ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

ΣΕΜΦΕ - 8ο ΕΞΑΜΗΝΟ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ "ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ" - 4/7/2008

1. Έστω $f: U \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα κυρτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η παράγωγος θετικά κατά κατεύθυνση $\delta_+ f(\bar{x}, x-\bar{x})$ υπάρχει στο σημείο $\bar{x}$, για κάθε $x \in U$.

α) Να δειχθεί ότι, αν το $\bar{x}$ είναι σημείο τοπικού (ή ολικού) ελαχίστου της f στο U, τότε ισχύει η συνθήκη

$$\delta_+ f(\bar{x}, x-\bar{x}) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in U.$$

β) Να δειχθεί ότι, αν η f είναι επιπλέον κυρτή, τότε αντίστροφα η παραπάνω συνθήκη συνεπάγεται ότι το $\bar{x}$ είναι σημείο ελαχίστου της f στο U.

2. Έστω U ένα κλειστό και κυρτό (όχι απαραιτήτως φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $u \in \mathbb{R}^n$ ένα δεδομένο σημείο.

α) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(v) = \frac{1}{2}\|v-u\|_2^2$ (η οποία να γραφεί σαν τετραγωνική συνάρτηση με τον κατάλληλο πίνακα και το αντίστοιχο διάνυσμα) έχει, βάσει των αντίστοιχων ιδιοτήτων της f και του U, ένα και μοναδικό σημείο ελαχίστου $\bar{u}$ στο U (το $\bar{u}$ είναι η προβολή του u στο U).

β) Να βρεθεί το $\nabla f(\bar{u})$ και να δειχθεί ότι το σημείο $\bar{u}$ ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη

$$(\bar{u}-u)^T(v-\bar{u}) \geq 0 \quad \text{για κάθε } v \in U.$$

3. Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2$ και το (μη φραγμένο) σύνολο

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3-3z-y-x \geq 0,\ 3-y-x \geq 0\}.$$

α) Να δειχθεί ότι η f έχει ένα και μοναδικό σημείο ελαχίστου στο W.

β) Να υπολογιστεί το σημείο αυτό με τη βοήθεια του Θεωρήματος Πολλαπλασιαστών Kuhn-Tucker-Lagrange, ελέγχοντας αν οι υποθέσεις του θεωρήματος ικανοποιούνται.

4. α) Να διατυπωθεί το Βήμα 2 της μεθόδου Προβεβλημένης Κλίσης (δηλ. η εύρεση του σημείου κατεύθυνσης y_k) και να δειχθεί ότι αυτό ισοδυναμεί με την εύρεση της προβολής του σημείου $z_k := x_k - \frac{1}{\gamma}\nabla f(x_k)$ πάνω στο U.

β) Να βρεθεί γραφικά, ανάλογα με τη θέση (να εξεταστούν όλες οι περιπτώσεις) του $\nabla f(x_k)$ (αντ. του $z_k := x_k - \nabla f(x_k)$) στον $\mathbb{R}^2$, και βάσει του Βήματος 2 του κάθε αλγορίθμου, το σημείο κατεύθυνσης y_k της μεθόδου Frank-Wolfe (αντ. Προβεβλημένης Κλίσης, με $\gamma = 1$), για τα παρακάτω σύνολα περιορισμού:

$$U_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1,\ -x_1 + x_2 \leq 1,\ x_2 \geq 0\} \quad \text{(τρίγωνο)},$$

$$U_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \quad \text{(δίσκος)}.$$

Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες. **Τα θέματα είναι ισοδύναμα.** **Καλή επιτυχία!**