma_{11}=\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{33}+\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{11}=\frac{0,3}{0,7}(-100MPa)+\frac{200\ 10^3 MPa}{1-0,9}(5+0,3\ 2)\ 10^{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{11}=-\frac{3}{7}\cdot 100MPa+\frac{20}{0,91}\ 5,6\ MPa \Leftrightarrow \sigma_{11}=\frac{-300}{7}MPa+\frac{200\ 56}{91}MPa \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{11}=\frac{-300\ 13+200\ 56}{7\ 13}MPa \Leftrightarrow \sigma_{11}=\frac{7300}{91}MPa \cong 80,220MPa$$

ενώ αφαιρώντας έχουμε:

$$-2\sigma_{22} = -\frac{2\nu}{1-\nu}\sigma_{33} + \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)}\{(1-\nu)(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}) - (1+\nu)(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sigma_{22} = -\frac{2\nu}{1-\nu}\sigma_{33} + \frac{E}{1-\nu^2}(-2\nu\varepsilon_{11} - 2\varepsilon_{22}) \Leftrightarrow \sigma_{22} = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{33} + \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{22} = \frac{0,3}{0,7}(-100\text{MPa}) + \frac{200\ 10^3\text{MPa}}{1-0,09}(2 + 0,3\ 5)\ 10^{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{22} = \frac{-300}{7}\text{ MPa} + \frac{20}{0,91}\ 3,50\text{ MPa} \Leftrightarrow \sigma_{22} = \frac{3100}{91}\text{ MPa} = 34,066\text{ MPa}$$

Με άλλα λόγια η εντατική και η παραμορφωσιακή κατάσταση εκφράζονται από τους τανυστές (σ_{ij}), (ε_{ij}) αντίστοιχα που έχουν την μορφή

$$(\sigma_{ij}) = \frac{1}{91}\begin{bmatrix} 7300 & -3500 & 0 \\ -3500 & 3100 & 0 \\ 0 & 0 & -9100 \end{bmatrix}\text{MPa} \qquad (\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 350 & -175 & 0 \\ -175 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & -47 \end{bmatrix} 10^{-5}$$

Παρατηρούμε ότι ο άξονας x_3 αποτελεί κύριο άξονα, δηλαδή το πρόβλημα του προσδιορισμού των κυρίων τάσεων και των διευθύνσεών τους είναι επίπεδο.

Συνεπώς η γωνία στροφής θ_o δίνεται από τη σχέση:

$$\tan 2\theta_o = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}} \Leftrightarrow \tan 2\theta_o = \frac{-2\ 3500}{7300-3100} \Leftrightarrow \tan 2\theta_o = \frac{-7000}{4200} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan 2\theta_o = -\frac{10}{6} = 1,667 \Rightarrow 2\theta_o = 59\ 2'\ 10'' \Rightarrow \theta_o = 29\ 31'\ 5''$$

και οι κύριες τάσεις

$$\sigma_{I,II} = \frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \pm \frac{1}{2}\{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2\}^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{91}{50}\sigma_{I,II} = \{104 \pm (47^2 + 4\ 35^2)^{\frac{1}{2}}\}\text{MPa} \Leftrightarrow \frac{91}{50}\sigma_{I,II} = \{104 \pm 7(6^2 + 10^2)^{\frac{1}{2}}\}\text{MPa}$$

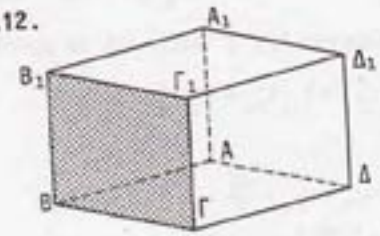
$$\Leftrightarrow \sigma_{I,II} = \frac{50}{91}(104 \pm \sqrt{136})\text{MPa} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_I = \frac{50}{91}(104 + \sqrt{136})\text{MPa} = 63,550\text{MPa} \\ \sigma_{II} = \frac{50}{91}(104 - \sqrt{136})\text{MPa} = 50,735\text{MPa} \end{cases}$$

και

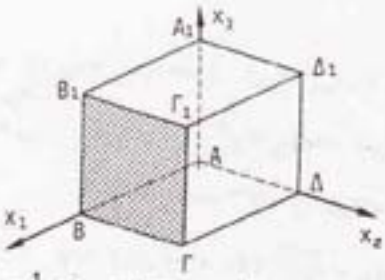
$$\sigma_{III} = -100\text{MPa}$$

5.12.



Στις παράπλευρες έδρες A_1B_1BA, $B_1B\Gamma\Gamma_1$, $\Gamma_1\Gamma\Delta\Delta_1$ και $A_1A\Delta\Delta_1$ του κύβου $AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ ασκείται μία ομοιόμορφη πίεση p, ενώ στις έδρες $AB\Gamma\Delta$ και $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ ασκείται διπλάσια πίεση (δηλαδή 2p). Γνωρίζοντας ότι η απόλυτη τιμή της ανηγμένης διάγκωσης είναι 0,08% και ότι η παραμόρφωση της ακμής $\Gamma\Gamma_1$ είναι ίση με -0,07% ζητούνται να υπολογισθούν οι παραμορφώσεις και ο λόγος του Poisson αν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι E=200GPa. Πόση είναι η παραμόρφωση της διαγωνίου $A\Gamma_1$;

(20% Εξέτασης 7/9/1987)



Επιλέγουμε το σύστημα αξόνων $Ax_1x_2x_3$ που φαίνεται στο σχήμα, οπότε από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$\sigma_{11} = p, \quad \sigma_{22} = p, \quad \sigma_{33} = 2p.$$

Οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων που εκφράζουν τον νόμο του Hooke μας δίνουν:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}\{\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}\{\sigma_{22}-\nu(\sigma_{33}+\sigma_{11})\} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}\{\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1-3\nu}{E}p \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1-3\nu}{E}p \\ \varepsilon_{33} &= \frac{2(1-\nu)}{E}p \end{aligned}\right| \Longrightarrow \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} = \frac{4-8\nu}{E}p$$

δηλαδή

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}4p$$

Εφόσον ο κύβος θλίβεται σε όλες τις έδρες του συνεπάγεται πως η ανηγμένη διόγκωση είναι αρνητική, δηλαδή

$$\theta = -0{,}8\ 10^{-3} \Longleftrightarrow -8\ 10^{-4} = \frac{1-\nu}{E}4p \qquad (\alpha)$$

και από την παραμόρφωση της ακμής $\Gamma\Gamma_1$ έχουμε ότι

$$\varepsilon_{33} = -0{,}7\cdot 10^{-3} \Longleftrightarrow -7\ 10^{-4} = \frac{1-2\nu}{E}2p \qquad (\beta)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε

$$\frac{8}{7} = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \Longleftrightarrow 4(1-\nu) = 7(1-2\nu) \Longleftrightarrow 4-4\nu-7+14\nu = 0 \Longleftrightarrow 10\nu = 3 \Longleftrightarrow \nu = 0{,}3.$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (β) βρίσκουμε

$$-7\ 10^{-4} = \frac{1-0{,}3}{200\ 10^3 MPa}2p \Longleftrightarrow \frac{-7\ 20MPa}{0{,}7} = 2p \Longleftrightarrow p = -100MPa$$

και οι παραμορφώσεις

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{1-3\ 0{,}3}{200\ 10^3 MPa}(-100MPa) \Longleftrightarrow \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{-0{,}1}{2}10^{-3} \Longleftrightarrow \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -5\ 10^{-5}$$

Με άλλα λόγια η εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση εκφράζεται από τους τανυστές (σ_{ij}) και (ε_{ij}) αντίστοιχα που έχουν την μορφή:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -200 \end{bmatrix} MPa, \qquad (\varepsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -70 \end{bmatrix} 10^{-5}$$

Η ζητούμενη παραμόρφωση της διαγωνίου $A\Gamma_1$ δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon_{A\Gamma_1} = \varepsilon_{11}r_{S1}^2 + \varepsilon_{22}r_{S2}^2 + \varepsilon_{33}r_{S3}^2$$

όπου

$$r_{S1} = r_{S2} = r_{S3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

τα κατευθύνοντα συνημίτονα της $A\Gamma_1$, οπότε

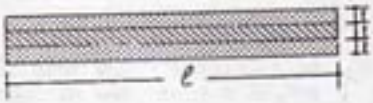
$$\varepsilon_{A\Gamma_1} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) \Longleftrightarrow \varepsilon_{A\Gamma_1} = \frac{\theta}{3} \Longleftrightarrow \varepsilon_{A\Gamma_1} = -\frac{8}{3}10^{-4} = -2{,}667\ 10^{-4}$$

5.α. Ενα δοκίμιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι κατασκευασμένο από υλικό με μέτρο ελαστικότητας E και λόγο του Poisson ν. Ζητείται να προσδιορισθεί το μέτρο διόγκωσης K όταν το δοκίμιο καταπονείται με υδροστατική πίεση σ_o.

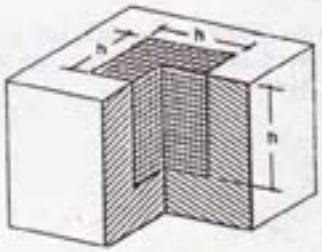
5.β. Δοκίμιο από κράμα αλουμινίου κυλινδρικού σχήματος με ύψος 250mm και διάμετρο 50mm, έχει παγιωμένη την παράπλευρη επιφάνειά του έτσι ώστε να αποκλείεται εγκάρσια προς τον άξονά του παραμόρφωση. Ζητείται να υπολογισθεί η αξονική δύναμη που θα συμπιέσει το δοκίμιο κατά 0,5mm.

Πόση είναι η βράχυνση του ύψους του δοκιμίου για το ίδιο αξονικό φορτίο αλλά με ελεύθερη την παράπλευρη επιφάνειά του (χωρίς παγίωση). Να προσδιορισθεί επίσης η απαιτούμενη μεταβολή του αξονικού φορτίου αν η αξονική παραμόρφωση δεν πρέπει να υπερβαίνει το 0,2%. Δίνεται το μέτρο ελαστικότητας του υλικού E=70GPa και ο λόγος του Poisson ν=0,30.

5.γ. Το σύνθετο έλασμα του σχήματος είναι κατασκευασμένο από τρία ισοπαχή ελάσματα, δύο χαλύβδινα συμμετρικώς τοποθετημένα και ένα ενδιάμεσο από ορείχαλκο. Τα υλικά θεωρούνται ελαστοπλαστικά με μέτρα ελαστικότητας E_{St}=200GPa, E_{Cu}=100GPa, τάσεις διαρροής σ_Δ^{St}=300MPa, σ_Δ^{Cu}=100MPa και συντελεστές θερμικής διαστολής $\alpha_{St}=12\cdot10^{-6}/°C$, $\alpha_{Cu}=20\cdot10^{-6}/°C$ για τον χάλυβα και τον ορείχαλκο αντιστοίχως. Να υπολογισθούν οι τάσεις που αναπτύσσονται αν η θερμοκρασία γίνει διαδοχικά 150°C, 207,5°C και 300°C, θεωρώντας ότι το έλασμα συνδέθηκε στους 20°C.



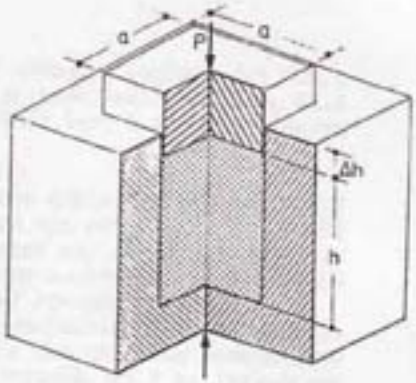
5.δ. Κύβος πλευράς h από ελαστοπλαστικό υλικό, βρίσκεται εγκλωβισμένος σε θερμικά μονωμένη υποδοχή με απολύτως ανένδοτα τοιχώματα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Γνωρίζουμε επίσης, πως όταν η θερμοκρασία του ελαστοπλαστικού υλικού είναι 20°C τότε ο κύβος αποκτά πλήρη επαφή με τα τοιχώματα της υποδοχής χωρίς να αναπτύσσονται τάσεις. Υποθέτουμε ότι η θερμοκρασία αυξάνεται σταδιακά πρώτα στους 200°C και στη συνέχεια στους 500°C. Ζητούνται να προσδιορισθούν οι τάσεις που αναπτύσσονται στις δύο αυτές στάθμες θερμοκρασίας υπό την προϋπόθεση ότι ο κύβος μπορεί να παραμορφώνεται ελεύθερα κατά τη διεύθυνση του ύψους του. Δίνονται το μέτρο ελαστικότητας του υλικού E = 200GPa, ο λόγος του Poisson ν=0,30, ο συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha=14\cdot10^{-6}/°C$ και η τάση διαρροής σ_Δ=200MPa.



5.ε. Ενα χαλύβδινο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο καταπονείται σε όλες τις έδρες του μόνο με ορθές τάσεις (δηλαδή αυτές οι τάσεις είναι κύριες). Γνωρίζουμε ότι η μία τάση είναι εφελκυστική ίση με 60MPa, ενώ οι άλλες δύο που τις συμβολίζουμε σ_{11} και σ_{22} μπορεί να είναι είτε εφελκυστικές είτε θλιπτικές τέτοιες ώστε να μη εμφανίζεται παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση της σ_{22} και συγχρόνως η διατμητική τάση στο υλικό να μη υπερβαίνει τα 75MPa σε κάθε επίπεδο. Ζητούνται να προσδιορισθούν τα όρια μέσα στα οποία κυμαίνεται η σ_{11} καθώς επίσης και οι αντίστοιχες τιμές της σ_{22}. Δίνεται το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα E=208GPa και ο λόγος του Poisson ν=0,286.

5.ς. Σε ένα απαραμόρφωτο σώμα μία κοιλότητα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος h και βάση τετράγωνο πλευράς a είναι γεμάτη με ελαστικό υλικό του οποίου το μέτρο ελαστικότητας είναι E και ο λόγος του Poisson ν.

Μια άκαμπτη πλάκα τοποθετείται πάνω στο ελαστικό υλικό και το συμπιέζει με την εφαρμογή δύναμης P, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, με αποτέλεσμα τη μείωση κατά Δh του ύψους του ελαστικού υλικού. Ζητείται να προσδιορισθεί η δύναμη P συναρτήσει των γεωμετρικών και φυσικών παραμέτρων του προβλήματος.



5.ζ. Σε ένα σημείο ελαστικού σώματος οι κύριες παραμορφώσεις συνδέονται με τη σχέση:

$$\frac{\varepsilon_I}{5} = \frac{\varepsilon_{II}}{4} = \frac{\varepsilon_{III}}{3}$$

Αν η μέγιστη κύρια τάση είναι σ_I=2000at να προσδιορισθούν οι άλλες δύο. Δίνεται ν=0,30 ο λόγος του Poisson για το υλικό του σώματος.

5.η. Σε ένα σημείο ομογενούς και ισότροπου ελαστικού σώματος οι κύριες παραμορφώσεις συνδέονται με τη σχέση:

$$\frac{\varepsilon_I}{2} = -\frac{\varepsilon_{II}}{3} = \frac{\varepsilon_{III}}{4}$$

Αν ο λόγος του Poisson είναι ν=0,25 να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις κύριες τάσεις μεταξύ τους και να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι Mohr τάσεων και παραμορφώσεων, είναι ομοιόθετοι.