ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Διδάσκων: Γ. Παπαγεωργίου **Σεπτέμβριος 2008**

Κ. Σταύρας

<u>Θέμα 1:</u> (1 , 1,5 , 1) = 3.5 μονάδες

α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση 3ης τάξης της μορφής:

$$y''' = -2y'' - y' - 2y.$$

Να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης. Εν συνεχεία το σύστημα που θα προκύψει, να μελετηθεί ως προς την **ευστάθεια**.

β) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής: $y' = f(x,y) = -4/3\,y^2$, $y(0)=1$, για το οποίο ζητάμε την προσέγγιση y_1 στο σημείο $x_1 = 0.2$, εφαρμόζοντας την **έμμεση** μέθοδο **τραπεζίου** με τύπο $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\}$, και βήμα $h = 0.2$.

i) Να υπολογίσετε την μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση για την προσέγγιση της y_1, και εν συνεχεία τον επαναληπτικό τύπο της μεθόδου *Newton*, ($x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$), για την επίλυση αυτής.

ii) Να υπολογίσετε μία αρχική προσέγγιση $y_1^{(0)}$, χρησιμοποιώντας ένα βήμα της άμεσης μεθόδου ***Euler***, ($h = 0.2$), και εν συνεχεία υπολογίστε μία βελτιωμένη αριθμητική τιμή για την y_1, εφαρμόζοντας δύο φορές την μέθοδο *Newton*.

γ) Θεωρούμε την έμμεση μέθοδο ***Euler***, $y_{n+1} = y_n + h\{f(x_{n+1}, y_{n+1})\}$, για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών της μορφής: $y' = f(x,y)$, $x \in [a,b]$, $y(a) = y_0$. Να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια και την τάξη ακρίβειας. (Δηλαδή να υπολογιστεί το διάστημα ευστάθειας και η τάξη της μεθόδου).

<u>Θέμα 2:</u> (0.5 , 1.5, 1) = 3 μονάδες

α) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής:

$$y' = f(x,y),\ x \in [a,b],\ y(a) = y_0 \qquad (1)$$

και την μέθοδο k - βημάτων της μορφής: $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$ (2)

- Να ορίσετε το **1°** και **2° χαρακτηριστικό πολυώνυμο** που αντιστοιχεί στην (2).
- Αναφέρατε τα κριτήρια που πρέπει να ισχύουν ώστε η (2) να είναι **μηδενικά-ευσταθής** και **συνεπής** αντίστοιχα.

β) Δίνεται η πολυβηματική μέθοδος 3ης τάξης της μορφής:

$$y_{n+2} - (a+1)y_{n+1} + a\,y_n = \frac{h}{12}\{(5+a)f_{n+2} + 8(1-a)f_{n+1} - (1+5a)f_n\}.$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές της παραμέτρου **α** για τις οποίες η μέθοδος συγκλίνει και να υπολογιστούν.

γ) Δίνεται η μέθοδος: $y_{n+3} - \frac{11}{6} y_{n+2} + y_{n+1} - \frac{1}{6} y_n = \frac{h}{3} f_{n+3}$, όπου h είναι το βήμα της διαμέρισης, και $y_n = y(x_n)$, ο οποίος προτείνεται για την επίλυση του (1). Να εξετάσετε αν η μέθοδος είναι **μηδενικά ευσταθής** και **συνεπής**.

<u>Θέμα 3:</u> (2.5) = 2.5 μονάδες

Να περιγράψετε τα βασικά βήματα της μεθόδου **Galerkin** για την επίλυση του προβλήματος δύο συνοριακών τιμών

$$u''-3u=2x^2,\ x\in(0,1),\ u(0)=u(1)=0,$$

θεωρώντας σαν συναρτήσεις βάσης τις συναρτήσεις $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$, οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Να υπολογιστεί η ασθενής μορφή του προβλήματος, και το αντίστοιχο προσεγγιστικό πρόβλημα **συμβολικά**, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προσεγγιστικές συναρτήσεις βάσης

<u>Θέμα 4:</u> (1 μονάδα)

Θεωρούμε το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$u''=2xu'+3x,\quad 0<x<2,\ u(0)=0,\ u(2)=2,$$

και τα σημεία της διαμέρισης $x_1=0,\ x_2=0.4,\ x_3=0.9,\ x_4=1.5,\ x_5=2$. Να εφαρμόσετε την μέθοδο της ***ταξινόμησης*** για την προσέγγιση της λύσης χρησιμοποιώντας σαν συναρτήσεις βάσης τα μονώνυμα $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$, και να υπολογίσετε μόνο το γραμμικό σύστημα που προκύπτει

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3.00 ΩΡΕΣ