Κανονική Εξεταστική

Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας

Κωνσταντίνος Στούρας*

23.02.2010

*Οι λύσεις είναι ενδεικτικές και πιθανότατα να περιέχουν λάθη. Για διορθώσεις ή απορίες h2o_poloboy@yahoo.gr

Περιεχόμενα

1 Θέμα 1 1

2 Θέμα 2 5

3 Θέμα 3 7

4 Θέμα 4 11

1 Θέμα 1

1. Έστω $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ η ακριβής λύση του συστήματος $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ όπου$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος πίνακας και $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\boldsymbol{y}$ μια προσέγγιση του x και $\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}$ το αντίστοιχο υπόλοιπο. Δείξτε ότι για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$, και για την αντίστοιχη φυσική νόρμα ισχύει:

$$\frac{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq k\left(A\right) \frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

όπου $k\left(A\right)$ συμβολίζει τον δείκτη κατάστασης.

2. Δίνεται ο πίνακας:

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Να δοθεί μία εκτίμηση του σφάλματος (με βάση τον τύπο του ερωτήματος (1)) για την προσέγγιση της λύσης του συστήματος $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ με $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ εκτελώντας 2 επαναλήψεις της επαναληπτικής μεθόδου Gauss-Seidel.

Απόδειξη. **1.** $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{b}\|$ και από την ιδιότητα της νόρμας πίνακα:

$$\|\boldsymbol{b}\| \leq \|A\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|\,,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\|A\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \tag{1.1}$$

και:

$$\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = \left\|\boldsymbol{y} - A^{-1}\boldsymbol{b}\right\| = \left\|A^{-1}A\boldsymbol{y} - A^{-1}\boldsymbol{b}\right\| = \left\|A^{-1}\left(A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\right)\right\| =$$

$$= \left\|A^{-1}\left(-\boldsymbol{r}\right)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\boldsymbol{r}\| \tag{1.2}$$

Από (1.1) και (1.2):

$$\frac{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = k\left(A\right) \frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \tag{1.3}$$

2. Παρατηρούμε ότι ο A *δεν* είναι συμμετρικός. Υπολογισμός $B_{\text{G-S}}$:

$$B_{G-S} = (D - A_R)^{-1}\ A$$

Ψάχνω τον $(D - A_R)^{-1}$. *Δεν* αντιστρέφω, αλλά:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & x_1 & x_2 \\ 0 & d_2 & x_3 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\,d_1 = 1 \Longrightarrow d_1 = \frac{1}{3}\,,\ 3x_1 = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 \\ 5d_2 = 1 \Longrightarrow d_2 = \frac{1}{5},\ d_3 = \frac{1}{3} \\ 5x_3 - d_3 = 0 \Longrightarrow x_3 = \frac{1}{15} \\ 3\,x_2 + d_3 = 0 \Longrightarrow x_2 = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

Άρα

$$B_{G-S} = (D - A_R)^{-1}\,A = \begin{pmatrix} 0.8889 & 0 & 0 \\ -0.1333 & 1 & -0.0800 \\ 0.3333 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Είναι:

$$x^{(k+1)} = -\,(D - A_R)^{-1}\,A\,x^{(k)} + (D - A_R)^{-1}\,b$$

με

$$(D - A_R)^{-1}\,b = \begin{pmatrix} 0.3333 & 0 & -0.1111 \\ 0 & 0.2000 & 0.0667 \\ 0 & 0 & 0.3333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8889 \\ 0.8667 \\ 1.3333 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8889 & 0 & 0 \\ 0.1333 & -1 & 0 \\ -0.3333 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8889 \\ 0.8667 \\ 1.3333 \end{pmatrix}$$

Εδώ πρέπει να εκτελέσουμε τις επαναλήψεις. Χρειαζόμαστε μια αρχική τιμή (x_0). Μια καλή επιλογή του τελευταίου είναι: $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$. Ο A *δεν* είναι συμμετρικός και άρα είναι δύσκολος ο υπολογισμός του δείκτη κατάστασης $k(A)$. Έτσι πάω με διαφορές:

Πίνακας 1.1: Πίνακας επαναλήψεων της Gauss-Seidel.

Gauss-Seidel	$k=1$	$k=2$
$x_1^{(k)}$	0.8889	0.9877
$x_2^{(k)}$	0.8667	0.9852
$x_3^{(k)}$	1.3333	1.0370
$d_k = \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$	1.8218	0.3341

Τότε είναι:

$$\left\|B_{GS}^{(2)}\right\| \approx \frac{d_2}{d_1} = 0.1834 = c$$

και

$$\left\|e^{(2)}\right\| = \|y - x\| \approx \frac{d_2^2}{d_1 - d_2} = 0.0750$$

□

2 Θέμα 2

Για το σύστημα $Ax = b$ με $b = [4, 3, 5]^T$και πίνακα:

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Να κατασκεύασετε την επαναληπτική μέθοδο χαλάρωσης που αντιστοιχεί στη μέθοδο Jacobi (JOR) ως στάσιμη επαναληπτική διαδικασία Richardson ($x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k Q^{-1} r^{(k)}$, όπου $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, $a_k = a$) .

2. Να υπολογιστεί ο επαναληπτικός πίνακας της παραπάνω διαδικασίας και να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης α, για τις οποίες η JOR συγκλίνει.

3. Μπορείτε να επιταγχύνετε την Jacobi με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου χαλάρωσης;

Υπόδειξη: Αν Q αντιστρέψιμος και $Q^{-1}A$ έχει θετικές και πραγματικές ιδιοτιμές, τότε η στάσιμη διαδικασία Richardson συγκλίνει αν και μόνο αν: $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1}$, όπου λ_1 είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του $Q^{-1}A$. Επίσης, $a_{opt} = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$, όπου λ_1, λ_n είναι η μεγαλύτερη και η μικρότερη ιδιοτιμή αντίστοιχα.

Απόδειξη. 1. Γενικά:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k Q^{-1}\left(b - Ax^{(k)}\right) \overset{a_k=a}{=}\overset{Jacobi}{=}1$$

$$= \left(I - Q^{-1}A\right) x^{(k)} + Q^{-1}b$$

Στην Jacobi ειδικά έχουμε $Q^{-1}A = D^{-1}A$:

$$x^{k+1} = -D^{-1}(A_L + A_R)\, x^{(k)} + D^{-1}b = B_{Jacobi}\, x^{(k)} + d$$

2. Για $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχουμε:

$$-D^{-1}(A_L + A_R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.80 \\ 1.00 \\ 1.25 \end{pmatrix}$$

Άρα:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.80 \\ 1.00 \\ 1.25 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς: $B_{Jacobi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Έπειτα αναζητούμε την $\rho\left(D^{-1}A\right)$:

$$D^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και ιδιοτιμές του $Q^{-1}A = D^{-1}A$:

$$\lambda_1 = 1.2236,\ \lambda_2 = 1\ , \lambda_3 = 0.7764 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \rho\left(D^{-1}A\right) = 1.2236$$

και από Υπόδειξη (2) η JOR θα συγκλίνει για: $0 < \alpha = 1 < \frac{2}{1.2236} = 1.6345$.

3. Είναι:

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_3} = 1 = a_{Jacobi}$$

(δεν σταματάμε εδώ αλλά ελέγχουμε και την φασματική ακτίνα):

$$\rho\left(R_{opt}\right) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3} = \frac{1.2236 - 0.7764}{1.2236 + 0.7764} = 0.2236 = \rho\left(B_{Jacobi}\right) \Longrightarrow$$

Δεν επιδέχεται βελτίωση η μέθοδος Jacobi με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου χαλάρωσης[1]. □

[1] Αναμενόμενο αποτέλεσμα, αφού A συμμετρικός και θετικά ορισμένος και οι max και min ιδιοτιμές του διαφέρουν κατά μία σταθερά.

3 Θέμα 3

1. Να περιγράψετε τη μέθοδο των κλίσεων ως γενική επαναληπτική διαδικασία τύπου Richardson για το πρόβλημα $Ax = b$ με $b = [5, 2, 4]^T$ και πίνακα:

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Να εκτελέσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου.

3. Να υπολογίσετε μία εκτίμηση για το σφάλμα μετά από δύο επαναλήψεις χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$\left\|e^{(k+1)}\right\| \leq \frac{k_2\left(A\right)-1}{k_2\left(A\right)+1} \cdot \left\|e^{(k)}\right\|$$

Απόδειξη. 1. Παρατηρούμε ότι A: συμμετρικός και λόγω κριτηρίου Sylvester:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 22 > 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} > 0 \\ \text{και } 3 > 0 \end{cases} \iff$$

$A:$ θετικά ορισμένος.

Έστω η ενέργεια του $Ax = b$:

$$\Phi\left(y\right) = \frac{1}{2}\, y^T A\, y - y^T\, b.$$

Τότε

$$\nabla\Phi\left(y\right) = \frac{1}{2}\left(A^T + A\right)\, y - b \overset{A=A^T}{=} Ay - b.$$

Αντίστροφα, αν το x είναι λύση του $Ax = b$, τότε:

$$\Phi\left(y\right) = \Phi\left(x + (y - x)\right) = \Phi\left(x\right) + \frac{1}{2}\left(y - x\right)^T\, A\, \left(y - x\right)\ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Δηλαδή,

$$\Phi(y) > \Phi(x) \ , \ y \neq x.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\Phi(y) - \Phi(x) = \frac{1}{2}(y-x)^T \ A \ (y-x) = \frac{1}{2}\|x-y\|_A^2 .$$

Άρα το πρόβλημα επίλυσης του $Ax = b$ είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της Φ. Το τελευταίο γίνεται με τον παρακάτω αλγόριθμο των κλίσεων:

Έστω

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \ r^{(0)} = b - A\,x^{(0)}.$$

Για κ=0,1,2,...

$$\alpha_k = \frac{\left(r^{(k)}\right)^T \ r^{(k)}}{\left(r^{(k)}\right)^T \ A\,r^{(k)}}$$

και:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k\,r^{(k)} \ , \ r^{(k+1)} = r^{(k)} - a_k\,A\,r^{(k)}$$

Παρατηρούμε εύκολα ότι η μέθοδος των κλίσεων συμπίπτει με τις μεθόδους Richardson για $Q = I$ (ταυτοτικός).

2. Αφού A: συμμετρικός και θετικά ορισμένος, η μέθοδος των κλίσεων συγκλίνει για κάθε επιλογή $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, άρα:

$$r^{(0)} = b - A\,x^{(0)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\left(r^{(0)}\right)^T \ r^{(0)} = 25 + 4 + 16 = 45$$

$$A\,r^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\left(r^{(0)}\right)^T \ A\,r^{(0)} = 196$$

$$\alpha_0 = \frac{45}{196}$$

$$x^{(1)} = x^{0)} + \alpha_0\, r^{(0)} = \frac{45}{196} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T$$

Επίσης,

$$r^{(1)} = b - A\, x^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.5102 \\ 1.0816 \\ 0.0969 \end{pmatrix}$$

$$\left(r^{(1)}\right)^T r^{(1)} = 1.4396$$

$$\left(r^{(1)}\right)^T A\, r^{(1)} = 3.3104 \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{1.4396}{3.3104} = 0.4349$$

και

$$x^{(2)} = x^{(1)} + a_1\, r^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.9261 \\ 0.9296 \\ 0.9605 \end{pmatrix}.$$

3. A: συμμετρικός και θετικά ορισμένος, συνεπώς:

$$k_2\,(A) = \frac{\max|\lambda_\iota|}{\min|\lambda_\iota|}$$

Υπολογισμός λ_i:

$$|\lambda I - A| = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 4.6180 \\ \lambda_2 = 2.3820 \\ \lambda_3 = 2.0000 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow k\,(A) = \frac{4.6180}{2.0000} \approx 2.309.$$

Άρα η σταθερά είναι:

$$C = \frac{2.309 - 1}{2.309 + 1} \approx 0.3955.$$

Επομένως:

$$\left\|e^{(k+1)}\right\| \leq 0.3955 \cdot \left\|e^{(k)}\right\| \Longleftrightarrow \left\|e^{(k)}\right\| \leq (0.3955)^k \cdot \left\|e^{(0)}\right\|.$$

□

4 Θέμα 4

1. Να υπολογίσετε μία προσέγγιση της μέγιστης (κατά μέτρο) ιδιοτιμής του πίνακα:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

   χρησιμοποιώντας δύο επαναλήψεις της μεθόδου των δυνάμεων με αρχικό διάνυσμα το $x_0 = \left[-\frac{3}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right]^T$.

2. Να υπολογίσετε μία προσέγγιση της δεύτερης μεγαλύτερης (κατά μέτρο) ιδιοτιμής του πίνακα του ερωτήματος (1) (εκτελώντας μία μόνο επανάληψη).

Απόδειξη. 1. Έχουμε:

$$x_1 = A\,x_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.7500 \\ 1.0000 \\ 2.2500 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = A\,x_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3.7500 \\ 1.0000 \\ 2.2500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.0000 \\ 4.0000 \\ 7.5000 \end{pmatrix}$$

Πρώτη εκτίμηση για το λ_1:

$$\lambda_1 \approx \frac{x_{1,1}}{x_{1,0}} = \frac{2.2500}{0.75} = 3$$

Δεύτερη εκτίμηση για το λ_1:

$$\lambda_1 \approx \frac{x_{1,2}}{x_{1,1}} = \frac{7.5000}{2.2500} = 3.33$$

που είναι και η ζητούμενη προσέγγιση με τη μέθοδο των δυνάμεων.[1]

[1] Παρατηρούμε ότι με δύο επαναλήψεις είμαστε αρκετά κοντά στην πραγματική μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_1 = 5.4142$.

2. Έχουμε ότι η δεύτερη προσέγγιση για το ιδιοδιάνυσμα u_1 είναι:

$$w_2 = \pm\frac{x_2}{\|x_2\|_2} = \frac{\pm 1}{\sqrt{9^2+4^2+7.5^2}}\begin{pmatrix} -9.0000 \\ 4.0000 \\ 7.5000 \end{pmatrix} =$$

$$= \pm\begin{pmatrix} -0.7270 & 0.3231 & 0.6058 \end{pmatrix}$$

Άρα θα εφαρμόσω μία επανάληψη της μεθόδου των δυνάμεων στον πίνακα:

$$A_1 = A - \lambda_1 w_2 w_2^T = \begin{pmatrix} 1.2399 & 0.7823 & 2.4667 \\ 0.7823 & 3.6523 & -0.6519 \\ 2.4667 & -0.6519 & 3.7777 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = A\,x_0 = \begin{pmatrix} 1.2399 & 0.7823 & 2.4667 \\ 0.7823 & 3.6523 & -0.6519 \\ 2.4667 & -0.6519 & 3.7777 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1857 \\ -0.7492 \\ -1.0298 \end{pmatrix}$$

και

$$\lambda_2 =\approx \frac{x_{2,1}}{x_{2,0}} = \frac{0.7492}{0.25} = 3.33$$

που είναι η ζητούμενη προσέγγιση της δεύτερης μεγαλύτερης (κατά μέτρο) ιδιοτιμής του A[2]. □

[2] Παρατηρούμε ότι με μία επανάληψη είμαστε αρκετά κοντά στην πραγματική δεύτερη μεγαλύτερη (κατά μέτρο) ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$.