Γραμμικά μοντέλα και σχεδιασμοί

Οκτώβριος 2008

Θέμα 1 α) Ένας γιατρός μελετά την απόδοση τεσσάρων τύπων φαρμάκων στη θεραπεία ασθενών που πάσχουν από αναιμία. Χρησιμοποίησε τέσσερις διαφορετικούς τύπους αναιμικών ασθενών σαν μπλόκ και έκανε το πείραμα σύμφωνα με τον παρακάτω σχεδιασμό.

	Ασθενείς			
Αγωγή (τύπος φαρμάκων)	1	2	3	4
1	20		19	18
2	16	15		17
3	16	15	15	
4		14	15	16

i) Να κάνετε τη στατιστική ανάλυση και να ελέγξετε αν ο τύπος φαρμάκων (αγωγές) είναι σημαντικός. (Δίνεται $F_{(3,5,0.05)} = 5.41$).

ii) Να βρείτε τις *intrablock* $\{\hat{\tau}_i\}$ εκτιμήτριες των επιδράσεων των αγωγών, και να τις χωρίσετε σε ομάδες με το κριτήριο του Duncan(α=0.05). (Δίνονται $r_{0.05}(2,5) = 3.64$, $r_{0.05}(3,5) = 3.74$, $r_{0.05}(4,5) = 3.79$).

β) Θεωρούμε το γραμμικό μοντέλο: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij}$, $i = 1, \ldots, v$, $j = 1, \ldots, b$, που αντιστοιχεί σε έναν BIB σχεδιασμό με παραμέτρους (v, b, r, k, λ). Να δείξετε ότι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των τ_i είναι: $\hat{\tau}_i = \frac{k}{\lambda v} Q_i$.

Θέμα 2 α) Τέσσερεις ηχολήπτες (στήλες, παράγοντας Β) και τέσσερα μικρόφωνα (γραμμές, παράγοντας Α) χρησιμοποιούνται στη μελέτη πιθανών διαφορών στην μείωση των θορύβων ηχογράφησης με τη χρήση τεσσάρων διαφορετικών φίλτρων (λατινικά γράμματα, παράγοντας Γ). Για τη μελέτη του πειράματος χρησιμοποιήθηκε το παρακάτω λατινικό τετράγωνο τάξης 4, και μετρήθηκε ο θόρυβος σε κάθε πειραματική εκτέλεση.

	Ηχολήπτης			
Μικρόφωνο	1	2	3	4
1	A 21	B 26	D 20	C 25
2	D 23	C 26	A 20	B 27
3	B 15	D 13	C 16	A 16
4	C 17	A 15	B 20	D 20

i) Να γίνει η ανάλυση των δεδομένων και να εξαχθούν συμπεράσματα ($a = 0.05$). (Δίνεται $F_{(3,6,0.05)} = 4.76$)

ii) Να χωριστούν οι κύριες επιδράσεις του παράγοντα 'Μικρόφωνο' σε ομάδες με τη μέθοδο του Duncan. (Δίνονται $r_{0.05}(2,6) = 3.46$, $r_{0.05}(3,6) = 3.58$, $r_{0.05}(4,6) = 3.64$).

iii) Χρησιμοποιώντας τις ορθογώνιες αντιθέσεις $A_1 = (-3,-1,1,3)$, $A_2 = (1,-1,-1,1)$, $A_3 = (-1,3,-3,1)$ να διασπάσετε το SSA σε 4 ανεξάρτητα αθροίσματα με 1 βαθμό ελευθερίας το καθένα. Να βρεθεί ο συντελεστής του A_1 του μοντέλου παλινδρόμησης. Να γίνει ο έλεγχος: H_0: $\beta_{A_1} = 0$, H_1: $\beta_{A_1} \neq 0$ σε $\sigma.\sigma.$ $a = 0.05$ (Δίνεται $t_{(6,0.025)} = 2.447$).

β) Έστω C και D είναι δύο ορθογώνιες αντιθέσεις που ορίζονται στα αθροίσματα των παρατηρήσεων ενός παράγοντα, με v επίπεδα και n παρατήρήσεις σε κάθε επίπεδο. ($C = \sum_{i=1}^{v} c_i y_{i.}$, $D = \sum_{i=1}^{v} d_i y_{i.}$). Να δείξετε ότι $Cov(C, D) = 0$.

Θέμα 3 α) Ένας μηχανικός μελετά την απόδοση μιας διαδικασίας. Υπάρχουν δύο μεταβλητές που ενδιαφέρουν, ο χρόνος αντίδρασης (A) και η θερμοκρασία της αντίδρασης (B). Εκτελείται ένας 2^2 σχεδιασμός με πέντε κεντρικά σημεία. Τα αποτελέσματα είναι:

Συνδυασμός Αγωγών	Παραγοντική Επίδραση A	B	Απόκριση	Κεντρικά σημεία	Απόκριση
(1)	−	−	98.9	(0,0)	100.2
a	+	−	100.5	(0,0)	100.4
b	−	+	100.1	(0,0)	100.6
ab	+	+	101.2	(0,0)	100.5
				(0,0)	100.3

Να κάνετε τη στατιστική ανάλυση και να ελέγξετε αν οι παράγοντες A, B καθώς και η αλληλεπίδραση τους AB είναι σημαντικοί. Είναι η καμπυλότητα σημαντική; (Δίνεται ότι $F(1,4,0.05) = 7.71$).

β) Θεωρούμε το μοντέλο ανάλυσης διασποράς με δύο παράγοντες, σταθερών επιδράσεων:

$$Y_{ijk} = \mu + a_i + \beta_j + (a\beta)_{ij} + e_{ijk},$$

όπου $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$, $k = 1, \ldots, r$. Να δείξετε ότι:

$$E(MSAB) = \sigma^2 + \frac{r\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(\alpha\beta)_{ij}^2}{(p-1)(q-1)}.$$

Θέμα 4 α) Μια βιομηχανία υφασμάτων ενδιαφέρεται να μελετήσει τις επιδράσεις τριών παραγόντων (A: πάχος υφάσματος), (B: θέρμανση υφάσματος) και (C: είδος υφάσματος) για την κατασκευή βέλτιστων υφασμάτων. Επιλέχτηκε ένα 2^3 παραγοντικό πείραμα με δύο επαναλήψεις και οι συνδυασμοί των αγωγών με την απόκριση του πειράματος έχουν ως εξής:

Συνδυασμοί αγωγών	Επανάληψη I	II
(1)	5	4
(a)	9	9
(b)	4	5
(ab)	8	6
(c)	7	7
(ac)	8	6
(bc)	4	4
(abc)	5	4

i) Να γίνει η ανάλυση των δεδομένων για την εύρεση σημαντικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων και να δοθεί ο πίνακας ανάλυσης διασποράς. (Δίνεται $F_{(1,8,0.05)} = 5.32$).

ii) Να βρεθεί η διασπορά των εκτιμήσεων των κυρίων επιδράσεων καθώς και ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή αυτών. (Δίνεται $t_{(8,0.025)} = 2.306$).

β) Θεωρούμε το μοντέλο παλινδρόμησης: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + e$, που αντιστοιχεί σε ένα 2^2 παραγοντικό σχεδιασμό.

i) Να βρείτε τις εκτιμήτριες $\widehat{\beta_1}$, $\widehat{\beta_2}$, $\widehat{\beta_{12}}$ συναρτήσει των παρατηρήσεων $(1), a, b, ab$.

ii) Να δείξετε ότι $Var(\widehat{\beta_1}) = Var(\widehat{\beta_2}) = \frac{\sigma^2}{4}$ και $Cov(\widehat{\beta_1}, \widehat{\beta_2}) = 0$.

Διάρκεια εξέτασης 2:30 ώρες