Άσκηση 4, σελίδα 193

από το βιβλίο «Mathematica και Εφαρμογές» του Στέφανου Τραχανά

α) Γράφουμε τις εξισώσεις πληθυσμού

$$\dot{x} = (a - rx - py)x = ax - rx^2 - pxy$$

$$\dot{y} = -(b - qx)y = -by + qxy$$

και θέτουμε $\dot{x} = F(x, y)$ και $\dot{y} = G(x, y)$

Τα κρίσιμα σημεία (x_0, y_0) του συστήματος προκύπτουν από την εξίσωση

$$\dot{x} = \dot{y} = 0$$

Ο απλούστερος τρόπος να διαγνώσουμε την ευστάθεια ενός κρίσιμου σημείου (x_0, y_0) στο συγκεκριμένο σύστημα είναι να μελετήσουμε τις μικρές κινήσεις γύρω από αυτό, γράφοντας

$$x = x_0 + u, \qquad y = y_0 + v$$

και κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξης ως προς u και v στα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $F(x, y) = F(x_0 + u, y_0 + v)$ και $G(x, y) = G(x_0 + u, y_0 + v)$. Λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ (αφού το σημείο (x_0, y_0) είναι από υπόθεση κρίσιμο) η διαδικασία αυτή οδηγεί αμέσως στο γραμμικό σύστημα

$$\dot{u} = F_x(x_0, y_0)u + F_y(x_0, y_0)v$$

$$\dot{v} = G_x(x_0, y_0)u + G_y(x_0, y_0)v$$

με μήτρα συντελεστών

$$A = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

οπότε η φύση των λύσεων $u(t)$ και $v(t)$ -δηλαδή η εξέλιξη των μικρών αποκλίσεων από τη θέση ισορροπίας (x_0, y_0)- καθορίζεται πλήρως από τις ιδιοτιμές της μήτρας A.

Οπότε για $a = 4, p = 3, b = 1, q = 1$ έχουμε

(i) $\boldsymbol{r = 2}$

$$\dot{x} = 4x - 2x^2 - 3xy = 0$$

$$\dot{y} = -y + xy = 0$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη

$(0,0)$: σημείο αμοιβαίας εξαφάνισης

$\left(1,\frac{2}{3}\right)$: σημείο ειρηνικής συνύπαρξης

$(2,0)$: σημείο όπου οι θηρευτές έχουν εκλείψει

Η μήτρα συντελεστών είναι

$$A = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4x-3y & -3x \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

Για το σημείο $(0,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1\}$$

επειδή μία από τις ιδιοτιμές είναι θετική οι λύσεις $u(t), v(t)$ περιέχουν και αύξοντα εκθετικά, συνεπώς θα τείνουν στο άπειρο και άρα η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας θα είναι οριστική, άρα το $(0,0)$ είναι *ασταθές*.

Για το σημείο $\left(1,\frac{2}{3}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{\lambda_1 = -1-i, \lambda_2 = -1+i\}$$

επειδή οι μιγαδικές ιδιοτιμές έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, οι δύο συναρτήσεις $u(t), v(t)$ περιέχουν φθίνοντα εκθετικά και άρα τείνουν στο 0 για $t \to \infty$. Άρα το σημείο $\left(1,\frac{2}{3}\right)$ είναι *ευσταθές*.

Για το σημείο $(2,0)$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4\}$$

αντίστοιχα με το σημείο $(0,0)$ το σημείο $(2,0)$ είναι *ασταθές*.

Το συμπέρασμα που βγάζουμε είναι ότι όλες οι λύσεις συγκλίνουν στο σημείο $\left(1, \frac{2}{3}\right)$, το οποίο αποτελεί σημείο ειρηνικής συνύπαρξης, οπότε τα δύο αυτά είδη θα συνυπάρχουν χωρίς κανένα από αυτά να εξαλειφτεί.

(ii) $\boldsymbol{r = 6}$

$$\dot{x} = 4x - 6x^2 - 3xy = 0$$

$$\dot{y} = -y + xy = 0$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη

$(0,0)$: σημείο αμοιβαίας εξαφάνισης

$\left(1, -\frac{2}{3}\right)$: σημείο ειρηνικής συνύπαρξης

$\left(\frac{2}{3}, 0\right)$: σημείο όπου οι θηρευτές έχουν εκλείψει

Η **μήτρα συντελεστών** είναι

$$A = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 12x - 3y & -3x \\ y & x - 1 \end{pmatrix}$$

Για το σημείο $(0,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1\}$$

επειδή μία από τις ιδιοτιμές είναι θετική, οι λύσεις $u(t), v(t)$ περιέχουν και αύξοντα εκθετικά, συνεπώς θα τείνουν στο άπειρο και άρα η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας θα είναι οριστική, άρα το $(0,0)$ είναι *ασταθές*.

Για το σημείο $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -2/3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{\lambda_1 = -3 + \sqrt{11}, \lambda_2 = -3 - \sqrt{11}\}$$

όπως και το προηγούμενο σημείο, το $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ είναι *ασταθές*.

Για το σημείο $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{\lambda_1 = -1/3, \lambda_2 = -4\}$$

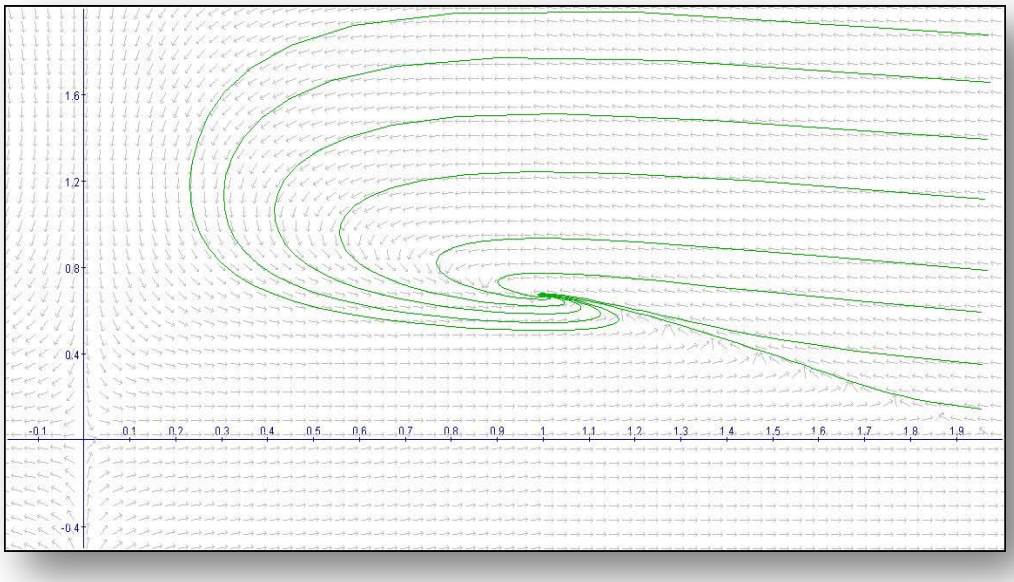
άρα επειδή και οι δύο ιδιοτιμές είναι αρνητικές, όπως αποδείξαμε παραπάνω, το σημείο $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ είναι *ευσταθές*.

Εδώ παρατηρούμε ότι το σημείο ευστάθειας είναι το $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, το οποίο αποτελεί σημείο εξάλειψης για τους θηρευτές. Έτσι από κάποιο σημείο και μετά ο πληθυσμός των θηρευτών θα μηδενιστεί.

Τα συμπεράσματα που βγάζουμε από το ρεαλιστικότερο αυτό μοντέλο σε σχέση με το απλό μοντέλο **Lotka-Volterra**, είναι πως και στις δύο περιπτώσεις (και για $r = 2$ και για $r = 6$) όταν ο πληθυσμός των θηρευτών τείνει στο μηδέν, η τιμή του πληθυσμού των θηραμάτων δεν αυξάνεται εκθετικά, αλλά τείνει σε μια σταθερή τιμή. Αυτό συμβαίνει και στην πραγματικότητα, επειδή πολλά συστήματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους (π.χ. τα αποθέματα τροφής εξαντλούνται, ή υπάρχουν και άλλοι θηρευτές στο περιβάλλον) οδηγώντας σε μη εκθετική αύξηση του πληθυσμού των θηραμάτων. Άρα το συγκεκριμένο μοντέλο εκφράζει πιστότερα τη συμπεριφορά του συστήματος «θηρευτής – θήραμα» και, συνεπακόλουθα, η ανάλυση και η μελέτη αυτού είναι ποιοτικότερη.

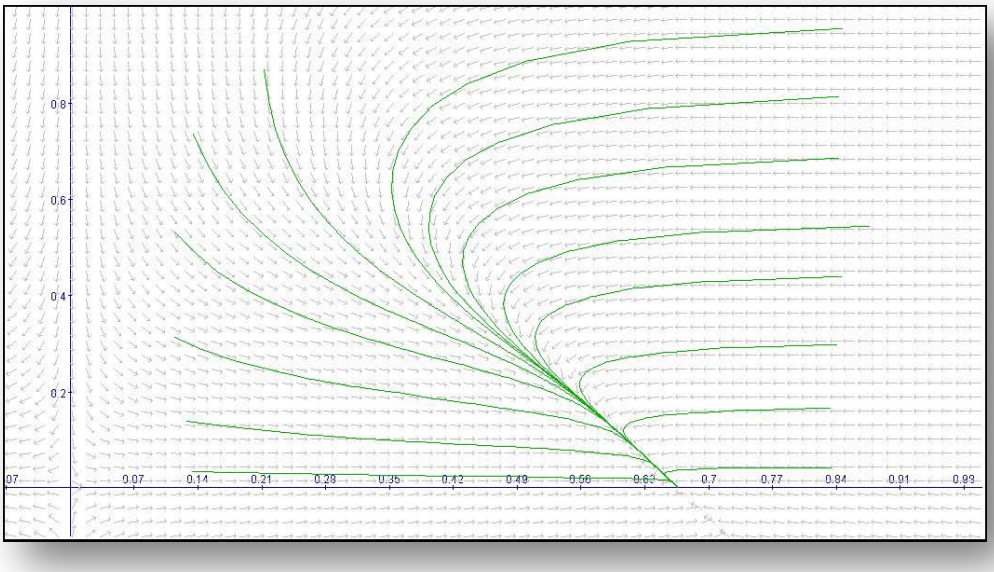
β) Στα ίδια συμπεράσματα με αυτά της παραπάνω ανάλυσης καταλήγουμε αν σχεδιάσουμε το πεδίο κατευθύνσεων και την τροχιά του συστήματος για κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις.

(i) $\boldsymbol{r = 2}$



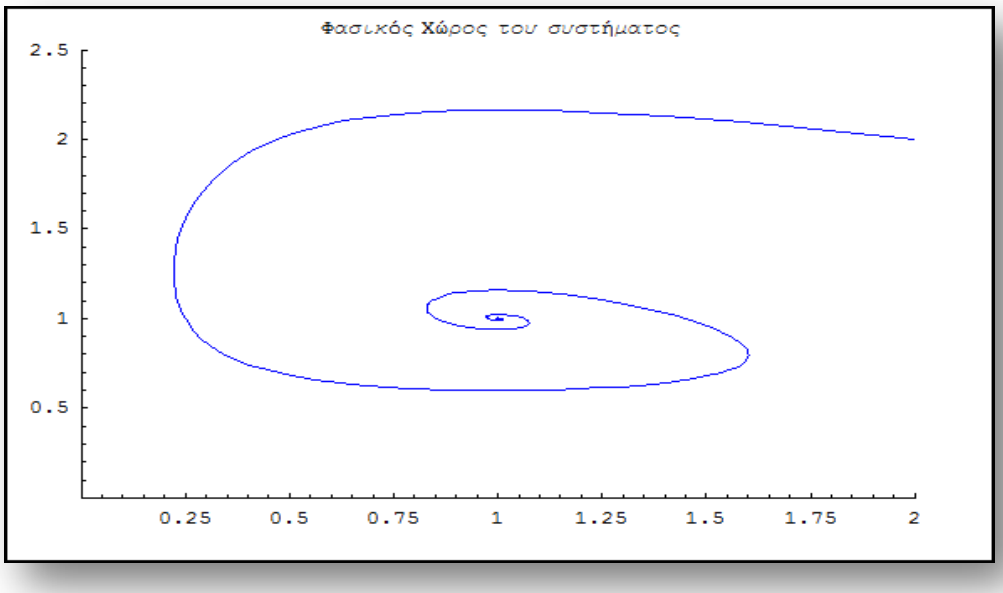
Το σημείο $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ αποτελεί σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Όλες οι λύσεις τείνουν να σταθεροποιηθούν εκεί, έτσι ώστε να μη μηδενίζεται ούτε ο πληθυσμός των θηρευτών, ούτε των θηραμάτων.

(i) $\boldsymbol{r = 6}$



Εδώ, το σημείο $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ αποτελεί σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Παρατηρούμε τον πληθυσμό των θηρευτών να μειώνεται, μέχρις ότου να μηδενιστεί τελείως και τον πληθυσμό των θηραμάτων να σταθεροποιείται σε μία σταθερή τιμή, και όχι να αυξάνεται εκθετικά όπως στο απλό μοντέλο Lotka-Volterra.

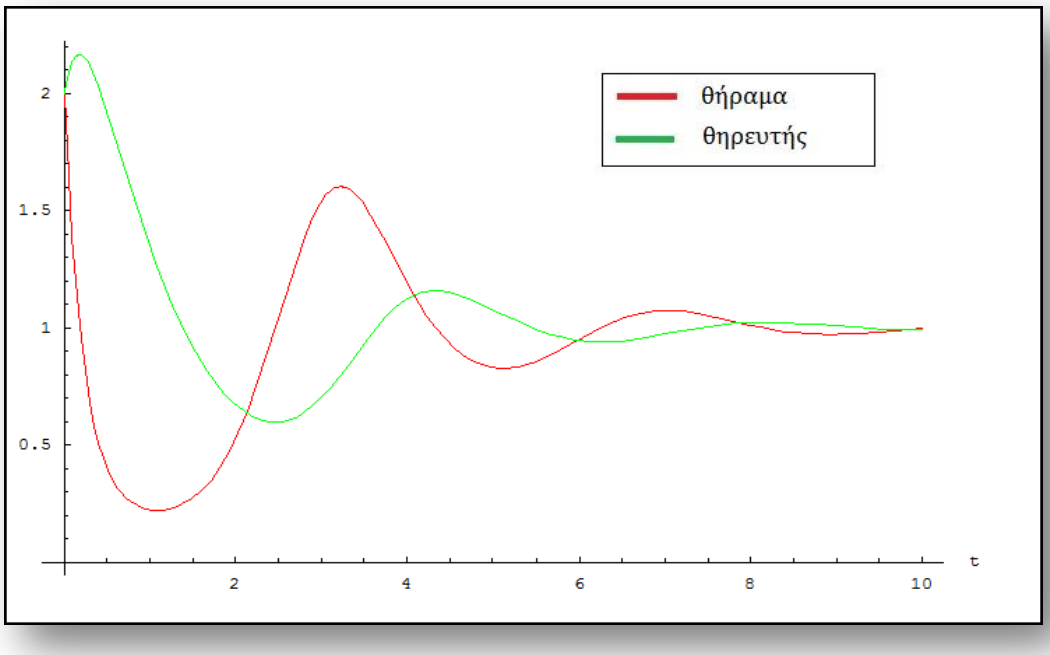
γ) Σχεδιάζουμε το πεδίο των φάσεων και παρατηρούμε την τροχιά του συστήματος.



Παρατηρούμε ότι υπάρχει ισορροπία στο σύστημα, γύρω από την τιμή $(1,1)$ $(\equiv (1000, 1000))$, δηλαδή το μοντέλο για $r = 1$ δίνει ειρηνική συνύπαρξη των δύο ειδών. Επίσης, αν παρατηρήσουμε βήμα-βήμα τη συμπεριφορά, βλέπουμε ότι αρχικά ο πληθυσμός των θηρευτών έχει κάποια μικρή αύξηση έναντι του πληθυσμού των θηραμάτων, ενώ ο τελευταίος μειώνεται δραματικά μέχρι την τιμή 0.25. Αυτό όμως επιφέρει μείωση των θηρευτών, εφόσον μειώνεται η τροφή τους και δυσχεραίνεται η επιβίωσή τους. Η μείωση των θηρευτών όμως, δίνει ευκαιρία στα θηράματα να επιβιώσουν και να πολλαπλασιαστούν. Κάτι το οποίο, τελικά, δίνει τροφή στους θηρευτές και έτσι αρχίζουν πάλι να αυξάνονται.

Αυτός ο κύκλος συνεχίζεται ώσπου οι πληθυσμοί να φτάσουν και οι δύο στην τιμή 1000, όπου το μοντέλο θα μας δώσει την ισορροπία.

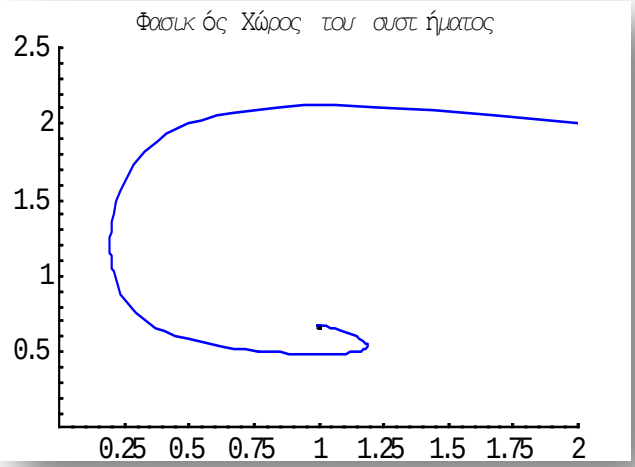
Αυτό μπορούμε επίσης να το δούμε και στο παρακάτω γράφημα, όπου εμφανίζεται η συμπεριφορά των πληθυσμών συναρτήσει του χρόνου.

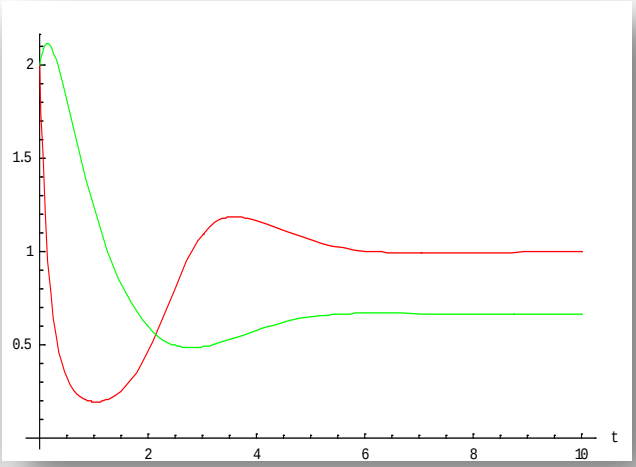


Οι πληθυσμοί αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Αύξηση του ενός επιφέρει αύξηση ή μείωση του άλλου και, σύμφωνα με το διάγραμμα, οι πληθυσμοί «ταλαντώνονται» γύρω από την τιμή 1000. Τελικά, από κάποιο χρόνο και μετά $(t > 10)$, οι πληθυσμοί ισορροπούν, οπότε μπορούμε να μιλήσουμε για *ειρηνική συνύπαρξη*.

δ) Αλλάζοντας την τιμή του r στο μοντέλο, θα αλλάξει η συμπεριφορά του συστήματος, αφού αλλάζει η επιρροή του δευτεροβάθμιου όρου στο μοντέλο. Έτσι για $r = 5$ και $r = 0.5$ θα πάρουμε τα ακόλουθα γραφήματα

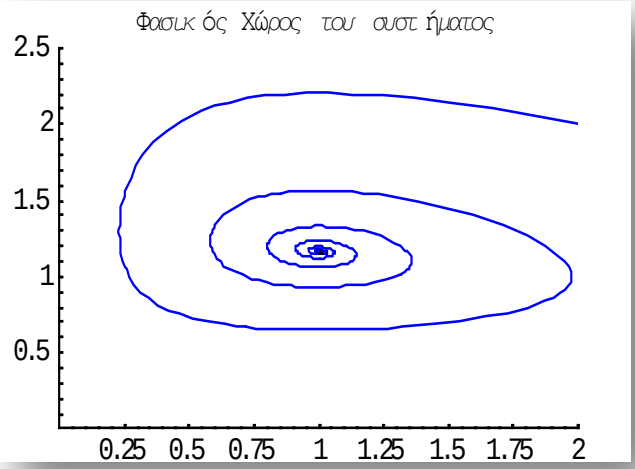
$\boldsymbol{r = 2}$

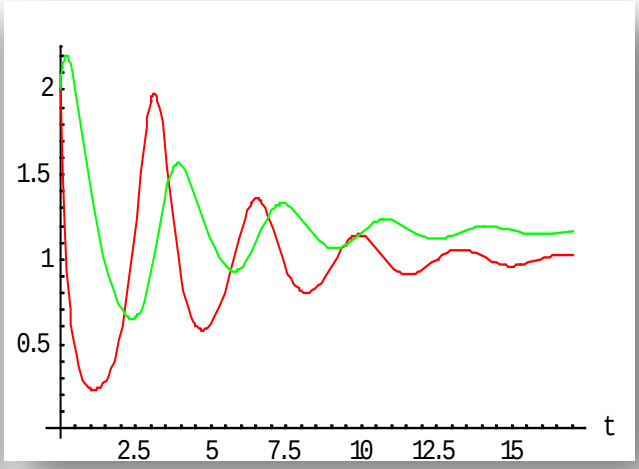




Παρατηρούμε ότι το σύστημα συγκλίνει πολύ γρήγορα στη λύση ισορροπίας. Η τροχιά του συστήματος δεν είναι πολύπλοκη. Διαγράφει μόνο έναν κύκλο, σαν αυτόν που περιγράψαμε νωρίτερα, και φτάνει στο σημείο ισορροπίας, όπου έχουμε ειρηνική συνύπαρξη. Στο δεξιό γράφημα της συμπεριφοράς των πληθυσμών επαληθεύεται αυτό. Μόλις μετά από $t = 5$ μέρες οι πληθυσμοί σταθεροποιούνται.

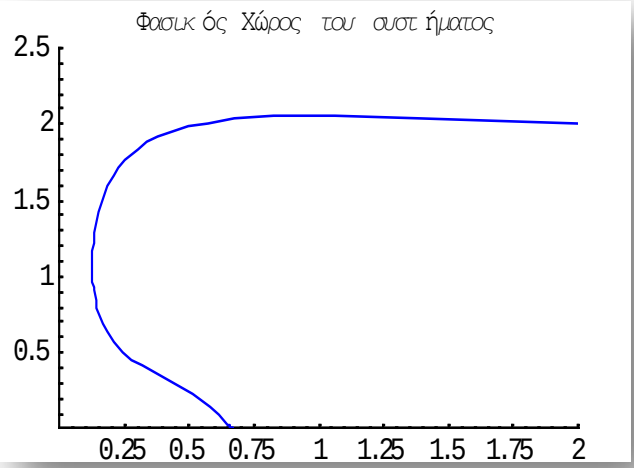
$\boldsymbol{r = 0.5}$

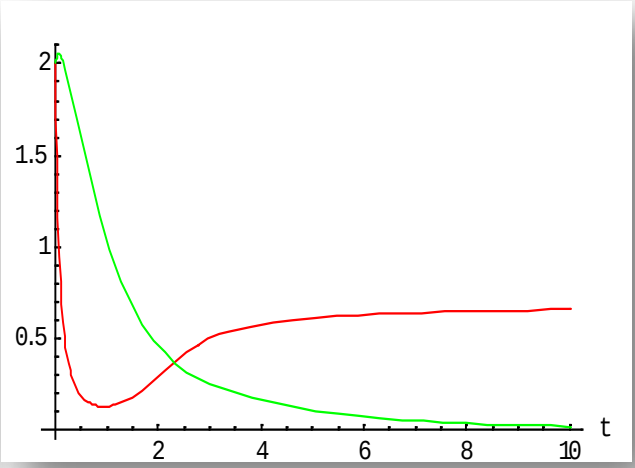




Παρατηρούμε ότι μειούμενου του συντελεστή κάτω από την τιμή 1, το σύστημα διαταράσσεται αρκετά. Συγκλίνει στη λύση ισορροπίας, αλλά η τροχιά του διαγράφει πολλούς κύκλους μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση. Στο δεξιό γράφημα της συμπεριφοράς των πληθυσμών βλέπουμε πόσο επηρεάζει ο ένας τον άλλο. Οι αυξομειώσεις των πληθυσμών είναι πολλές και η ισορροπία επέρχεται μόλις μετά από $t = 17$ μέρες, όπου και οι πληθυσμοί σταθεροποιούνται.

ε) Αν τώρα θέσουμε $\boldsymbol{r = 6}$ θα πάρουμε τα παρακάτω αντίστοιχα με του ερωτήματος **δ)** γραφήματα





Παρατηρούμε ότι η τροχιά του συστήματος στο φασικό χώρο επαληθεύει το πεδίο κατευθύνσεων που βρήκαμε παραπάνω για $r = 6$. Άρα καταλήγουμε πως ο πληθυσμός των θηρευτών τελικά θα μηδενιστεί, ενώ αυτός των θηραμάτων θα παραμείνει σε μια σταθερή τιμή $0.666 = 2/3$. Στο δεξιό γράφημα της συμπεριφοράς των πληθυσμών επαληθεύουμε το ίδιο: ο πληθυσμός των θηρευτών μηδενίζεται, ενώ αυτός των θηραμάτων τείνει στην τιμή 0.666.

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε ότι όσο μειώνεται ο συντελεστής r, τόσο λιγότερο επιδρά ο δευτεροβάθμιος όρος στο σύστημα, και τόσο το μοντέλο τείνει στο απλό μοντέλο Lotka-Volterra, δηλαδή σε μια συνεχή εξάρτηση και αλληλεπίδραση των θηρευτών-θηραμάτων, η οποία με τη σειρά της τείνει σε μια «διηνεκή» μεταβολή αμφότερων των πληθυσμών τους. Από την άλλη, όσο αυξάνεται ο συντελεστής r, τόσο το μοντέλο τείνει σε μια πιο απλή λύση, όπου η τροχιά που ακολουθεί το σύστημα μέχρι την ισορροπία συντομεύεται και απλουστεύεται, ενώ μειώνονται οι περίοδοί της. Αυτή η αλλαγή του r στο μοντέλο οδηγεί σε μια ποιοτικότερη προσέγγιση της πραγματικής συμπεριφοράς των πληθυσμών, αφού δεν προβλέπει εκθετική αύξηση ούτε των θηρευτών, ούτε των θηραμάτων.

Βέβαια, πέραν κάποιου σημείου, ο πληθυσμός των θηρευτών μηδενίζεται και ίσως αυτό να δικαιολογείται υποθέτοντας είτε ότι το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε δεν αντιπροσωπεύει την πραγματικότητα, είτε ότι υπάρχουν περαιτέρω εξωτερικοί παράγοντες (π.χ. η ανθρώπινη δραστηριότητα ή ο θηρευτής σε κάποιο άλλο σύστημα να γίνεται θήραμα) που επηρεάζουν την εξέλιξη των δύο αυτών ειδών.

Πέραν αυτών όμως, με το συγκεκριμένο μοντέλο είμαστε σε θέση να μελετήσουμε πλήρως τη συμπεριφορά κάποιων ειδών, αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλο r, ώστε σε συγκεκριμένους πληθυσμούς, η μελέτη, στην οποία προχωρούμε, να ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.

Εκροή ραδιενεργής έκχυσης

Έστω οι εξής μεταβλητές:

t, ο χρόνος σε λεπτά

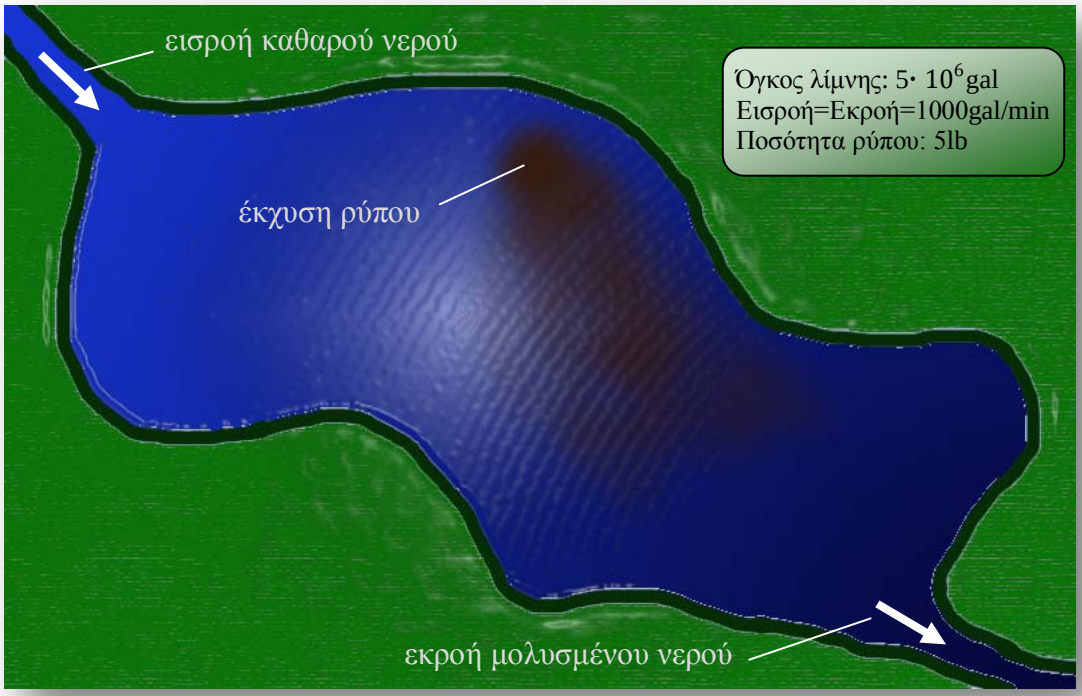
$Q(t)$, η ποσότητα ραδιενεργού υλικού σε λίβρες συναρτήσει του χρόνου

$Q_0 = Q(0) = 5\ lbs$, η αρχική ποσότητα ραδιενεργού υλικού που εκχύνεται στη λίμνη

$T_{1/2} = 2\ \mu\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\varsigma = 2880\ \lambda\varepsilon\pi\tau\acute{\alpha}$, ο χρόνος ημιζωής του ραδιενεργού υλικού

$V_l = 5 \cdot 10^6 gal$, ο όγκος του νερού της λίμνης

$\frac{dV_{\varepsilon\iota\sigma\rho o\ \acute{\eta}\varsigma}}{dt} = \frac{dV_{\varepsilon\kappa\rho o\ \acute{\eta}\varsigma}}{dt} = 1000\ \frac{gal}{min}$, ο ρυθμός με τον οποίο εισρέει και εκρέει το νερό της λίμνης, συνεπώς ο όγκος του νερού της λίμνης παραμένει πάντα σταθερός.



α) Από υπόθεση έχουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του $Q(t)$ είναι ο ρυθμός εισροής μείον αυτόν της εκροής

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \varepsilon\iota\sigma\rho o\acute{\eta} - \varepsilon\kappa\rho o\acute{\eta}$$

όμως η εισροή ραδιενεργού υλικού στη λίμνη από τον ποταμό που την τροφοδοτεί είναι μηδενική και η εκροή συντελείται τόσο από τη διάσπαση του ραδιενεργού υλικού στη λίμνη όσο και από την αποβολή του από τη λίμνη μέσω του ποταμού από τον οποίο το νερό εκρέει από αυτήν.

Τώρα, για τη διάσπαση του ραδιενεργού υλικού θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο της ραδιενεργής διάσπασης

$$\frac{dQ_{\rho\alpha\delta}}{dt} = -kQ(t) \qquad (1)$$

όπου k, η θετική σταθερά διάσπασης.

Ενώ για την εκροή από τη λίμνη έχουμε

$$\frac{dQ_{\varepsilon\kappa\rho o\ \acute{\eta}\ \alpha\pi\acute{o}\ \lambda\acute{\iota}\mu\nu\eta}}{dt} = 1000\ gal/min\ \cdot \frac{Q(t)}{5 \cdot 10^6 gal}$$

δηλαδή το ποσοστό ραδιενεργού ρύπου στο συνολικό όγκο της λίμνης.

Έτσι έχουμε

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 0 - kQ(t) - 1000\frac{gal}{min} \cdot \frac{Q(t)}{5 \cdot 10^6 gal} \qquad (2)$$

Για την εύρεση της σταθεράς διάσπασης k του μοντέλου, ολοκληρώνοντας την εξίσωση (1) βρίσκουμε

$$\int \frac{dQ}{Q} = \int (-k)dt \Leftrightarrow Q(t) = Ce^{-kt}$$

όπου C σταθερά ολοκλήρωσης

Όμως για $t = 0$ έχουμε $Q(0) = 5$, συνεπώς

$$Q(0) = Ce^{k \cdot 0} = 5 \Leftrightarrow C = 5$$

Άρα $Q(t) = 5e^{-kt}$

Από υπόθεση γνωρίζουμε το χρόνο ημιζωής, επομένως

για $t = T_{1/2} = 2\ \mu\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\varsigma = 2880\ \lambda\varepsilon\pi\tau\acute{\alpha}$ από την ώρα της έκχυσης έχουμε

$$\frac{Q(0)}{2} = 5e^{-k \cdot 2880} \Leftrightarrow k = -\frac{\ln(0{,}5)}{2880} = 24{,}0676 \cdot 10^{-5}$$

Οπότε η (2) γίνεται

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -24{,}0676 \cdot 10^{-5} Q(t) - 20 \cdot 10^{-5} Q(t) = -44{,}0676 \cdot 10^{-5}\ Q(t)$$

Επομένως, η παραπάνω είναι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει πώς μεταβάλλεται το $Q(t)$ σε σχέση με το χρόνο, λαμβάνοντας υπόψη ότι $Q(0) = 5$ ως αρχική συνθήκη, εξάγεται το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{dQ(t)}{dt} = -AQ(t) \\ Q(0) = 5 \end{gathered}}$$

όπου, χάριν ευκολίας, θέσαμε $A = 44{,}0676 \cdot 10^{-5}$

β) Φέρνουμε τη διαφορική εξίσωση στη μορφή

$$Q'(t) + AQ(t) = 0$$

και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του ολοκληρώνοντα παράγοντα με

$$\mu(t) = exp \int P(t)\, dt = e^{At}, \text{όπου } P(t) = A$$

έχουμε

$$Q^{'}(t)e^{At} + AQ(t)e^{At} = 0 \Leftrightarrow (Q(t)e^{At})^{'} = 0$$

και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int (Q(t)e^{At})^{'} dt = c \Leftrightarrow Q(t)e^{At} = c$$

Όμως $Q(0) = 5$, οπότε $c = 5$. Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$Q(t) = 5e^{-At}$$

γ) Αναζητούμε ένα τ τέτοιο ώστε $Q(\tau) = 0{,}01\%\, Q(0) = 5 \cdot 10^{-4}$

Συνεπώς

$$Q(\tau) = 5e^{-A\tau} \Leftrightarrow 5 \cdot 10^{-4} = 5e^{-A\tau} \Leftrightarrow 0{,}0001 = e^{-A\tau} \Leftrightarrow \ln(0{,}0001) = -A\tau \Leftrightarrow$$

$$\tau = \frac{\ln(0{,}0001)}{A} = 20900{,}4761\, min \cong 14{,}5\, \mu\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\varsigma$$

Επομένως, η ποσότητα του ραδιενεργού υλικού θα έχει φτάσει στο 0,01% της αρχικής ποσότητάς του μετά από 14,5 μέρες από τη στιγμή της έκχυσης.

Επεξεργασία θαλασσινών

Το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το απλό μοντέλο δυναμικής πληθυσμού

$$\frac{dP}{dt} = \kappa(T)P \qquad (1)$$

όπου $P(t)$ υποδηλώνει τον πληθυσμό των βακτηρίων ανά κυβικό εκατοστό και $\kappa(\tau)$ το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού P, ο οποίος δίνεται από τον τύπο

$$\kappa(T) = \kappa_0 + \kappa_1(T - 34)(140 - T) \qquad (2)$$

με κ_0, κ_1 θετικές σταθερές και $T = T(t)$ η θερμοκρασία της καβουρόψιχας. Η $T(t)$ εξαρτάται από τη θερμοκρασία περιβάλλοντος S(t) και ο ρυθμός μεταβολής της δίνεται από τον τύπο

$$\frac{dT}{dt} = \eta[S(t) - T] \qquad (3)$$

όπου η θετική σταθερά.

Το πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε είναι η εύρεση ελάχιστου χρόνου αχνίσματος της καβουρόψιχας, έτσι ώστε να προκύψει μείωση των βακτηρίων σε ένα ανεκτό επίπεδο, χωρίς να αφυδατωθεί η ψίχα και μειωθεί η ποσότητά της προς πώληση.

Αρχικά, θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της καβουρόψιχας μέσα στη συσκευή αχνίσματος και μετά στη θήκη της κατάψυξης.

Συσκευή Αχνίσματος

Εύρεση της $T(t)$

Από υπόθεση (iii) του προβλήματος έχουμε ότι σε διάστημα 5 λεπτών από την τοποθέτηση της καβουρόψιχας στη συσκευή αχνίσματος, η θερμοκρασία της καβουρόψιχας θα αυξηθεί από 75°F σε 200°F. Έτσι από τη σχέση (3) θα έχουμε

$$\frac{dT}{[S(t) - T]} = \eta dt$$

και ολοκληρώνοντας

$$\int_{75}^{200} \frac{dT}{[S(t) - T]} = \int_0^5 \eta dt$$

$$\Rightarrow -\ln(S(t) - T)\Big|_{75}^{200} = 5\eta$$

η οποία για $S(t) = 250$, γίνεται

$$\Rightarrow -\ln(250-200) + \ln(250-75) = 5\eta$$

$$\Rightarrow 5\eta = \ln(175) - \ln(50)$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\ln(175) - \ln(50)}{5} = 0.25$$

Έτσι, η (3) παίρνει τη μορφή

$$\frac{dT}{dt} = 0.25[S(t) - T] \qquad (3)$$

Γενική λύση της $\boldsymbol{T(t)}$

$$\frac{dT}{[S(t)-T]} = \eta dt$$

$$\Rightarrow \int_{T_{\alpha\rho\chi}}^{T} \frac{d\tau}{[S(t)-\tau]} = \int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t} 0.25dt$$

$$\Rightarrow \int_{75}^{T} \frac{d\tau}{[S(t)-\tau]} = \int_{0}^{t} 0.25dt$$

$$\Rightarrow -\ln(S(t)-\tau)\Big|_{75}^{T} = \frac{t}{4}$$

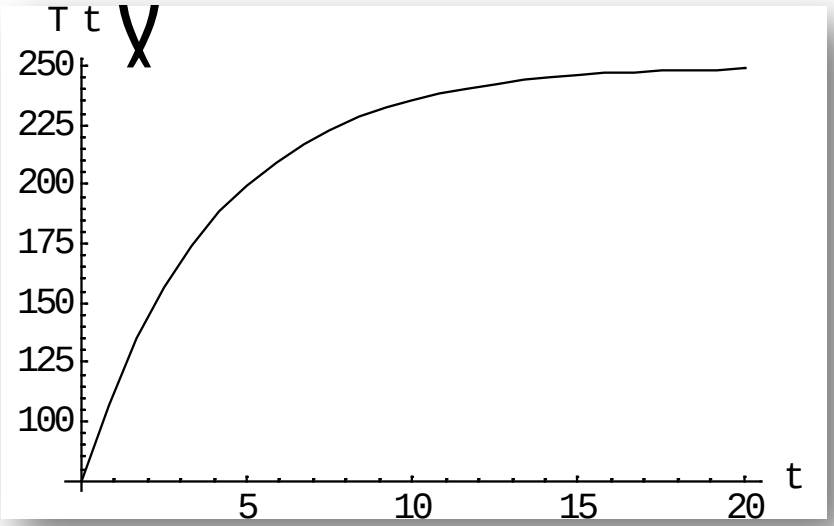
$$\Rightarrow -\ln(250-T) + \ln(250-75) = \frac{t}{4}$$

$$\Rightarrow \ln(250-T) = \ln(175) - \frac{t}{4}$$

$$\Rightarrow 250 - T = 175e^{-t/4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{T(t) = 250 - 175e^{-t/4}}} \qquad (4)$$

Άρα βρήκαμε τη συνάρτηση της θερμοκρασίας της καβουρόψιχας ως προς το χρόνο. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η αύξηση της θερμοκρασίας συναρτήσει του χρόνου.



Η θερμοκρασία, από ένα σημείο και μετά, ταυτίζεται με τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος, όπως αναμενόταν.

Εύρεση της $\boldsymbol{\kappa(T)}$

Από υπόθεση (v) του προβλήματος έχουμε ότι ο αριθμός των βακτηρίων μέσα στην καβουρόψιχα ξεκινά να φθίνει μόλις η θερμοκρασία ξεπεράσει τους 145°F, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής στο σημείο αυτό είναι μηδενικός ($\kappa(145) = 0$).

Έτσι από τη σχέση (2) έχουμε

$$\kappa(145) = \kappa_0 + \kappa_1(145 - 34)(140 - 145) = 0$$

$$\Rightarrow \ \kappa_0 - 555\kappa_1 = 0 \ \Rightarrow \frac{\kappa_0}{\kappa_1} = 555$$

Επίσης από υπόθεση (iv) έχουμε ότι όταν η καβουρόψιχα φυλάσσεται σε μία σταθερή θερμοκρασία34°F, ο αριθμός των βακτηρίων μέσα σε αυτή διπλασιάζεται μέσα σε 60 ώρες. Έστω λοιπόν ότι βρισκόμαστε σε μία τέτοια κατάσταση, τότε αφού κ_0, κ_1 σταθερές, η σχέση $\kappa(34) = 2$ θα ισχύει και τότε. Οπότε θα έχουμε

$$\kappa(34) = \kappa_0 + \kappa_1(34 - 34)(140 - 34) = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\kappa_0 = 2} \Rightarrow \boxed{\kappa_1 = \frac{2}{555} = 0.0036}$$

Άρα η (2) παίρνει τη μορφή

$$\boxed{\boldsymbol{\kappa(T) = 2 + 0.0036(T - 34)(140 - T)}}$$

Εύρεση της $P(t)$

Ο ρυθμός μεταβολής των βακτηρίων $\kappa(T)$ γράφεται $\kappa(T) = \kappa(T(t))$

$$\Rightarrow \kappa(T(t)) = 2 + 0.0036(T(t) - 34)(140 - T(t))$$

$$\Rightarrow \kappa(t) = 2 + 0.0036\left(250 - 175e^{-t/4} - 34\right)\left(140 - 250 - 175e^{-t/4}\right)$$

$\Rightarrow \cdots \Rightarrow$

$$\boxed{\kappa(t) = -83.536 + 205.38e^{-t/4} - 110.25e^{-t/2}}$$

Έτσι η σχέση (1) γράφεται

$$\frac{dP}{dt} = \kappa(t)P \qquad (5)$$

από υπόθεση (i) ο αρχικός πληθυσμός βακτηρίων ανά κυβικό εκατοστό που βρίσκονται στην καβουρόψιχα είναι $P_0 = 10^7$ βακτήρια. Ολοκληρώνοντας λοιπόν τη σχέση (5) για χρόνο από 0 μέχρι τυχαίο χρόνο t, και για πληθυσμό από P_0 μέχρι τον αντίστοιχο P του τυχαίου χρόνου t, θα πάρουμε

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = \int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t} \kappa(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_{10^7}^{P} \frac{dP}{P} = \int_{0}^{t} \kappa(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_{10^7}^{P} \frac{dP}{P} = \int_{0}^{t} -83.536dt + \int_{0}^{t} 205.38e^{-t/4}dt - \int_{0}^{t} 110.25e^{-t/2}dt$$

$$\Rightarrow \ln(P)\Big|_{10^7}^{P} = -83.536t - (4 \cdot 205.38)e^{-\frac{t}{4}}\Big|_{0}^{t} + (2 \cdot 110.25)e^{-t/2}\Big|_{0}^{t}$$

$\Rightarrow \cdots \Rightarrow$

$$\boxed{P(t) = 1.046 \cdot 10^{268} \cdot e^{220.5e^{-0.5t} - 821.52e^{-0.25t} - 83.5356t}}$$

Έτσι λοιπόν βρήκαμε την εξίσωση του πληθυσμού των βακτηρίων στην καβουρόψιχα, συναρτήσει του χρόνου t ,καθώς αυτή παραμένει μέσα στη συσκευή αχνίσματος.

Θήκη Κατάψυξης

Σύμβαση: Στη δεύτερη αυτή φάση της μελέτης του προβλήματος, θεωρούμε ότι ο χρόνος t που θα χρησιμοποιείται στις πράξεις, θα ξεκινάει από το 0. Έτσι λοιπόν, το διάστημα χρόνου που θα μελετήσουμε τώρα θα είναι από 0 μέχρι 16 μέρες ($23040\ min$), δηλαδή $t \in [\ 0\ \ ,23040)$.

Εύρεση της $\boldsymbol{T(t)}$

Έστω $\bar{T}$ η θερμοκρασία της καβουρόψιχας τη στιγμή που βγαίνει από τη συσκευή αχνίσματος. Τότε για $S(t) = 34^o F$,θερμοκρασία της κατάψυξης

$$\int_{T_{\alpha\rho\chi}}^{T} \frac{d\tau}{[S(t)-\tau]} = \int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t} 0.25dt$$

$$\Rightarrow \int_{\bar{T}}^{T} \frac{d\tau}{[S(t)-\tau]} = \int_{0}^{t} 0.25dt$$

$$\Rightarrow -\ln(S(t)-\tau)\Big|_{\bar{T}}^{T} = \frac{t}{4}$$

$$\Rightarrow -\ln(34-T) + \ln(34-\bar{T}) = \frac{t}{4}$$

$$\Rightarrow \ln(34-T) = \ln(34-\bar{T}) - \frac{t}{4}$$

$$\Rightarrow 34 - T = (34-\bar{T})e^{-t/4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{T(t) = 34 + (\bar{T} - 34)e^{-t/4}}}$$

Εύρεση της $\boldsymbol{\kappa(T)}$

Οι σταθερές $\kappa_0,\ \kappa_1$ της $\kappa(T)$ εδώ, στην περίπτωση της κατάψυξης δηλαδή, δεν αλλάζουν. Το μόνο που αλλάζει είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος $S(t)$. Έτσι η $\kappa(T)$ έχει τη μορφή

$$\kappa(T) = 2 + 0.0036(T-34)(140-T)$$

$$\mu\varepsilon \quad T = T(t) = 34 + (\bar{T}-34)e^{-t/4}$$

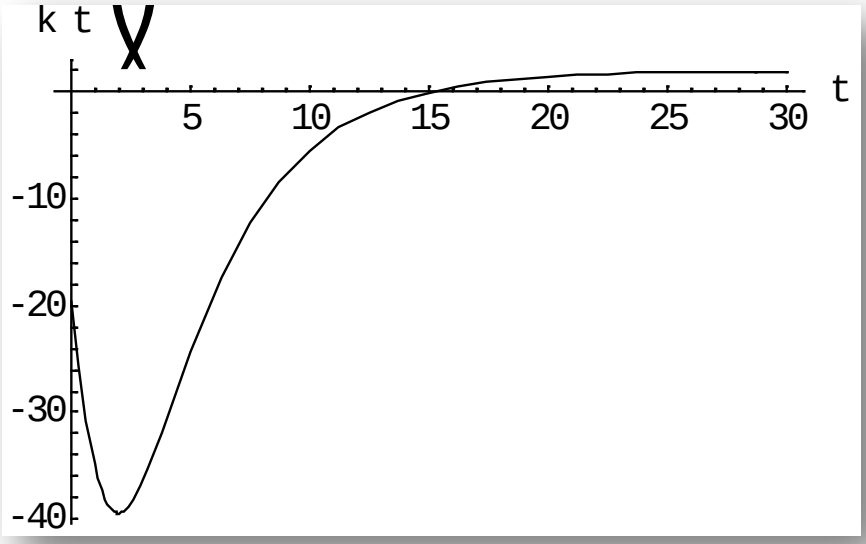
Αντικαθιστώντας λοιπόν την $T(t)$ στην $\kappa(T)$ λαμβάνουμε την $\kappa(T(t))$:

$$\kappa(t) = 2 - 0.0036e^{-t/4}(106 + e^{-t/4}(-34+\bar{T}))\cdot(-34+\bar{T})$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow$$

$$\kappa(t) = 2 - 4.1616e^{-t/2} + 12.9744e^{-t/4} + 0.2448e^{-t/2}\bar{T} - 0.3816e^{-t/4}\bar{T} - 0.0036e^{-t/2}\bar{T}^2$$

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η συμπεριφορά του ρυθμού αύξησης συναρτήσει του χρόνου. Παρατηρούμε ότι, από ένα σημείο και μετά, ο ρυθμός συγκλίνει στην τιμή 2, όπως προβλέπει και η θεώρηση βάσει των υποθέσεων.



Εύρεση της $P(t)$

Έστω $\bar{P}$ ο πληθυσμός των βακτηρίων τη στιγμή που εξάγουμε την καβουρόψιχα από τη συσκευή αχνίσματος. Τότε θα ισχύει ότι $T(t) = \bar{T}$, από ορισμό του $\bar{T}$. Επίσης θα έχουμε

$$\bar{\kappa} = \kappa(\bar{T}) = 0.0036(\bar{T} - 34)(140 - \bar{T}) \quad \text{σταθερό}$$

Έτσι, υποθέτοντας ότι η καβουρόψιχα θα βγει από τη συσκευή αχνίσματος μετά από χρόνο $\bar{t}$, από τη σχέση (1) θα έχουμε ότι για τον πληθυσμό των βακτηρίων πριν ακόμα βγουν από τη συσκευή αχνίσματος, θα ισχύει

$$\int_{P_0}^{\bar{P}} \frac{dP}{P} = \int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}} \bar{\kappa}\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{10^7}^{\bar{P}} \frac{dP}{P} = \int_0^{\bar{t}} \bar{\kappa} dt$$

$$\Rightarrow \ \ln(P)\Big|_{10^7}^{\bar{P}} = \bar{\kappa}\bar{t}$$

$$\Rightarrow \ \ln(\bar{P}) - \ln(10^7) = \bar{\kappa}\bar{t}$$

$$\Rightarrow \ \boxed{\bar{P} = \bar{P}(\bar{t}) = 10^7 e^{\bar{\kappa}\bar{t}}} \qquad (6)$$

Βρήκαμε λοιπόν τον πληθυσμό των βακτηρίων που θα βγουν από τη συσκευή αχνίσματος συναρτήσει του συνολικού χρόνου αχνίσματος $\bar{t}$.

Η σχέση (1) ισχύει επίσης και για την περίπτωση του περιβάλλοντος ψύξης, με αρχική τιμή, όχι 10^7 όπως προηγουμένως, αλλά $\bar{P}$,όπως βρήκαμε παραπάνω. Η σχέση (1) στο περιβάλλον της κατάψυξης θα δώσει

$$\int_{P_{\alpha\rho\chi}}^{P_{\tau\varepsilon\lambda}} \frac{dP}{P} = \int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}} \kappa(t)\, dt \qquad (7)$$

Από υπόθεση (vi) του προβλήματος γνωρίζουμε ότι ένας αριθμός 10^5 βακτηρίων κρίνει το χρόνο ζωής της καβουρόψιχας. Δηλαδή αν ο πληθυσμός των βακτηρίων μετά από κάποιες ημέρες ξεπεράσει τον αριθμό 10^5 η καβουρόψιχα δεν μπορεί να πωληθεί πια. Οπότε θεωρούμε ως τελικό πληθυσμό $P_{\tau\varepsilon\lambda} = 10^5$, σαν μία ακραία τιμή, πέραν της οποίας δε μας επιτρέπεται να βρεθούμε. Επίσης ως τελικό χρόνο έχουμε $t_{\tau\varepsilon\lambda} = 16\, \eta\mu\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\varsigma = 23040\, min$ και $t_{\alpha\rho\chi} = 0$. Συνεπώς η σχέση (7) λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\Rightarrow \int_{\bar{P}}^{10^5} \frac{dP}{P} = \int_0^{23040} \kappa(t)dt$$

$$\Rightarrow \ \ln(P)\Big|_{\bar{P}}^{10^5} = \int_0^{23040} 2dt - \int_0^{23040} 4.1616e^{-t/2}dt + \int_0^{23040} 12.9744e^{-t/4}dt$$
$$+ \int_0^{23040} 0.2448e^{-t/2}\bar{T}dt$$
$$- \int_0^{23040} 0.3816e^{-t/4}\bar{T}dt - \int_0^{23040} 0.0036e^{-t/2}\bar{T}^2dt$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \ln(10^5) - \ln(\bar{P}) = 46080$$

$$\Rightarrow \ln(\bar{P}) = \ln(10^5) - 46080$$

$$\Rightarrow \bar{P} = 10^5 e^{-46080} = 1.757 \cdot 10^{-158}$$

Αντικαθιστώντας τώρα το $\bar{P}$ στη σχέση

$$P(t) = 1.046 \cdot 10^{268} \cdot e^{220.5e^{-0.5t} - 821.52e^{-0.25t} - 83.5356\,t}$$

η οποία αποτελεί το πλήθος των βακτηρίων συναρτήσει του χρόνου, θα προκύψει η ακόλουθη εξίσωση με μοναδικό άγνωστο το χρόνο $\bar{t}$. Τόσο απαιτείται να αχνιστεί η καβουρόψιχα ώστε μετά από 16 μέρες στην κατάψυξη να υπάρχουν 10^5 βακτήρια ανά κυβικό εκατοστό καβουρόψιχας. Έτσι έχουμε

$$\bar{P} = 1.046 \cdot 10^{268} \cdot e^{220.5e^{-0.5\bar{t}} - 821.52e^{-0.25\bar{t}} - 83.5356\,\bar{t}}$$

$$\Rightarrow 1.757 \cdot 10^{-158} = 1.046 \cdot 10^{268} \cdot e^{220.5e^{-0.5\bar{t}} - 821.52e^{-0.25\bar{t}} - 83.5356\,\bar{t}}$$

$$\Rightarrow 1.68 \cdot 10^{-426} = e^{220.5e^{-0.5\bar{t}} - 821.52e^{-0.25\bar{t}} - 83.5356\,\bar{t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{t} = 11.139\ min}$$

Άρα βρήκαμε το χρόνο $\bar{t}$ που μας δίνει 10^5 βακτήρια μετά από 16 μέρες. Δηλαδή είναι ο **ελάχιστος χρόνος αχνίσματος** που χρειάζεται ώστε μετά από 16 μέρες κατάψυξης , η καβουρόψιχα να μπορεί ακόμα να πωληθεί.

Σημείωση: *Τα παραπάνω ευρήματα επιβεβαιώνονται και από τις εργασίες «Βακτηριολογικά Χαρακτηριστικά και Χαρακτηριστικά Χρόνου Ζωής της Συσκευασμένης και Παστεριωμένης Καβουρόψιχας»[1] και «Βιωσιμότητα και Εκτίμηση Χρόνου Ζωής Βακτηριακών Πληθυσμών»[2].*

---

[1] Bacteriological and Shelf-Life Characteristics of Canned, Pasteurized Crab Cake Mix
P. Loaharanu, A. Lopez
Department of Food Science and Technology, Virginia Polytechnic Institute

[2] Viability and Estimation of Shelf-Life of Bacterial Populations
M. Orlando, A. RosenVald, F. Klein, I. Dearmon, A. Fernelius, R. Lincoln, P. Middaugh
U.S. Army Chemical Corps, Fort Detrick, Frederick, Maryland