Εξέταση μαθήματος Βελτιστοποίησης
ΣΕΜΦΕ

Σταύρας Κωνσταντίνος 10/07/2009

Θέμα 1

α) Έστω $f: V \to R, \bar{x} \in V \subset R^n, f \in C^2$ κοντά στο $\bar{x}$ και $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Αποδείξτε ότι αν ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος τότε το σημείο $\bar{x}$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

GTP

β) Να μελετηθεί με βάση του Θεώρημα του Θέματος 1(γ) η ύπαρξη σημείου τοπικού ελαχίστου για την συνάρτηση $f(x,y) = 4x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$.

(2 βαθμοί)

Θέμα 2

Έστω $f: R^3 \to R, f(x,y,z) = 2x + y + z$ και συνόλο $U = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο ελαχίστου της f στο U, και να υπολογιστεί αυτό με βάση το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Kuhn-Tucker-Lagrange.

(2 βαθμοί)

Θέμα 3

? →

α) Να υπολογιστεί ακριβώς ο συντελεστής α_k που σχετίζεται με τη μέθοδο κλίσης με βέλτιστο βήμα όταν εφαρμόζεται στην τετραγωνική συνάρτηση $f: R^n \to R, f(x) = (1/2)x^T Ax - b^T x$, όπου ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

β) Να εκτελεστεί μία επανάληψη της μεθόδου με $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, x_0 = [0,0]^T, b = [1,1]^T$.

(2 βαθμοί)

Θέμα 4

(α) Να οριστεί η μέθοδος των ποινών για το πρόβλημα ελαχιστοποίσης

(P): Να βρεθεί $x' \in U \subset R^n$ τέτοιο ώστε $f(x') = \min_{x \in U} f(x)$ όπου $f: R^n \to R$ συνεχής συνάρτηση.

(β) Έστω ότι συμβολίζουμε τα ακολουθία των ποινικοποιημένων προβλημάτων του (α) με (P_k), k=1,2,…Να αποδειχθεί πως αν τα προβλήματα (P) και (P_k) έχουν λύσεις x', x_k αντιστοίχως τότε η ακολουθία $\{x_k\}_{k=1,2,\ldots}$ περιέχει συγκλίνουσες υπακολουθίες και κάθε όριο μιας τέτοιας υπακολουθίας είναι λύση του προβλήματος (P).

? ? →

(2 βαθμοί)

Θέμα 5

Έστω συνάρτηση $f: R^2 \to R, f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$, και το σύνολο περιορισμών $U = \{(x,y) \in R^2 \mid x \ge 0, y \ge 0, y \le 1 - x\}$. Να εκτελεστεί ένα βήμα της μεθόδου Frank-Wolfe με αρχικό διάνυσμα το $[1/4, 1/4]^T$.

OK

(2 βαθμοί)

Αλγόριθμος Frank-Wolfe (με βέλτιστο βήμα):

1) Θέτουμε κ=0, και επιλέγουμε $x_0 \in U$.
2) Βρίσκουμε κατεύθυνση ώστε $\nabla f(x_k)^T (y_k - x_k) = \min_{\{y \in U\}} \nabla f(x_k)^T (y - x_k)$.
3) Θέτουμε $\delta_k = \nabla f(x_k)^T (y_k - x_k)$. Αν $\delta_\kappa = 0$ σταματάμε. Διαφορετικά,
4) Βρίσκουμε βήμα α_κ ώστε
   $f(x_k + \alpha_k (y_k - x_k)) - f(x_k) = \min_{\{\alpha \in [0,1]\}} (f(x_k + \alpha (y_k - x_k)) - f(x_k))$
5) $x_{k+1} = x_k + \alpha_k (y_k - x_k)$

Καλή επιτυχία. Διάρκεια εξέτασης, 2 & ½ ώρες.