ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΕΜΦΕ (12/7/ 2011)

Θέμα 1. (α) Έστω $z \neq 0$. Βρείτε τα $w \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την εξίσωση $e^w = z$.

(β) Δώστε τον ορισμό της κύριας τιμής του λογαρίθμου $\mathrm{Log}z$. Ποιό είναι το πεδίο ορισμού και ποιό το σύνολο τιμών; Είναι $1-1$; Ισχύει ότι $\mathrm{Log}e^z = z$; Τι έχετε να πείτε για τα σημεία συνέχειας και διαφορισιμότητας;

(γ) Βρείτε την εικόνα μέσω της $\mathrm{Log}z$, των ημιευθειών $\mathrm{Arg}z = \theta$, με $-\pi < \theta \leq \pi$, καθώς και των κύκλων $|z| = \rho$, $\rho > 0$.

Θέμα 2. (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{e^z}{(z-2)^2(z-4)} dz$$

όπου η καμπύλη C είναι κύκλος κέντρου z_0 και ακτίνας R στις επόμενες περιπτώσεις.

(i) $z_0 = 0,\ R = 1,$ (ii) $z_0 = 2,\ R = 1,$ (iii) $z_0 = 4,\ R = 1,$ (iv) $z_0 = 0,\ R = 5.$

(β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor, βρείτε τις ακέραιες συναρτήσεις $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση $f'(z) - f(z) = e^z$ με $f(0) = 0$.

Θέμα 3. (α) Αναπτύξτε σε σειρά Laurent την συνάρτηση

$$f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2},$$

στον δακτύλιο $1 < |z| < 2$.

(β) Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ και $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, ολόμορφη συνάρτηση. Δείξτε ότι το z_0 είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο για την f αν και μόνο αν η f είναι φραγμένη σε μια περιοχή του z_0.

Θέμα 4. Έστω f ολόμορφη και μη σταθερή στον ανοιχτό δίσκο $|z| < 1$ και συνεχής στον κλειστό δίσκο $|z| \leq 1$. Αν $|f(z)| = c$ για όλα τα $|z| = 1$, δείξτε τα εξής. (i) $c \neq 0$, (ii) η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στον ανοιχτό δίσκο $|z| < 1$ και (iii) το σύνολο των ριζών της f είναι πεπερασμένο. (Να διατυπώσετε πλήρως τα θεωρήματα που χρησιμοποιείτε).

Θέμα 5. (α) Δείξτε ότι $\mathrm{Res}(\tan z, +\frac{\pi}{2}) = \mathrm{Res}(\tan z, -\frac{\pi}{2}) = -1$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{|z|=2} \tan z\, dz$.

(β) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(i) Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε η f είναι ολόμορφη στο z_0 και το z_0 είναι ρίζα τάξης k της f δείξτε ότι το z_0 είναι απλός πόλος της $\frac{f'}{f}$ και ότι $\mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, z_0) = k$.

(ii) Αν $z_1 \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε το z_1 είναι πόλος τάξης m της f δείξτε ότι το z_1 είν απλός πόλος της $\frac{f'}{f}$ και ότι $\mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, z_1) = -m$.