Εξετάσεις HTML – 2ο τμήμα Κανονική 22/6/2009

Κατεύθ.: Μαθηματικής Εφαρμογών

Κανονικά πολύγωνα

11.1 Ορισμός κανονικού πολυγώνου

Όπως είναι γνωστό, ένα τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες. Το ίδιο ισχύει και για ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Τέτοια πολύγωνα λέγονται κανονικά.

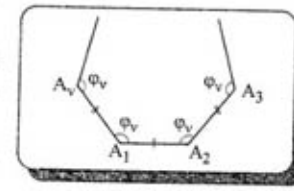
Ορισμός

Ένα πολύγωνο λέγεται *κανονικό*, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

• Γωνία κανονικού ν-γώνου

Έστω $A_1A_2...A_\nu$ ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές και έστω $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \ldots = \hat{A}_\nu = \varphi_\nu$ (σχ.1). Επειδή το άθροισμα των γωνιών κάθε κυρτού ν-γώνου είναι $(\nu - 2)180°$, θα έχουμε $\nu\varphi_\nu = (\nu - 2) \cdot 180°$ και επομένως

$$\varphi_\nu = 180° - \frac{360°}{\nu}.$$



Σχήμα 1

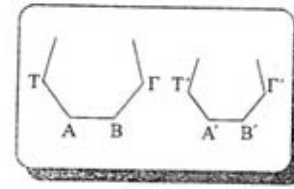
• Ομοιότητα κανονικών πολυγώνων

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο κανονικά πολύγωνα ΑΒΓ...Τ, Α΄Β΄Γ΄...Τ΄ (σχ.2) με τον ίδιο αριθμό πλευρών ν. Τότε η γωνία καθενός είναι $180° - \frac{360°}{\nu}$, οπότε έχουμε:

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \ldots, \hat{T} = \hat{T}' \quad (1).$$

Επίσης, αφού ΑΒ=ΒΓ=...= ΤΑ και Α΄Β΄=Β΄Γ΄=...=Τ΄Α΄ θα έχουμε

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \ldots = \frac{TA}{T'A'} \quad (2).$$



Σχήμα 2

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι τα πολύγωνα ΑΒΓ...Τ και Α΄Β΄Γ΄...Τ΄ είναι όμοια. Έτσι, έχουμε το επόμενο συμπέρασμα:

Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

1/6

11.2 Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

Μια σημαντική ιδιότητα των κανονικών πολυγώνων εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1

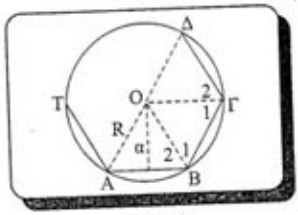
Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ...Τ ένα κανονικό πολύγωνο (σχ. 3). Θεωρούμε τον κύκλο (Ο, R) που διέρχεται από τις κορυφές Α, Β, Γ του πολυγώνου. Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος αυτός διέρχεται και από την κορυφή Δ, δηλαδή ότι ΟΔ=R. Επειδή ΟΒ=ΟΓ=R, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \sigma$, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν:

ΟΒ=ΟΓ, ΑΒ=ΓΔ (αφού ΑΒΓΔ... Τ κανονικό) και

$$\hat{B}_2 = \hat{B} - \sigma = \hat{\Gamma} - \sigma = \hat{\Gamma}_2.$$



Σχήμα 3

Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΟΔ = ΟΑ = R. Όμοια αποδεικνύεται ότι ο κύκλος (Ο,R) διέρχεται και από τις υπόλοιπες κορυφές Ε, Ζ, ... Τ και επομένως το πολύγωνο είναι εγγράψιμο. Οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες χορδές του κύκλου (Ο,R), επομένως και τα αποστήματά τους θα είναι ίσα, έστω με α. Επομένως, ο κύκλος (Ο,α) εφάπτεται στις πλευρές του ΑΒΓΔ...Τ, άρα το πολύγωνο είναι περιγράψιμο σε κύκλο. Είναι φανερό, από τα παραπάνω, ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος (Ο,R) και ο εγγεγραμμένος (Ο,α) του πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

• **Στοιχεία κανονικού πολυγώνου**

Αποδείξαμε παραπάνω ότι κάθε κανονικό πολύγωνο έχει έναν περιγεγραμμένο και έναν εγγεγραμμένο κύκλο που έχουν κοινό κέντρο.

Το κοινό κέντρο των δύο αυτών κύκλων λέγεται ***κέντρο*** του πολυγώνου. Η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται *ακτίνα* του πολυγώνου, ενώ η απόσταση του κέντρου από μια πλευρά του, δηλαδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου λέγεται *απόστημα* του πολυγώνου.

Επειδή τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, ... , $\overset{\frown}{TA}$ (σχ.3) είναι ίσα, οι επίκεντρες

2/6

γωνίες ΑÔΒ, ΒÔΓ, …, ΤÔΑ είναι ίσες. Καθεμία από τις γωνίες αυτές, δηλαδή η γωνία υπό την οποία φαίνεται κάθε πλευρά του πολυγώνου από το κέντρο του, λέγεται *κεντρική γωνία* του πολυγώνου.

Στα επόμενα, σε ένα κανονικό ν-γωνο θα συμβολίζουμε με R την ακτίνα του, με λ_ν την πλευρά του, με α_ν το απόστημά του, με ω_ν την κεντρική του γωνία, με P_ν την περίμετρό του και E_ν το εμβαδόν του.

Για τα στοιχεία των κανονικών πολυγώνων ισχύει το εξής θεώρημα.

Θεώρημα I

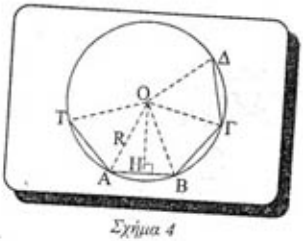
Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ισχύουν οι εξής σχέσεις:

(i) $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$ (ii) $P_\nu = \nu\lambda_\nu$

(iii) $\omega_\nu = \frac{360°}{\nu}$ (iv) $E_\nu = \frac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu$

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ…Τ ένα κανονικό ν-γωνο, R η ακτίνα του, $AB = \lambda_\nu$ η πλευρά του και $OH = \alpha_\nu$ το απόστημά του (σχ.4).



Σχήμα 4

(i) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΟΑ, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει $OH^2+HA^2=OA^2$, δηλαδή

$$\alpha_\nu^2 + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 = R^2.$$

(ii) Επειδή $AB = B\Gamma = \ldots = T\Lambda = \lambda_\nu$, θα είναι $P_\nu = \nu\lambda_\nu$.

(iii) Επειδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \ldots = \overset{\frown}{T\Lambda}$ θα είναι

$$A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \ldots = T\hat{O}A = \omega_\nu$$

και αφού οι γωνίες ΑÔΒ, ΒÔΓ, … και ΤÔΑ έχουν άθροισμα 360°, έχουμε $\nu\omega_\nu = 360°$, δηλαδή $\omega_\nu = \frac{360°}{\nu}$.

(iv) Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, … , ΟΤΑ είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα και ισεμβαδικά και επομένως έχουμε:

$$E_\nu = \nu(OAB) = \nu\frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2}\nu\lambda_\nu\alpha_\nu = \frac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu$$

αφού $P_\nu = \nu\lambda_\nu$.

3/6

να καλύψουν το επίπεδο γύρω από ένα σημείο. Τα κανονικά αυτά πολύγωνα είναι τα ισόπλευρα τρίγωνα, τα τετράγωνα και τα κανονικά εξάγωνα. Να αποδείξετε την αλήθεια του ισχυρισμού αυτού των Πυθαγορείων.

2. *Έστω κανονικό ν-γωνο και σημείο Σ στο εσωτερικό του. Αν $d_1, d_2, \ldots, d_\nu$ είναι οι αποστάσεις του Σ από τις πλευρές του ν-γώνου, να αποδείξετε ότι*

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_\nu = \nu a_\nu,$$

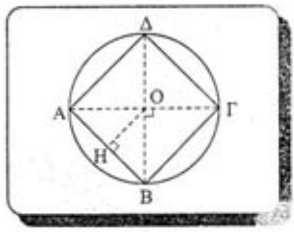
όπου a_ν το απόστημα του ν-γώνου.

3. *Σε κανονικό δεκάγωνο ΑΒΓΔ...Κ η πλευρά ΑΒ προεκτεινόμενη τέμνει την προέκταση της ακτίνας ΟΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι ΑΜ=ΑΔ.*

11.3 Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

Από την παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν ($\nu \geq 3$) πλευρές, αρκεί να χωρίσουμε ένα κύκλο σε ν ίσα τόξα. Η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη δεν είναι δυνατή για κάθε ν. (σχόλιο §11.2). Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την εγγραφή μερικών βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και θα υπολογίσουμε τα στοιχεία τους.

• Τετράγωνο



Σχήμα 7

Έστω ένας κύκλος (Ο,R) (σχ.7). Αν φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ, θα είναι $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}A = 90°$, οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$ και επομένως το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε

$$\lambda_4^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2,$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\boldsymbol{\lambda_4 = R\sqrt{2}}\ .$$

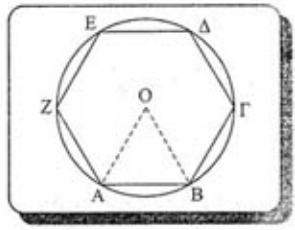
Από τη βασική σχέση $a_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$ με ν = 4 προκύπτει ότι

$$a_4^2 = R^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{4} = \frac{R^2}{2},$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}\ .$$

• Κανονικό εξάγωνο



Σχήμα 8

Έστω κύκλος (Ο,R) και ΑΒ η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον (Ο,R) (σχ.8).
Τότε $A\hat{O}B = \omega_6 = 60°$ και επειδή ΟΑ = ΟΒ (=R) το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο. Άρα ΑΒ = ΟΑ = R, δηλαδή

4/6

$$\lambda_6 = R\,.$$

Έτσι για την εγγραφή κανονικού εξαγώνου σε κύκλο, παίρνουμε πάνω στον κύκλο έξι διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta E}$, $\overset{\frown}{EZ}$ και $\overset{\frown}{ZA}$ με αντίστοιχη χορδή R, το καθένα, οπότε το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο. Επειδή $\lambda_6 = R$, από τη βασική σχέση $\alpha_6^2 + \frac{\lambda_6^2}{4} = R^2$ με αντικατάσταση του λ_6 προκύπτει ότι:

$$\alpha_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}, \text{ ή } \boldsymbol{\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}.$$

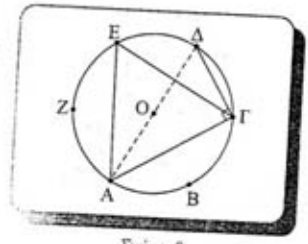
• Ισόπλευρο τρίγωνο

Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ (σχ.9) διαιρούν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα, τότε τα σημεία Α, Γ, Ε είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, αφού $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma E} = \overset{\frown}{EA} = 120°$.
Επειδή $A\hat{\Gamma}\Delta = 180°$, η ΑΔ είναι διάμετρος και επομένως το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε

$$\lambda_3^2 = A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Delta\Gamma^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2,$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{\lambda_3 = R\sqrt{3}}\,.$$



Σχήμα 9

Εφαρμόζοντας τώρα τη σχέση $\alpha_3^2 + \frac{\lambda_3^2}{4} = R^2$, προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\alpha_3 = \frac{R}{2}}\,.$$

Τα στοιχεία των παραπάνω πολυγώνων συγκεντρώνονται στον επόμενο πίνακα:

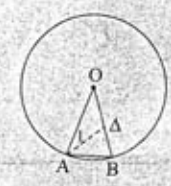
	Τετράγωνο	**Κανονικό εξάγωνο**	**Ισόπλευρο τρίγωνο**
Πλευρά λ_ν	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$
Απόστημα α_ν	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Σε δοσμένο κύκλο να εγγραφεί κανονικό δεκάγωνο.

Λύση

Έστω $AB = \lambda_{10}$ (σχ.10) η πλευρά του κανονικού δεκαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον κύκλο (O,R). Η κεντρική γωνία



Σχήμα 10

5/6

$A\hat{O}B$ είναι $\frac{360°}{10} = 36°$ και καθεμία από τις γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΒ είναι $\hat{A} = \hat{B} = 72°$.

Έτσι, αν φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας ΟΑΒ τα τρίγωνα ΔΟΑ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή, αφού είναι

$$\Delta\hat{A}O = 36° = A\hat{O}B \quad \text{και} \quad A\hat{\Delta}B = \hat{A}_1 + \hat{O} = 36° + 36° = 72° = \hat{B}$$

Επομένως, $O\Delta = A\Delta = AB = \lambda_{10}$ και $B\Delta = R - \lambda_{10}$.

Με εφαρμογή του θεωρήματος της διχοτόμου στο τρίγωνο ΟΑΒ προκύπτει ότι

$$\frac{AB}{AO} = \frac{\Delta B}{\Delta O} \Leftrightarrow \frac{\lambda_{10}}{R} = \frac{R - \lambda_{10}}{\lambda_{10}} \Leftrightarrow \lambda_{10}^2 = R(R - \lambda_{10})$$

και επειδή $\lambda_{10} = AB > \Delta B = R - \lambda_{10}$ (αφού $A\hat{\Delta}B > B\hat{A}\Delta$), η τελευταία ισότητα εκφράζει ότι το λ_{10} είναι το μεγαλύτερο από τα τμήματα που προκύπτουν αν διαιρέσουμε την ακτίνα R σε μέσο και άκρο λόγο. Για την κατασκευή του κανονικού δεκαγώνου του εγγεγραμμένου σε κύκλο, διαιρούμε την ακτίνα του κύκλου σε μέσο και άκρο λόγο και στη συνέχεια ορίζουμε τα διαδοχικά τόξα ΑΒ, ΒΓ, ..., που έχουν το καθένα χορδή ίση με το μεγαλύτερο τμήμα στα οποία χωρίζεται η ακτίνα με τη διαίρεσή της σε μέσο και άκρο λόγο.

Δραστηριότητα

Να αποδειχθεί ότι $\lambda_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ *και να υπολογισθεί το* α_{10}.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Σε δοσμένο κύκλο, να εγγραφεί κανονικό οκτάγωνο και να υπολογισθούν η πλευρά του και το απόστημά του.

Σχήμα 11

Λύση

Εγγράφουμε στον κύκλο (σχ.11) το τετράγωνο ΑΒΓΔ και στη συνέχεια παίρνουμε τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των τόξων που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Τότε το ΑΕΒ...Θ είναι το ζητούμενο οκτάγωνο. Αν θεωρήσουμε τη διάμετρο ΕΗ που αντιστοιχεί στο Ε, επειδή το τρίγωνο ΑΗΕ είναι ορθογώνιο και η ΑΒ κάθετη στην ΕΗ, έχουμε

$AE^2 = EH \cdot EI = 2R(R - OI)$ και τελικά, αφού $AE = \lambda_8$ και $OI = \alpha_4$, έχουμε:

$$\lambda_8^2 = 2R(R - \alpha_4) = 2R\left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = R^2(2 - \sqrt{2}) \text{ και επομένως } \boxed{\lambda_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Τέλος, από τη σχέση $\alpha_8^2 + \frac{\lambda_8^2}{4} = R^2$ προκύπτει ότι $\boxed{\alpha_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

6/6