Σύντομες απαντήσεις στα θέματα Δ.Γ. Ιούνιος 2011.

ΘΕΜΑ 1: Α) Εύρεση περιβάλλουσας (§2.8 Σημειώσεις)

$\Phi(x,y,\alpha) = x + 2\alpha y - 2\alpha^3 = 0 \Rightarrow \Phi_\alpha = 2y - 6\alpha^2 = 0$

$\Rightarrow y = 3\alpha^2$ (1) Άρα και $x + 2\alpha y - 2\alpha^3 = 0$ (2)

Απαλείφουμε το α από τις (1), (2) $\Rightarrow \left(\frac{y}{3}\right)^3 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$ (3)

Β) $\bar{r}(t) = (t, t^2 - \frac{1}{2})$, $\bar{r}'(t) = (1, 2t)$, $\bar{r}''(t) = (0, 2)$

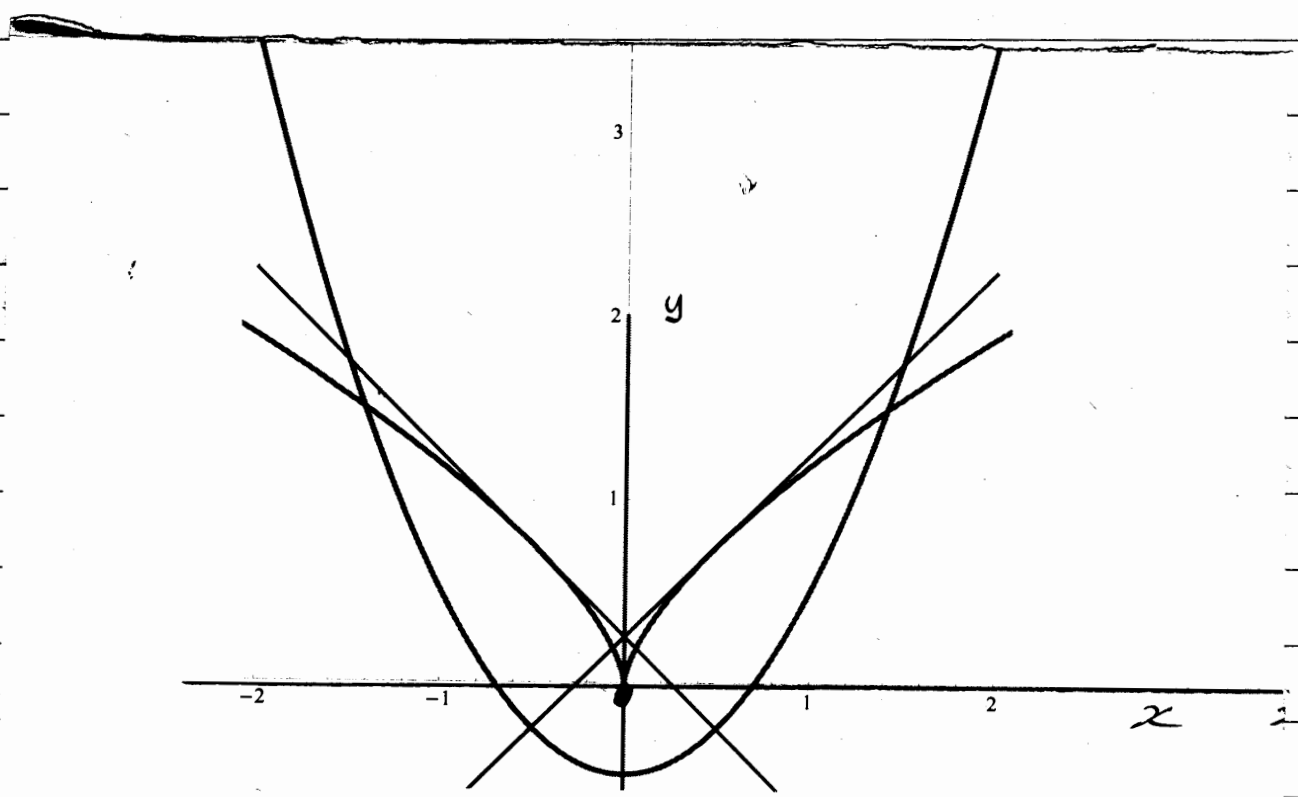
$\|\bar{r}'(t)\| = (1+4t^2)^{1/2}$, $J\bar{r}'(t) = (-2t, 1)$ άρα:

$k(t) = \frac{\bar{r}'' \cdot J\bar{r}'}{\|J\bar{r}'\|^3} = \dots = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$ οπότε

η εξελιγμένη είναι:

$\bar{e}(t) = \bar{r}(t) + \frac{1}{k(t)} \frac{J\bar{r}'(t)}{\|\bar{r}'(t)\|} = \dots = (-4t^3, 3t^2)$ (4)

Γ) Παρατηρούμε ότι η (4) είναι παραμετρική παράσταση της (3) και οι ευθείες της ομοιογένειας είναι κάθετες στην παραβολή.



ΘΕΜΑ 2, Α) Η $\bar{r}(s)$ ανήκει στην σφαίρα άρα $(\bar{r}(s)-\bar{r}_0)^2=\alpha^2$. Παραγωγίζουμε διαδοχικά και χρησιμοποιούμε τους τύπους Frenet:

$$\bar{r}'(s)(\bar{r}(s)-\bar{r}_0)=0 \Rightarrow (\bar{r}(s)-\bar{r}_0)\cdot\bar{T}(s)=0 \quad (1)$$

$$\bar{r}'(s)\cdot\bar{T}(s)+(\bar{r}(s)-\bar{r}_0)\cdot\bar{T}'(s)=0 \Rightarrow 1+(\bar{r}(s)-\bar{r}_0)k\bar{N}=0$$

Άρα $(\bar{r}(s)-\bar{r}_0)\cdot\bar{N}(s)=-1/k(s) \quad (2)$.

Οι (1) και (2) δίνουν την προβολή του $\bar{r}(s)-\bar{r}_0$ στα $\bar{T}(s)$ και $\bar{N}(s)$. Τώρα βρίσκουμε την προβολή του $\bar{r}(s)-\bar{r}_0$ στο $\bar{B}(s)$ παραγωγίζοντας την (2):

$$\cancel{\bar{r}'(s)\cdot\bar{N}(s)}+(\bar{r}(s)-\bar{r}_0)\bar{N}'(s)=\frac{k'(s)}{k^2(s)} \quad \text{Άρα}$$

$$(\bar{r}(s)-\bar{r}_0)(-k(s)\bar{T}(s)+\tau(s)B)=k'(s)/k^2(s)$$

Με χρήση των (1) προκύπτει:

$$(\bar{r}(s)-\bar{r}_0)\cdot\bar{B}(s)=\frac{k'(s)}{k^2(s)\tau(s)}$$

Συνεπώς:

$$\bar{r}(s)-\bar{r}_0=0\,\bar{T}-\frac{1}{k(s)}\bar{N}(s)+\frac{k'(s)}{k^2(s)\tau(s)}\bar{B}$$

από την οποία προκύπτει η ζητούμενη.

Β) Η ακτίνα της σφαίρας είναι:

$$\|\bar{r}(s)-\bar{r}_0\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{k(s)}\right)^2+\left(\frac{k'(s)}{k^2(s)\tau(s)}\right)^2}$$

Γ). Η προβολή του κέντρου της σφαίρας στο εγχύλιο επίπεδο είναι η τομή του εγχύλιου επιπέδου: $(\bar{Z}-\bar{r}(s))\cdot\bar{B}(s)=0 \quad (\alpha)$ (όπου $\bar{Z}$ τυχαίο του σημείο) με την ευθεία που προσθέτει. Δηλ. που περνά από το $\bar{r}_0$ και είναι παράλληλη στο $\bar{B}(s)$: $\bar{W}=\bar{r}_0+\lambda\bar{B}(s) \quad (\beta)$. Η τομή των (α) και (β) είναι (αντικαθιστώ το $\bar{W}$ στη θέση του $\bar{Z}$): $(\bar{r}_0+\lambda\bar{B}(s)-\bar{r}(s))\cdot\bar{B}(s)=0$

Αντικαθιστώντας το $\bar{r}_0-\bar{r}(s)$ από το Β) προκύπτει $\lambda=\frac{k'(s)}{k^2(s)\tau(s)}$ και άρα $\bar{W}=\bar{r}_0+\frac{k'(s)}{k^2(s)\tau(s)}\bar{B}=\bar{r}(s)+\frac{1}{k(s)}\bar{N}(s)$ που είναι το κέντρο καμπυλότητας της $\bar{r}(s)$.

Θέμα 3 $\quad \bar{x}(\varphi,\theta)=(\cos\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\cos\theta,\ \sin\theta)$

1) $\alpha(t)=\bar{x}(\bar{q}(t))=\bar{x}(t,t)=(\cos^2 t,\ \sin t\cos t,\ \sin t)$.

$\alpha'(t)=(-2\cos t\sin t,\ \cos 2t,\ \cos t)$.

2). $\bar{x}_\varphi(\varphi,\theta)=(-\cos\theta\sin\varphi,\ \cos\varphi\cos\theta,\ 0)$.

$\bar{x}_\theta(\varphi,\theta)=(-\cos\varphi\sin\theta,\ -\sin\varphi\sin\theta,\ \cos\theta)$

$\bar{x}_\varphi(\pi/4,\pi/4)=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, $\bar{x}_\theta(\pi/4,\pi/4)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$

$\alpha'(\pi/4)=(-1,0,\frac{\sqrt{2}}{2})=k\cdot(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)+\lambda(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$

$=(-\frac{1}{2}(k+\lambda),\ \frac{1}{2}(k-\lambda);\ \lambda/\sqrt{2})\Rightarrow \alpha'(\pi/4)=\bar{x}_\varphi+\bar{x}_\theta$.

3) $\alpha''(t)=(-2\cos 2t,\ -2\sin 2t,\ -\sin t)$

$\bar{U}(\varphi,\theta)=(\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta)=\bar{x}(\varphi,\theta)$

Άρα $U(\alpha(t))=U(t,t)=(\cos^2 t,\ \cos t\sin t,\ \sin t)$,

Όμως $U(\alpha(t))\not\parallel\alpha''(t)\Rightarrow$ δεν είναι γεωδ/κή

ΘΕΜΑ 4: Α) Σημειώσεις §5.1.

Β) Η βάση $\{\bar{u},\bar{v}\}$ είναι ορθοκανονική και άρα ο πίνακας του S είναι συμμετρικός: $S\bar{u}=\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}$, $S\bar{v}=\beta\bar{u}+\delta\bar{v}$.

1). $\bar{u}\cdot S\bar{v}=0\Rightarrow\bar{v}\cdot S\bar{u}=0$. Αλλά $0=u\cdot Sv=\beta\|u\|^2+\delta\cdot 0$

δηλαδή $\beta=0\Rightarrow S\bar{u}=\alpha\bar{u}$, $S\bar{v}=\delta\bar{v}$, άρα οι u,v (διοδιανύσματα) με ιδιοτιμές $\alpha=\bar{u}\cdot S\bar{u}$, $\beta=\bar{v}\cdot S\bar{v}$

2) $0=S\bar{u}\cdot S\bar{v}=(\alpha\bar{u}+\beta\bar{v})\cdot(\beta\bar{u}+\delta\bar{v})=\alpha\beta+\beta\delta=\beta(\alpha+\delta)$

Όμως $\beta=\bar{u}\cdot S\bar{v}\neq 0\Rightarrow\alpha+\delta=0\Rightarrow \operatorname{tr}S=0\Rightarrow H=0$.

3). (Βλέπε πάλι 2, §5.1 σημειώσεις)

$0=Su\times Sv=(\alpha\bar{u}+\beta\bar{v})\times(\beta\bar{u}\times\delta\bar{v})=(\alpha\delta-\beta^2)(\bar{u}\times\bar{v})$

$=(\det S)(\bar{u}\times\bar{v})\Rightarrow K=0$

(διότι u,v γρ. ανεξάρτητα και άρα $\bar{u}\times\bar{v}\neq\bar{0}$