Εξέταση μαθήματος Βελτιστοποίησης
ΣΕΜΦΕ

01/10/2009

Θέμα 1

(α) Έστω $f: S \subset R^n \to R$ μία συνάρτηση συνεχής και πιεστική, ορισμένη στο μη κενό, κλειστό και μη φραγμένο σύνολο S. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο ελαχίστου.

(β) Να μελετηθεί η ύπαρξη σημείου τοπικού ελαχίστου για την συνάρτηση $f(x,y) = 6x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y$

(2 βαθμοί)

Θέμα 2

Έστω $f: R^3 \to R, f(x,y,z) = 2x + 3y + 4z$ και σύνολο $U = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 2\}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο ελαχίστου της f στο U, και να υπολογιστεί αυτό με βάση το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Kuhn-Tucker-Lagrange.

(2 βαθμοί)

Θέμα 3

Να εκτελεστούν δύο επαναλήψεις της μεθόδου των κλίσεων με βέλτιστο βήμα για τον υπολογισμό ακροτάτου της τετραγωνικής συνάρτησης $f: R^n \to R, f(x) = (1/2)x^T Ax - b^T x$, όπου $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $b=[1,1]^T$, $x_0=[0,0]^T$.

(2 βαθμοί)

Θέμα 4

(α) Να περιγραφεί ο αλγόριθμος της χρυσής τομής για το βασικό διάστημα [α,β], που περιέχει ένα σημείο ελαχίστου της f, για $x \ge 0$. Να αποδειχθεί ότι οι ακολουθίες της διαδικασίας της τριχοτόμησης του αλγορίθμου της χρυσής τομής $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}, \{d_k\}$, συγκλίνουν σε ένα σημείο ελαχίστου της f.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)^2+3$. Να εφαρμοστεί η μέθοδος της χρυσής τομής στο βασικό διάστημα [2.75,3.25] για τον υπολογισμό του ελαχίστου. (Να εκτελεστούν 2 επαναλήψεις.)

(2 βαθμοί)

Θέμα 5

(α) Έστω συνάρτηση $f: R^2 \to R, f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$ και το σύνολο περιορισμών $U = \{(x,y) \in R^2 \mid x \ge 0, y \ge 0, y \le 1 - x\}$. Να εκτελεστεί ένα βήμα της μεθόδου Frank-Wolfe με αρχικό διάνυσμα το $[1/4, 1/8]^T$.

(β) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\{f(x_k)\}_{k=1,\dots}$ που ορίζει ο αλγόριθμος Frank-Wolf είναι καλώς ορισμένη και φθίνουσα.

(2 βαθμοί)

Αλγόριθμος Frank-Wolfe (με βέλτιστο βήμα):

1) Θέτουμε κ=0, και επιλέγουμε $x_0 \in U$.
2) Βρίσκουμε κατεύθυνση ώστε $\nabla f(x_k)^T (y_k - x_k) = \min_{\{y \in U\}} \nabla f(x_k)^T (y - x_k)$.
3) Θέτουμε $\delta_k = \nabla f(x_k)^T (y_k - x_k)$. Αν $\delta_\kappa = 0$ σταματάμε. Διαφορετικά,
4) Βρίσκουμε βήμα α_κ ώστε
$f(x_k + \alpha_k (y_k - x_k)) - f(x_k) = \min_{\{\alpha \in [0,1]\}} (f(x_k + \alpha (y_k - x_k)) - f(x_k))$
5) $x_{k+1} = x_k + \alpha_k (y_k - x_k)$

Καλή επιτυχία. Διάρκεια εξέτασης, 2 & ½ ώρες.