ΤΕΜΦΕ 4° Εξάμηνο
Αριθμητική Ανάλυση Ι
3η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Μία άλλη μορφή μη γραμμικής προσέγγιση με ελάχιστα τετράγωνα, εκτός της εκθετικής είναι να επιλέξουμε μια συνάρτηση της μορφής:

$$y = b\frac{x}{a+x}$$

Την μορφή αυτή τη μετασχηματίζουμε στη μορφή:

$$\frac{1}{y} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{b}$$

Άρα και αυτήν τη μορφή με κατάλληλο μετασχηματισμό των δεδομένων μπορούμε να τη χειριστούμε με τη θεωρία της γραμμικής προσέγγισης με ελάχιστα τετράγωνα. Στον πίνακα που ακολουθεί εμφανίζονται πειραματικά δεδομένα:

X	7	9	15	25	40	75	100	150
Y	0.29	0.37	0.48	0.65	0.80	0.97	0.99	1.07

Να δημιουργήσετε αρχείο εντολών MATLAB (script) με το οποίο να συγκρίνετε, για τα πειραματικά δεδομένα, τις ακόλουθες τεχνικές προσέγγισης: α) το μοντέλο που περιγράφηκε παραπάνω και ελάχιστα τετράγωνα, β) εκθετική συνάρτηση $y(x) = bx^a$ και ελάχιστα τετράγωνα και γ) την εκθετική συνάρτηση $y(x) = be^{ax}$ και ελάχιστα τετράγωνα. Για κάθε περίπτωση να υπολογίζονται οι συντελεστές της μεθόδου προσέγγισης καθώς και το σφάλμα της κάθε μεθόδου $error = \sum_i (y_i - p(x_i))^2$ και να εμφανίζεται σε ένα γράφημα το αποτέλεσμα της παρεμβολής καθώς και τα πειραματικά δεδομένα.

2. Είναι δυνατό να εφαρμόσουμε τη θεωρία της προσέγγισης συνόλου δεδομένων με ελαχιστοποίηση ελαχίστων τετραγώνων και για πιο γενικές συναρτήσεις. Μία επιλογή θα μπορούσε να ήταν μία συνάρτηση της μορφής:

$$a\ln(x) + b\cos(x) + c\,e^x$$

Εφαρμόζοντας τη θεωρία (δείτε 9.2,9.3 σελ. 413-420 βιβλίου) οδηγούμαστε σε ένα γραμμικό σύστημα με τρεις αγνώστους τα a,b,c. Αφού πρώτα βρείτε τη μορφή που θα έχει το σύστημα των κανονικών εξισώσεων (όπως ονομάζεται), καλείστε να δημιουργήσετε συνάρτηση function MATLAB με όνομα nopolyls το οποίο να λαμβάνει ως είσοδο τα δεδομένα (x,y) σε δύο διανύσματα, να ορίζει τους πίνακες του συστήματος, να λύνει το σύστημα και στη συνέχεια να επιστρέφει ένα διάνυσμα το οποίο να έχει ως στοιχεία τα a,b,c.

Να χρησιμοποιήσετε το nopolyls για την προσέγγιση των παρακάτω δεδομένων:

X	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
Y	0.23	-0.26	-1.10	-0.45	0.27	0.10	-0.29	0.24	0.56	1.00

Δηλαδή, να δημιουργηθεί αρχείο εντολών MATLAB (script) το οποίο αφού καλεί την nopolyls, να εμφανίζει τα a,b,c και σε ένα γράφημα τα σημεία (x,y) και την καμπύλη της συνάρτησης στο διάστημα $[0.1,3.5]$ με βήμα μεταβολής 0.1.

Η) Λύστε το ακόλουθο σύστημα 4 εξισώσεων χρησιμοποιώντας τις μεθόδους LU και Gauss

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3 \\
3x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 9x_4 &= 4 \\
10x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 8 \\
5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 10
\end{aligned}
$$

Σχολιάστε τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα - τόσο προγραμματιστικά όσο και αναλυτικά - που εμφανίζουν οι δύο μέθοδοι.

Α ΑΜΕΣΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Κατά την πολυωνυμική παρεμβολή Hermite αναζητούμε ένα πολυώνυμο το οποίο να διέρχεται από κάποια σημεία μίας συνάρτησης και οι τιμές της παραγώγου του στα σημεία αυτά να είναι ίσες με τις τιμές της συνάρτησης (βιβλίο σελ. 210). Για παράδειγμα όταν γνωρίζουμε τα $f(s_1)$, $f'(s_1)$, $f(s_2)$, $f'(s_2)$, $f(s_3)$, $f'(s_3)$ μπορούμε να ορίσουμε το πολυώνυμο πέμπτου βαθμού $p(s)=c_1s^5+c_2s^4+c_3s^3+c_4s^5+c_5s+c_6$ που να ικανοποιεί τις συνθήκες $p(s_1)=f(s_1)$, $p'(s_1)=f'(s_1)$, $p(s_2)=f(s_2)$, $p'(s_2)=f'(s_2)$, $p(s_3)=f(s_3)$, $p'(s_3)=f'(s_3)$. Από τις συνθήκες αυτές κατασκευάζουμε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων η λύση του οποίου καθορίζει τα c_1,c_2,c_3,c_4,c_5.

1. Σας ζητείται να κατασκευάσετε συνάρτηση (function) σε MATLAB, με όνομα herm5, η οποία να λαμβάνει ως δεδομένα τρία διανύσματα στήλη. Το ένα θα περιέχει τα σημεία της παρεμβολής (s_1,s_2,s_3), το δεύτερο τις τιμές της συνάρτησης σε αυτά τα σημεία και το τρίτο τις τιμές της παραγώγου της συνάρτησης στα ίδια σημεία. Στο εσωτερικό της συνάρτησης θα πρέπει να ορίζεται ο πίνακας του συστήματος με το οποίο καθορίζονται οι συντελεστές του παρεμβολικού πολυωνύμου και να λύνεται με τη μέθοδο Gauss, καλώντας τη συνάρτηση GAUSS.M που υπάρχει στο βιβλίο και χρησιμοποιήσατε κατά τη διάρκεια του 3ου εργαστηρίου. Η συνάρτηση herm5 θα επιστρέφει σε διάνυσμα στήλη τους συντελεστές c_1,c_2,c_3,c_4,c_5. Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση herm5 για τον καθορισμό του πολυωνύμου που παρεμβάλει την $f(x)=\sin(x)$ στα σημεία $-\frac{3\pi}{2},0,\frac{3\pi}{2}$. Με τη χρήση της συνάρτησης polyval του MATLAB κάντε το γράφημα του πολυωνύμου στο διάστημα $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ και το γράφημα του σφάλματος της παρεμβολής στο ίδιο διάστημα. (Η διαμέριση του διαστήματος να είναι 0.1) Επαναλάβατε την ίδια διαδικασία για τα σημεία $-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}$.

2. Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, να κατασκευάσετε συνάρτηση (function) σε MATLAB, με όνομα herm8, η οποία να επιστρέφει το παρεμβολικό πολυώνυμο 8ου βαθμού που παρεμβάλει εκτός από τις τιμές της συνάρτησης και της παραγώγου του και τις τιμές της δεύτερης παραγωγού. Επαναλάβατε τα τρεξίματα του πρώτου ερωτήματος για το herm8.

3. Αιτιολογήσετε διαισθητικά τη μορφή που έχουν οι συντελεστές που επιστρέφουν οι herm5 και herm8 για τα συγκεκριμένα τρεξίματα.

Β. Επαναληπτικές Μέθοδοι.

Σας δίνονται τα ακόλουθα θεωρήματα:

Α) Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας Α είναι θετικά ορισμένος (positive definite, $xAx>0$, $\forall x$ μη μηδενικό διάνυσμα) αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.

Β) Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας Α είναι θετικά ορισμένος αν είναι αυστηρά διαγώνια υπερτερών και τα διαγώνια στοιχεία του είναι θετικά.

Γ) Αν ο Α είναι θετικά ορισμένος και τριδιαγώνιος τότε η βέλτιστη επιλογή για την τιμή του ω στην SOR είναι η $\omega=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(B)^2}}$, όπου $\rho(B)$ είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα της μεθόδου Jacobi.

1. Αφού γράψετε τον τύπο 4.24 (σελ. 166 του βιβλίου) της SOR για την περίπτωση που ο πίνακας του συστήματος είναι τριδιαγώνιος να φτιάξετε συνάρτηση (function) του MATLAB με όνομα sortri η οποία να υλοποιεί τον τύπο που γράψατε για την επίλυση ενός τριδιαγώνιου συστήματος με τη μέθοδο SOR.

2. Σας δίνεται η ακόλουθη εξίσωση διαφορών