10/2/2011

Οικονομικά Μαθηματικά

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 0.0.1.

Το σύνολο προϋπολογισμού είναι $B_w(p)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \mid p_1x+p_2y\le 10p_1+3p_2\}$

Έχουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης $u_1(x,y)=xy^2$ με $(x,y)\in B_w(p)$.

Επειδή η συνεχής και αυστηρά μονότονη, το πρόβλημα έχει λύση (x,y), η οποία βρίσκεται στον ειδοβιβασμό περιορισμό. Άρα οφείλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη $u(x,y)=xy^2$ υπό τους περιορισμούς $p_1x+p_2y=10p_1+3p_2$, $x,y\ge 0$.

Λύνουμε ως προς y και προκύπτει το πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης

$$f(x)=x\left(\frac{10p_1+3p_2-p_1x}{p_2}\right)^2, \text{ όταν } x\in\left[0,\frac{10p_1+3p_2}{p_1}\right].$$

$$f'(x)=\frac{(10p_1+3p_2-p_1x)(10p_1+3p_2-3p_1x)}{p_2^2}, \text{ άρα } \begin{cases} x_1=\dfrac{10p_1+3p_2}{p_1} \\ x_2=\dfrac{10p_1+3p_2}{3p_1}\end{cases}$$

είναι οι ρίζες της $f'(x)$ με $x_2<x_1$. Το πρόσημο είναι αρνητικό εκτός των ριζών, οπότε η $f(x)$ είναι αύξουσα στο $[0,x_2]$ και φθίνουσα στο $[x_2,x_1]$, δηλαδή μεγιστοποιείται στο x_2. Άρα η $u(x,y)$ μεγιστοποιείται στο σημείο

$$\left(\frac{10p_1+3p_2}{3p_1},\ \frac{20p_1+6p_2}{3p_2}\right),$$

το οποίο είναι το ζητούμενο αγαθό.

Επομένως, η συνάρτηση ζήτησης είναι $\phi(p)=\left(\dfrac{10p_1+3p_2}{3p_1},\ \dfrac{20p_1+6p_2}{3p_2}\right)$

όπου $p=(p_1,p_2)>>0$.

Όταν $p=(3,4)$ το ζητούμενο αγαθό είναι $\phi(p)=\left(\frac{42}{9},7\right)\simeq(4{,}6,7)$

10/2/2011

Άσκηση 0.0.2

Έστω $p=(p_1,p_2)\gg 0$. Τότε τα σημεία τομής του ελαχιστοποιημένου περιορισμού, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ : p_1x+p_2y=4p_1+3p_2\}$ με τις ευθείες $x=0, y=0$ είναι τα σημεία $\left(0,\frac{p_1+3p_2}{p_2}\right)$, $\left(\frac{4p_1+3p_2}{p_1},0\right)$. Η ανισοτικία ζήτησης είναι η αποδοχή:

$$\phi(p)=\left(2+3\frac{p_2}{p_1},0\right), \text{ αν } p_1<2p_2$$

$$\phi(p)=\left(0,3+4\frac{p_1}{p_2}\right), \text{ αν } p_1>2p_2$$

$$\phi(p)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ : 2p_2x+p_1y=8p_2+3p_2 \Leftrightarrow 2x+y=11\}, \text{ αν } p_1=2p_2$$

Έστω $f(p)$ τυχαία επιλογή της $\phi(p)$. Τότε $f(p)\in\phi(p)$ $\forall p\gg 0$.

Έστω f συνεχής. Παρατηρούμε ότι οι ακολουθίες $p_n=(2+\frac{1}{n},1)$, $q_n=(2,1+\frac{1}{n})$ συγκλίνουν στο $(2,1)$ και οι ακολουθίες των τιμών τους

$f(p_n)=\left(0,3+4(2+\frac{1}{n})\right)\to(0,7)$ και $f(q_n)=\left(2+\frac{3}{2}(2+\frac{1}{n}),0\right)\to(5,0)$

συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $(2,1)$ και η $\phi(p)$ δεν έχει συνεχή επιλογή.

Άσκηση 0.0.3.

i) $\forall x\in A$ ορίζουμε το σύνολο $F_A=\{w\in X \mid w\succsim x\}$ το οποίο είναι σύμπαγές σαν τομή του σύμπαγούς A και του κλειστού ανώτερου $P_{\succsim}(x)$. Γνωρίζουμε ότι $F=\bigcap_{x\in A}F_x\neq\emptyset$, όπου κάθε στοιχείο του F μεγιστοποιεί την f.

Έστω ότι αποδείξαμε την υπόθεση αρνούμενοι το συμπέρασμα, δηλαδή:

$x,y,z\in A$, $x=\lambda y+(1-\lambda)z$, $\lambda\in(0,1)$, $x\in F \Rightarrow y,z\notin F$.

Έστω λοιπόν ότι $y,z\notin F$, δηλαδή $y\succ w \Rightarrow y\succ w \Rightarrow \lambda y\succ\lambda w$ και

$z\succ w \Rightarrow z\succ w \Rightarrow (1-\lambda)z\succ(1-\lambda)w$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις έχουμε:

10/2/2011

$\lambda y+(1-\lambda)z > \lambda w+(1-\lambda)w \Rightarrow x > w \Rightarrow x \succ w$ ΑΤΟΠΟ, διότι υποθέσαμε πως $x \in F$, δηλ. $w \succsim x$.

Συνεπώς $y, z \in F$, καθώς $y \leq w$ και $z \leq w$, οπότε το F είναι extreme face του A.

ii) 1) Έχουμε το σύνολο προϋπολογισμού $B_{p,w} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+ \mid 2x+3y+z \leq 10\}$. Επειδή η τοπική μη κορεσμένη και συνεχής το μέγιστο λαμβάνεται στον ειδοδηλωτικό περιορισμό $\mathcal{L} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+z = 10\}$. Άρα $3y = 10-(2x+z)$.

Γνωρίζουμε ότι $y \geq 0 \Rightarrow 3y \geq 0 \Rightarrow 10-(2x+z) \geq 0 \Rightarrow 2x+z \leq 10$

και επειδή $x \geq 0, z \geq 0$ έχουμε $0 \leq 2x+z \leq 10$.

Στα σημεία του ειδοδηλωτικού περιορισμού έχουμε:

$u(x,y,z) = 4x+10-2x-z+5z = 2x+4z+10$

Συνεπώς, έπεται ότι η u μεγιστοποιείται στα σημεία του ενδιάμεσου τμήματος

$\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3_+ \mid x+2z = 5\}$

ii) Για τους ίδιους λόγους η u μεγιστοποιείται στο $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+ \mid 2x+2y+5z = 10\}$

Άρα $5z = 10-(2x+2y)$. Οπότε καταλήγουμε με παρόμοιο τρόπο στο ότι $0 \leq 2x+2y \leq 10$. Στα σημεία του ειδοδηλωτικού περιορισμού έχουμε:

$u(x,y,z) = 4x+3y+10-2x-2y = 2x+y+10$

Άρα, η u μεγιστοποιείται στα σημεία του ενδιάμεσου τμήματος

$\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3_+ \mid 2x+y = 10\}$

iii) Για τους ίδιους λόγους, εδώ συνηάγεται σαφώς ευκολότερα, ότι η u μεγιστοποιείται στο $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+ \mid 4x+3y+5z = 10\}$

10/2/2011

Άσκηση 0.0.4.

Στο διάστημα $(0,1) \subseteq [0,1]$ η ϕ είναι προφανώς upper και lower hemicontinuous αφού για κάθε κοινωνή περιοχή U του $\phi(x)$ η άνω αντίστροφη εικόνα $\phi^u(U)$ είναι περιοχή του x και αντίστοιχα ισχύει για κάθε $U \subset (0,1)$ κοινωνή με $\phi(x) \cap U \neq \emptyset$, η κάτω αντίστροφη εικόνα $\phi^l(U)$ του U είναι περιοχή του x. Το πρόβλημα των ολικών upper semi continuity και lower semi continuity εντοπίζεται στα άκρα του πεδίου ορισμού 0 και 1.

Εξετάζουμε αρχικά την upper semi continuity:

Για το 0 βλέπουμε ότι

$\exists x_n \in [0,1]$ έστω $x_n = \frac{1}{n}$ με $\frac{1}{n} \to 0$ και $\exists y_n \in \phi(\frac{1}{n})$ έστω $y_n = 1/2$, άρα $1/2 \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ $\forall \{y_{k_n}\} \subseteq \{y_n\}$ τ.ω. $y_{k_n} \to \frac{1}{2} \notin \phi(0) = \{0\}$.

Συνεπώς δεν είναι upper hemicontinuous στο 0, άρα η ϕ δεν είναι γενικώς upper hemicontinuous.

Τώρα θα εξετάσουμε αν είναι lower hemicontinuous:

Για το 0 έχουμε ότι

αν $x_n \to 0$ $\forall y \in \phi(0) = \{0\} \Rightarrow y = 0$ $\exists \{x_{k_n}\} \subseteq \{x_n\}$ και $\exists y_n \in \phi(x_{k_n}) = 1 - x_{k_n}$ $y_n \to 0$. Ισχύει αν λάβουμε τυχαία ακολουθία x_n έστω $x_n = \frac{1}{n}$, $x_{k_n} = \frac{1}{n^2}$ και $y_n = \frac{1}{n}$

Άρα στο 0 η ϕ είναι lower hemicontinuous.

Για το 1 έχουμε ότι

$x_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ $\forall y \in \phi(1) = \{0\} \Rightarrow y = 0$ $\exists \{x_{k_n}\} \subseteq \{x_n\}$ και

Έστω

$y_n = \frac{1}{n+2} \in \phi(x_{k_n}) = \phi(1 - \frac{1}{n+1}) = [0, \frac{1}{n+1}]$ τ.ω. $y_n = \frac{1}{n+2} \to 0$

Άρα η ϕ είναι lower hemicontinuous και στο 1.

Οπότε η ϕ είναι lower hemicontinuous.