ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ

2η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Προβλήματα Διαταραχών – Λογισμού Μεταβολών

Άσκηση 3.10, σελίδα 35

από το βιβλίο «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά» του David Logan

Ορίζουμε τις αδιάστατες μεταβλητές

$$\varphi = \frac{\theta}{\theta_0} \qquad \tau = t\sqrt{\frac{g}{s}} = t\sqrt{\frac{g}{l\theta_0}}$$

και βρίσκουμε

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \theta_0\frac{d\varphi}{d\tau}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\left(\theta_0\frac{d\varphi}{d\tau}\sqrt{\frac{g}{l\theta_0}}\right)}{dt} = \frac{d\left(\theta_0\frac{d\varphi}{d\tau}\sqrt{\frac{g}{l\theta_0}}\right)}{d\tau\sqrt{\frac{l\theta_0}{g}}} = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}\frac{g}{l}$$

Συνεπώς από τη δοθείσα εξίσωση έχουμε

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}\frac{g}{l} = -\frac{g}{l}\sin\varphi\theta_0 \Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \sin\varphi\theta_0 = 0$$

με αρχικές συνθήκες

$$\tau(0) = 0 \; \kappa\alpha\iota \; \varphi(0) = 1$$

Άσκηση 3.6, σελίδα 77

από το βιβλίο «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά» του David Logan

$$\varepsilon y'' + \left(t - \tfrac{1}{2}\right)y = 0 \qquad y(0) = 1,\; y(1) = 2$$

$$0 < t < 1,\; 0 < \varepsilon \ll 1$$

Θεωρούμε ότι το οριακό στρώμα είναι στο $t = 0$

<u>Εύρεση της εξωτερικής προσέγγισης $y_{\varepsilon\xi}$</u>

Θεωρούμε το μη διαταραγμένο πρόβλημα και τη συνοριακή συνθήκη για το εξωτερικό χωρίο

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)y = 0 \qquad y(1) = 2$$

Θεωρούμε τη σειρά διαταραχών:

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots$$

Ο πρωτεύων όρος (ε^0) θα μας δώσει το $y_{\varepsilon\xi} \sim y_0$

$$ty_0 - \frac{1}{2}y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 = y_{\varepsilon\xi}, \quad t = 0 \qquad (1)$$

<u>Εύρεση της εσωτερικής προσέγγισης $y_{\varepsilon\sigma}$</u>

Για να υπολογίσουμε το πλάτος $\delta(\varepsilon)$ του οριακού στρώματος στο $t = 0$ κανονικοποιούμε κοντά στο $t = 0$ μέσω της αλλαγής μεταβλητών του χρόνου

$$\tau = \frac{t}{\delta(\varepsilon)} = \frac{t}{\varepsilon^\lambda} \quad , \ \textit{όπου}\ \lambda > 0$$

$$\psi = y$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην εξίσωση (1), προκύπτει

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\psi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon^\lambda}\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon^\lambda}\psi' \quad \textit{οπότε} \quad y'' = \frac{1}{\varepsilon^{2\lambda}}\psi''$$

άρα

$$\varepsilon^{1-2\lambda}\psi'' + \left(\tau\varepsilon^\lambda - \frac{1}{2}\right)\psi = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{1-2\lambda}\psi'' + \tau\varepsilon^\lambda\psi - \frac{1}{2}\psi = 0 \qquad (2)$$

Ο εκθέτης λ είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός, έτσι ώστε η εξίσωση (2) να είναι *ομοιόμορφα διαταραγμένη*, δηλαδή ο συντελεστής της μεγιστοβάθμιας παραγώγου να είναι ανεξάρτητος του ε.

Συνεπώς,

$$\varepsilon^{1-2\lambda} = \varepsilon^\lambda \Rightarrow 1 - 2\lambda = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Οπότε η εξίσωση (2) γίνεται

$$\varepsilon^{\frac{1}{3}}\psi'' + \tau\varepsilon^{\frac{1}{3}}\psi - \frac{1}{2}\psi = 0$$

$$\Rightarrow \psi'' + \tau\psi - \frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\psi = 0$$

Μέθοδος κανονικών διαταραχών

Μας ενδιαφέρει ο πρωτεύων όρος (ε^0)

$$\psi'' + \tau\psi = 0 \quad \textit{στο μη διαταραγμένο πρόβλημα}$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$X(\rho) = \rho^2 + \tau = 0 \;\Rightarrow\; \rho^2 = -\tau \;\Rightarrow\; \rho_{1,2} = \pm i\sqrt{\tau}$ άρα δέχεται λύση

$$\psi(\tau) = c_1 e^{i\sqrt{\tau}} + c_2 e^{-i\sqrt{\tau}}$$

Από αρχικές συνθήκες έχουμε

$$y(0) = \psi(0) = c_1 + c_2 = 1 \;\Rightarrow\; c_2 = 1 - c_1$$

οπότε

$$\psi(\tau) = c_1 e^{i\sqrt{\tau}} + (1 - c_1) e^{-i\sqrt{\tau}}$$

Αντικαθιστώντας πάλι την $\tau = \frac{t}{\varepsilon^{1/3}}$

$$\boxed{y(t) = y_{\varepsilon\sigma}(t) = c_1 e^{i\sqrt{\frac{t}{\varepsilon^{1/3}}}} + (1 - c_1) e^{-i\sqrt{\frac{t}{\varepsilon^{1/3}}}} \quad , \qquad t = O(\varepsilon^{1/3})}$$

Συναρμογή εξωτερικής και εσωτερικής προσέγγισης

Εισάγουμε την ενδιάμεση μεταβλητή $n = \frac{t}{\varepsilon^{1/6}}$ $\;, n\ \textit{σταθερά}$

Το $\varepsilon^{1/6}$ βρίσκεται ανάμεσα στις τάξεις του $\varepsilon^{1/3}$ και 1.

Το $\varepsilon^{1/6}$ τείνει στο μηδέν πιο αργά απ' ότι το $\varepsilon^{1/3}$.

Συνθήκη συναρμογής

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} y_0\left(n\varepsilon^{1/6}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} y_{\varepsilon\sigma}\left(n\varepsilon^{1/6}\right)$$

Όμως

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} y_0\left(n\varepsilon^{1/6}\right) = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} y_{\varepsilon\sigma}\left(n\varepsilon^{1/6}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[c_1 e^{i\sqrt{\frac{n}{\varepsilon^{1/6}}}} + (1 - c_1) e^{-i\sqrt{\frac{n}{\varepsilon^{1/6}}}}\right] \;\Rightarrow\; c_1 = 0 \;\Rightarrow\; c_2 = 0$$

οπότε

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} y_{\varepsilon\sigma}(n\varepsilon^{1/6}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[e^{-i\sqrt{\frac{n}{\varepsilon^{1/6}}}}\right] = 0 \quad \text{έτσι:}$$

$$\boxed{y_{\varepsilon\sigma} = e^{-i\sqrt{\frac{n}{\varepsilon^{1/6}}}}}$$

Ομοιόμορφη προσέγγιση στο [0,1]

$$y_{\pi\rho}(t) = y_0(t) + y_{\varepsilon\sigma}(t) - 0 \;=\; y_{\varepsilon\sigma}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\boxed{y_{\pi\rho}(t) = e^{-i\sqrt{\frac{n}{\varepsilon^{1/6}}}}}}$$

Άσκηση 1.5, σελίδα 56

από το βιβλίο «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά» του David Logan

Έχουμε το πρόβλημα

$$y'' + y = \varepsilon y(1 - y'^2) \;\;, \qquad y(0) = 1 \;,\; y'(0) = 0 \;, y = y(t) \quad (1)$$

Ζητάμε μια προσέγγιση με δύο όρος με τη βοήθεια της μεθόδου Poincare-Lindstedt.

Θεωρούμε μία λύση διαταραχών της μορφής: $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots \;\;,\;\; y = y(\tau)$

όπου έχουμε εισάγει μία ακόμη διαταραγμένη χρονική μεταβλητή στη σειρά διαταραχών

$$\tau = \omega t \;\; , \text{όπου } \omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \cdots = 1 + \varepsilon\omega_1 + \cdots$$

όπου θέσαμε $\omega_0 = 1$ τη συχνότητα του μη διαταραγμένου προβλήματος: $y'' + y = 0$
Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{dy}{d\tau}\omega \quad \text{και}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\omega\frac{dy}{d\tau}\right) = \omega\frac{d^2y}{d\tau^2}\frac{d\tau}{dt} = \frac{d^2y}{d\tau^2}\omega^2$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1):

$$\omega^2 y'' + y = \varepsilon y[1 - (\omega y')^2]$$

$$\Rightarrow \omega^2(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \cdots) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots)$$
$$= \varepsilon(y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots)[1 - (\omega^2(y_0{}' + \varepsilon y_1{}' + \cdots))^2]$$

$$\xRightarrow{\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1} (\omega_0+\varepsilon\omega_1+\cdots)^2(y_0''+\varepsilon y_1''+\cdots)+(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)$$
$$=\varepsilon(y_0+\varepsilon y_1+\cdots)[1-((\omega_0+\varepsilon\omega_1+\cdots)^2(y_0{}'+\varepsilon y_1{}'+\cdots))^2]$$

Εδώ θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε τις διαταραχές στους 2 πρώτους όρους:

$y\cong y_0+\varepsilon y_1$ και $\omega\cong\omega_0+\varepsilon\omega_1$, οπότε θα έχουμε

$$\Rightarrow (\omega_0+\varepsilon\omega_1)^2(y_0''+\varepsilon y_1'')+(y_0+\varepsilon y_1)$$
$$=\varepsilon(y_0+\varepsilon y_1)[1-((\omega_0+\varepsilon\omega_1)^2(y_0{}'+\varepsilon y_1{}'))^2]$$

$$\xRightarrow{\omega_0=1} (1+\varepsilon^2\omega_1^2+2\varepsilon\omega_1)(y_0''+\varepsilon y_1'')+(y_0+\varepsilon y_1)$$
$$=\varepsilon(y_0+\varepsilon y_1)\left[1-(1+\varepsilon^2\omega_1^2+2\varepsilon\omega_1)(y_0^{2\prime}+\varepsilon^2 y_1^{2\prime}+2\varepsilon y_0 y_1)\right]$$

Εξισώνοντας τους όρους ίδιας τάξης θα πάρουμε:

$\varepsilon^0:\quad y_0''+y_0=0$

$\varepsilon^1:\quad y_1''+y_1=-2\omega_1 y_0''+y_0-y_0 y_0^{2\prime}$

Αρχικές συνθήκες

$y(0)=1 \;\Rightarrow\; y_0(0)+\varepsilon y_1(0)=1 \;\Rightarrow\; y_0(0)=1 \;\; \kappa\alpha\iota \; y_1(0)=0$

$y'(0)=0 \;\Rightarrow\; y_0'(0)=0 \;\; \kappa\alpha\iota \; y_1'(0)=0$

Οπότε τελικά θα προκύψουν τα παρακάτω δύο προβλήματα:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_0''+y_0=0} \\ y_0(0)=1 \\ y_0'(0)=0 \end{cases} \quad (I) \quad \kappa\alpha\iota \quad \begin{cases} \boldsymbol{y_1''+y_1=-2\omega_1 y_0''+y_0-y_0 y_0^{2\prime}} \\ y_1(0)=0 \\ y_1'(0)=0 \end{cases} \quad (II)$$

Λύση του προβλήματος (I)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$X(\rho)=\rho^2+1=0 \;\Rightarrow\; \rho_{1,2}=\pm i$$

Άρα λύση

$$y_0(\tau)=c_1\cos\tau+c_2\sin\tau$$

Από αρχικές συνθήκες:
$y_0(0)=1 \;\Rightarrow c_1=1$

$y_0'(0)=0 \;\Rightarrow c_2=0$

Άρα λύση:

$$\boxed{y_0(\tau)=\cos\tau}$$

Λύση του προβλήματος (ΙΙ)

Αντικαθιστώντας τη λύση του (Ι) στο πρόβλημα (ΙΙ), θα προκύψει:

$$y_1'' + y_1 = 2\omega_1 \cos\tau + \cos\tau - \cos\tau \sin^2\tau$$

χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό τύπο:

$$\cos\tau \sin^2\tau = \frac{1}{2}\cos\tau\,(1-\cos 2\tau) = \frac{1}{2}\cos\tau\,(1-2\cos^2\tau+1) = \frac{1}{2}\cos\tau\cdot 2 - \cos^3\tau$$
$$= \cos\tau - \frac{1}{4}(\cos 3\tau + 3\cos\tau) = \frac{1}{4}(\cos\tau - \cos 3\tau)$$

οπότε θα έχουμε τελικά:

$$y_1'' + y_1 = (1+2\omega_1)\cos\tau - \frac{1}{4}(\cos\tau - \cos 3\tau) = \left(1+2\omega_1 - \frac{1}{4}\right)\cos\tau + \frac{1}{4}\cos 3\tau$$

Για να αποφύγουμε τον αιώνιο όρο, θα μηδενίσουμε το συντελεστή που περιέχει το ω_1.

Έτσι: $1 + 2\omega_1 - \frac{1}{4} = 0 \;\Rightarrow \omega_1 = -\frac{3}{8}$

Άρα το πρόβλημα θα γίνει:

$$y_1'' + y_1 = \frac{1}{4}\cos 3\tau \quad (II')$$

Η ομογενής της (II') έχει λύση της μορφής

$$y_{1o\mu}(\tau) = c_3\cos\tau + c_4\sin\tau$$

Ενώ για τη μερική λύση θέτω

$$y_{1\mu\varepsilon\rho}(\tau) = c_5\cos 3\tau$$

$$\mu\varepsilon \quad y'_{1\mu\varepsilon\rho}(\tau) = -3c_5\sin 3\tau \quad \kappa\alpha\iota \quad y''_{1\mu\varepsilon\rho}(\tau) = -9c_5\cos 3\tau$$

και αντικαθιστώντας την στην εξίσωση (II')

$$-9c_5\cos 3\tau + c_5\cos 3\tau = \frac{1}{4}\cos 3\tau \;\Rightarrow\; -8c_5 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; c_5 = -\frac{1}{32}$$

Άρα λύση

$$y_1(\tau) = y_{1o\mu}(\tau) + y_{1\mu\varepsilon\rho}(\tau) = c_3\cos\tau + c_4\sin\tau - \frac{1}{32}\cos 3\tau$$

Από αρχικές συνθήκες:

$$y_1(0) = 1 \;\Rightarrow c_1 = \frac{1}{32}$$

$$y_1'(0) = 0 \;\Rightarrow c_2 = 0$$

Άρα λύση:

$$\boxed{y_1(\tau) = \frac{1}{32}(\cos\tau - \cos 3\tau)}$$

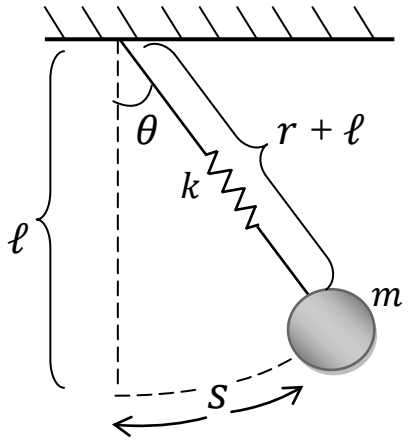
Έτσι , μια προσέγγιση διαταραχών με 2 όρους είναι:

$\mathrm{y}(\tau) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \cdots$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(\tau) = \cos\tau + \varepsilon\frac{1}{32}(\cos\tau - \cos 3\tau) \\ \tau = t - \frac{3}{8}\varepsilon t + \cdots \end{cases}$$

Άσκηση 5.10, σελίδα 175

από το βιβλίο «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά» του David Logan



Ορίζουμε ως r την επιμήκυνση του ελατηρίου k ℓ το μήκος ισορροπίας του ελατηρίου, θ τη γωνία που σχηματίζει το εκκρεμές από την κάθετη και s τη μετατόπιση του σφαιριδίου μάζας m από τη θέση ισορροπίας.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος δίνεται από τον τύπο:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\text{κίνηση κατά } r} + \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{s}^2}_{\text{κίνηση κατά } s} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left((\ell + r)\dot{\theta}\right)^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (\ell + r)^2\dot{\theta}^2\right)}$$

Ενώ η δυναμική:

$$V = \underbrace{\frac{1}{2}kr^2}_{\text{λόγω ελατηρίου}} + \underbrace{mg\ell - \mathrm{mg}(\ell + \mathrm{r})\cos\theta}_{\text{λόγω ταλάντωσης}}$$

$$\boxed{V = \frac{1}{2}kr^2 - mg((\ell + \mathrm{r})cos\theta - \ell)}$$

Ορίζουμε τη Lagrangian

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (\ell + r)^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}kr^2 + mg((\ell + \mathrm{r})cos\theta - \ell)$$

Η αρχή Hamilton θέλει την ελαχιστοποίηση της δράσης, δηλαδή θέλει η κίνηση να γίνεται έτσι ώστε το συναρτησιακό

$$J(\theta, r) = \int_{t_1}^{t_2} L(\theta, \dot{\theta}, r, \dot{r}, t)\, dt$$

να είναι στάσιμο. Όμως αφού η L είναι συνάρτηση και του θ και του r, θα έχουμε δύο εξισώσεις Lagrange:

$$L_\theta - \frac{d}{dt}L_{\dot{\theta}} = 0 \qquad (1)$$

$$L_r - \frac{d}{dt}L_{\dot{r}} = 0 \qquad (2)$$

Όμως

$$L_\theta = -mg((\ell + \mathrm{r})sin\theta$$

$$L_{\dot{\theta}} = m(\ell + r)^2\dot{\theta}$$

$$L_r = m(\ell + r)\dot{\theta}^2 - kr + mg(\ell + r)cos\theta$$

$$L_{\dot{r}} = m\dot{r}$$

Οπότε η εξίσωση (1) θα γίνει:

$$(1) \Rightarrow m\left(2(\ell + r)\dot{\theta}\dot{r} + (\ell + r)^2\ddot{\theta}\right) + mg(\ell + r)sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m(\ell + r)^2\ddot{\theta} + 2m(\ell + r)\dot{\theta}\dot{r} + mg(\ell + r)sin\theta = 0} \qquad (1')$$

Αντίστοιχα η εξίσωση (2) θα γίνει:

$$(2) \Rightarrow \boxed{m\ddot{r} - m(\ell + r)\dot{\theta}^2 + kr - mg(\ell + r)cos\theta = 0} \qquad (2')$$

Οι εξισώσεις (1'), (2') αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης του σφαιριδίου συναρτήσει της επιμήκυνσης του ελατηρίου r και της γωνίας θ του εκκρεμούς ελατηρίου.