6/2/2011

Οικονομικά Μαθηματικά

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 0.0.1

i) Έστω $f: X \to \mathbb{R}$ και $x \in X$

Αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ του X ισχύει $x_n \to x \Rightarrow \overline{\lim} f(x_n) \leq f(x)$

τότε η f είναι άνω ημισυνεχής στο x.

Αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ του X ισχύει $x_n \to x \Rightarrow \underline{\lim} f(x_n) \geq f(x)$

τότε η f είναι κάτω ημισυνεχής στο x.

a) Εξετάζουμε την άνω ημισυνέχεια για $x>0$.

Παρατηρούμε ότι $x>0 \Rightarrow x+1>1 \Rightarrow f(x)>1$. Βλέπουμε πως το σύνολο τιμών της f είναι ανοιχτό, οπότε και αυτό της αντίστροφής της θα είναι κλειστό. Για να επιτύχουμε τη σχέση $f(x) \geq 1$ αρκεί να δείξουμε $a \geq 1$, οπότε θα προκύψει ότι $f^{-1}([a,+\infty))$ κλειστό, συνεπώς η f είναι άνω ημισυνεχής

β) Αντίστοιχα εξετάζουμε την κάτω ημισυνέχεια για $x<0$.

Παρατηρούμε ότι $x<0 \Rightarrow f(x)<0$. Αρκεί να δείξουμε $a \leq 0$ και προκύπτει ότι $f(x)$ κλειστό, οπότε και $f^{-1}((-\infty,a])$ κλειστό.

ii) Η πρόταση που μας ζητείται να αποδείξουμε είναι η εξής:

Η f είναι κάτω ημισυνεχής στο X αν και μόνο αν $f^{-1}((-\infty,\alpha])$ είναι κλειστό

Απόδειξη

Ευθεία: Έστω $x_n \in (-\infty,\alpha]$ και $x_n \to x$. Θα δείξουμε ότι $f(x) \leq \alpha$, οπότε το $f^{-1}((-\infty,\alpha])$ είναι κλειστό $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

6/2/2011

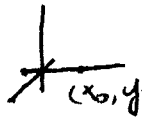
Έστω ότι $f(x)>\alpha$ και έστω $b\in\mathbb{R}$ με $f(x)>b>\alpha$.
Εφόσον f κάτω ημισυνεχής ισχύει $x_n\to x \Rightarrow \underline{\lim} f(x_n)\geq f(x)$
Συνεπώς υπάρχει υπακολουθία $\{x_{k_n}\}$ της $\{x_n\}$ τέτοια ώστε $f(x_{k_n})>b$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι $f(x_n)\leq\alpha$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Οπότε $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $f^{-1}((-\infty,\alpha])$ κλειστό.

<u>Αντίστροφη</u>

Έστω $f^{-1}((-\infty,\alpha])$ κλειστό $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. Αν f δεν είναι κάτω ημισυνεχής υπάρχει $x\in X$ και ακολουθία $\{x_n\}$ του X ώστε $x_n\to x \Rightarrow \underline{\lim} f(x_n)<f(x)$.
Έστω $b,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\underline{\lim} f(x_n)\leq b<\gamma<f(x)$ τότε υπάρχει υπακολουθία $\{x_{k_n}\}$ της $\{x_n\}$ ώστε $f(x_{k_n})<\gamma<f(x)$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Έτσι έχουμε: $x_{k_n}\in f^{-1}((-\infty,\gamma])$, $x_{k_n}\to x$ και $x\notin f^{-1}((-\infty,\gamma])$. Άτοπο διότι υποθέσαμε ότι $f^{-1}((-\infty,\alpha])$ κλειστό $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 0.0.2.

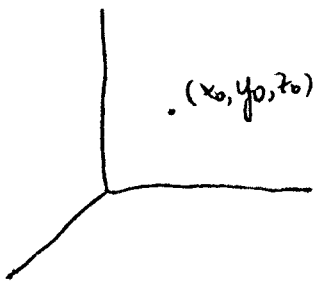
Θα δείξουμε ότι $\forall(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3_+$ το σύνολο
$P_{\geq}(x_0,y_0,z_0)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+ \mid (x,y,z)\geq(x_0,y_0,z_0) \Leftrightarrow xyz\geq x_0y_0z_0\}$
είναι κυρτό.



Αν $x_0\cdot y_0\cdot z_0=0 \Rightarrow P_{\geq}(x_0,y_0,z_0)=\mathbb{R}^3_+$ είναι κυρτό

Αν $x_0,y_0,z_0>0$ $\quad P_{\geq}(x_0,y_0,z_0)=epi(f)=\left\{(x,y,z)\mid z\geq\frac{x_0\cdot y_0\cdot z_0}{xy}\right\}$

Αν θεωρήσουμε $z=f(x,y)=\frac{x_0y_0z_0}{xy}$ προκύπτει η προηγούμενη συνάρτηση συνάρτηση για $\alpha=x_0y_0z_0$, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι κυρτή. Συνεπώς, $P_{\geq}(x_0,y_0,z_0)$ κυρτό.



Άρα η συνάρτηση χρησιμότητας $u(x,y,z)$ είναι κυρτή, οπότε κυρτά είναι και τα σχέδια προτίμησης.

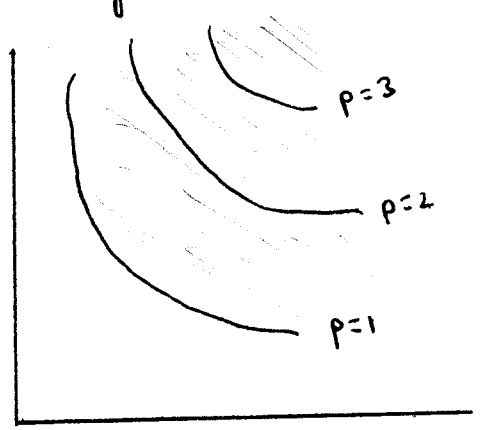
6/2/2011

Η $f(x,y)=\frac{\alpha}{xy}$ είναι κυρτή διότι

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2\alpha}{x^3 y} & \frac{\alpha}{(xy)^2} \\ \frac{\alpha}{(xy)^2} & \frac{2\alpha}{xy^3} \end{vmatrix} = \frac{4\alpha^2}{(xy)^4} - \frac{\alpha^2}{(xy)^4} = 3\frac{\alpha^2}{(xy)^4} > 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ x,y>0$$

Άσκηση 0.0.3.

i) $u(x,y)=xy$



Έστω C η καμπύλη αδιαφορίας που ορίζεται από τη p-ισοσταθμική της u με $p \geq 0$. Δηλαδή έχουμε το σύνολο

$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \mid u(x,y)=p \Leftrightarrow xy=p \Leftrightarrow y=p\frac{1}{x}\}$

Για να είναι κοίλη η u κοίλη για

$(x_1,y_1)>(x_2,y_2) \Rightarrow x_1>x_2$ & $y_1>y_2$

Να ισχύει $u(x_1,y_1)>u(x_2,y_2)$

Αν πολλαπλασιάσουμε ~~[illegible]~~ κατά μέλη τα $x_1>x_2$ και $y_1>y_2$ επειδή $x_1,x_2,y_1,y_2>0$ θα έχουμε $x_1y_1>x_2y_2 \Rightarrow u(x_1,y_1)>u(x_2,y_2)$ άρα η κοίλη.

Για να δείξω ότι είναι κυρτή ακολουθώ την εξής διαδικασία

Θα δείξω ότι $\forall (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2_+$ το σύνολο $P_{\succsim}(x_0,y_0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \mid (x,y)\succsim(x_0,y_0) \Leftrightarrow xy\geq x_0y_0\}$ είναι κυρτό.

Αν $x_0y_0=0 \Rightarrow P_{\succsim}(x_0,y_0)=\mathbb{R}^2_+$ κυρτό.

Αν $x_0y_0>0$ $P_{\succsim}(x_0,y_0)=epi(f)=\{(x,y) \mid y\geq\frac{x_0y_0}{x}\}$. Έστω $f(x)=\frac{x_0y_0}{x}, x>0$

Αρκεί ν.δ.ο. f κυρτή. $f'(x)=-\frac{x_0y_0}{x^2}$, $f''(x)=\frac{2x_0y_0}{x^3}>0, \forall x>0 \Rightarrow f$ κυρτή.

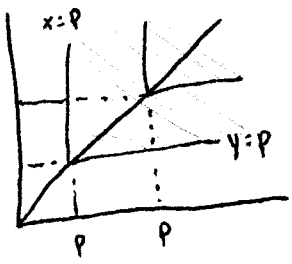
Άρα $P_{\succsim}(x_0,y_0)$ κυρτό, οπότε ~~[illegible]~~ κυρτή.

~~η f είναι εκάστη συνεχής, άρα η ≿ συνεχής.~~

η u είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων εκτός του σημείου (0,0) όπου η u(x,y)=xy δεν ορίζεται, συνεπώς και η $\succsim$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2_+\setminus\{0,0\}$.

6/2/2011

ii) $u(x,y)=\min\{x,y\}$



Έστω C καμπύλη αδιαφορίας που ορίζεται από τη p-ισοσταθμική της u με $p \geq 0$. Έχουμε ότι:

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \mid u(x,y)=p \Leftrightarrow \min\{x,y\}=p\}$$

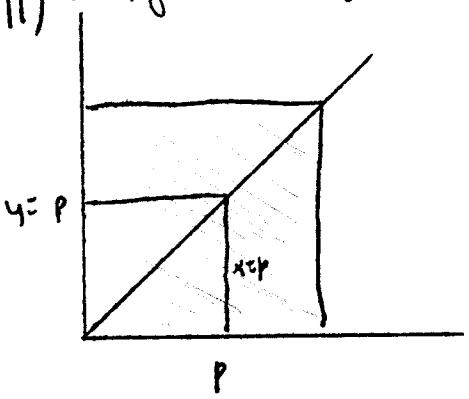
a) αν $\min\{x,y\}=x \Rightarrow x=p,\ y\geq p$

b) αν $\min\{x,y\}=y \Rightarrow y=p,\ x\geq p$

Σε κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις δηλαδή είτε $f(x)=x$ είτε $f(y)=y$

Προφανώς σε κάθε περίπτωση η f είναι κυρτή, άρα το σύνολο αδιαφορίας κυρτό, όπως και το σύνολο των προτιμώμενων στοιχείων του x και του y αντίστοιχα κυρτό, συνεπώς $\succsim$ κυρτή.

iii) $u(x,y)=\max\{x,y\}$



Έστω C καμπύλη αδιαφορίας που ορίζεται από τη p-ισοσταθμική της u με $p\geq 0$.

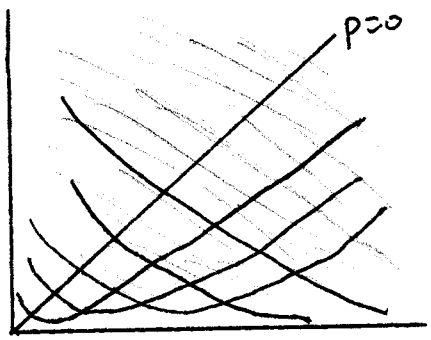
$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \mid u(x,y)=p \Leftrightarrow \max\{x,y\}=p\}$$

a) Αν $\max\{x,y\}=x \Rightarrow x=p,\ y\leq p$

b) Αν $\max\{x,y\}=y \Rightarrow y=p,\ x\leq p$

Και αν είτε $f(x)=x$ είτε $f(y)=y$ άρα το σύνολο $P_{\succsim}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \mid \max\{x,y\}\geq x \text{ ή } \max\{x,y\}\geq y\}$ $=epi(f)$ κυρτό, οπότε $\succsim$ κυρτή.

iv) $u(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$



Έστω C καμπύλη αδιαφορίας που ορίζεται από τη p-ισοσταθμική της u με $p\geq 0$.

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \mid u(x,y)=p \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=p \Rightarrow y=(p-\sqrt{x})^2\}$$

Η $f(x)=y$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Για να δείξουμε ότι είναι κυρτή ακολουθούμε την εξής διαδικασία

Θα δείξουμε ότι $\forall (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2_+$ το σύνολο

$$P_{\succsim}(x_0,y_0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \mid (x,y)\succsim(x_0,y_0) \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}\geq\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}\}$$ είναι κυρτό.

a) Αν $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}=0 \Rightarrow P_{\succsim}(x_0,y_0)=\mathbb{R}^2_+$ κυρτό

b) Αν $x_0,y_0>0 \Rightarrow P_{\succsim}(x_0,y_0)=epi(f)=\{(x,y) \mid y\geq[\sqrt{x}+(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})]^2\}$

6/2/2021

Έστω $f(x)=\left[\sqrt{x}+(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})\right]^2$, $x>0$

Αρκεί ν.δ.ο. f κυρτή

$f'(x)=2(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})\frac{1}{2\sqrt{x}}=1+\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}}{\sqrt{x}}$

$f''(x)=-\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}}{\sqrt{x^3}}<0$ άρα δεν είναι κυρτή οπότε δεν είναι κυρτή, είναι όμως συνεχής και γνήσιας, επειδή η u είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών και γνήσιας αυξουσών, επειδή αν $(x,y)\geq(x',y')\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq\sqrt{x'}+\sqrt{y'}\Rightarrow u(x,y)\geq u(x',y')$.

Άσκηση 0.0.4.

Η λεξικογραφική διάταξη του $\mathbb{R}^3_+$ είναι η ακόλουθη:

$(x_1,x_2,x_3)\precsim(y_1,y_2,y_3)$ αν και μόνον αν $x_1>y_1$ ή $x_1=y_1$ και $x_2\geq y_2$ ή $x_1=y_1$, $x_2=y_2$ και $x_3\geq y_3$.

Τώρα, θα δείξουμε ότι δεν είναι κάτω ημισυνεχής.

Αν $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3_+$ με $x_1,x_2,x_3>0$ το σύνολο $P_{\precsim}(x_1,x_2,x_3)=\{(y_1,y_2,y_3)\mid(y_1,y_2,y_3)\precsim(x_1,x_2,x_3)\}$ δεν είναι κλειστό γιατί $\forall n\in\mathbb{N}$ έχουμε $(x_1-\frac{1}{n},x_2+\sqrt[n]{n},0)\precsim(x_1,x_2,x_3)$ και επίσης $(x_1-\frac{1}{n},x_2+\sqrt[n]{n},0)\longrightarrow(x_1,x_2+1,0)$ για το οποίο όμως ισχύει $(x_1,x_2,x_3)\prec(x_1,x_2+1,0)$. Άρα η λεξικογραφική σχέση προτίμησης δεν είναι κάτω ημισυνεχής.

Θα δείξουμε με τη μέθοδο της αναγωγής σε άτοπο ότι η λεξ. σχέση προτίμησης δεν αναπαριστάται από συνάρτηση χρησιμότητας. Έστω $u:\mathbb{R}^3_+\to\mathbb{R}$, η οποία την αναπαριστά.

Τότε $\forall x,y\in\mathbb{R}$ έχω $(x,y,2)\succsim(x,y,1)$, οπότε $u(x,y,2)>u(x,y,1)$.

Συνεπώς $\forall x,y\ \exists r(x,y)\in\mathbb{Q}$ τ.ω. $u(x,y,2)>r(x,y)>u(x,y,1)$

Αν υποθέσουμε ότι $x,x'\in\mathbb{R}$ και $x\neq x'$, π.χ. αν $x>x'$

$u(x,y,2)>r(x,y)>u(x,y,1)>u(x',y,2)>r(x',y)>u(x',y,1)$

6/2/2011

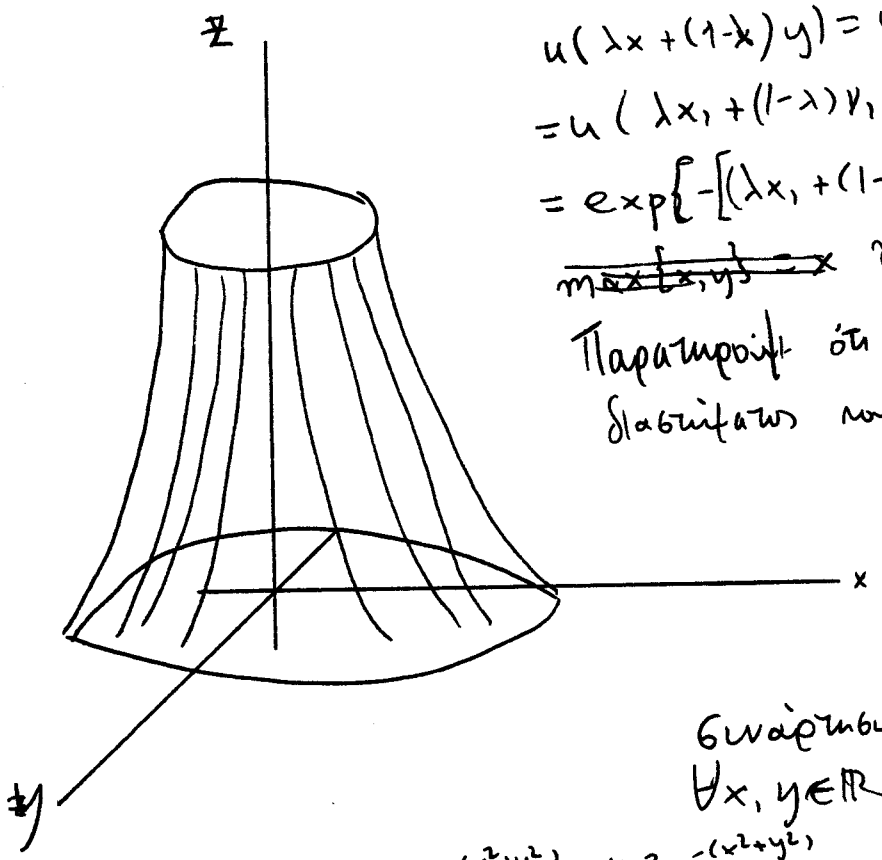
Επιλέγω $r(x,y) > r(x',y)$.

Αντίστοιχα αν $x' > x \Rightarrow r(x',y) > r(x',y)$, συνεπώς η $r(x,y)$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

Οπότε καταλήξαμε στο συμπέρασμα πως υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου $\mathbb{R}^2$ στο Q, άρα $\mathbb{R}^2$ αριθμήσιμο. ΑΤΟΠΟ!

Άρα, δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση χρησιμότητας που να αναπαριστά τη λεξικογραφική σχέση προτίμησης.

Άσκηση 0.0.5.



Έστω $x \succ y$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$u(\lambda x + (1-\lambda) y) = u(\lambda(x_1, x_2) + (1-\lambda)(y_1, y_2)) =$$
$$= u(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2) =$$
$$= \exp\{-[(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1)^2 + (\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2)^2]\}$$
$$\cancel{\max\{x,y\} = x} \quad \min\{u(x), u(y)\} = u(x) = e^{-(x_1^2 + y_1^2)}$$

Παρατηρούμε ότι για το sup και το inf του διαστήματος που "κινείται" το λ, του $(0,1)$ η ανισότητα

$$u(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \min\{u(x), u(y)\} = u(x)$$

ισχύει πάντα, συνεπώς η συνάρτηση $u(x,y)$ είναι σχεδόν κοίλη $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +2e^{-(x^2+y^2)} - 4x^2 e^{-(x^2+y^2)} & -4xy e^{-(x^2+y^2)} \\ -4xy\, e^{-(x^2+y^2)} & +2e^{-(x^2+y^2)} - 4y^2 e^{-(x^2+y^2)} \end{vmatrix} =$$

$$= 4e^{-2(x^2+y^2)} - 8e^{-2(x^2+y^2)}(y^2+x^2) \cancel{= 4e^{-2(x^2+y^2)}(1} < 0$$

άρα η u δεν είναι ~~κοίλη~~ κυρτή, οπότε η u δεν είναι κοίλη

Άσκηση 0.0.6.

Έστω ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι ~~κα~~ η ανάλογη:

$\bar{u}(x) = u(x) - u(0)$.

Είναι σαφές ότι ικανοποιεί τη ζητούμενη εξίσωση $\bar{u}(0) = 0$ καθώς έχουμε:

$\bar{u}(0) = u(0) - u(0) = 0$.

Θα δείξουμε ότι η $\bar{u}$ αναπαριστά την $\succsim$.

Γνωρίζουμε ότι η u αναπαριστά την $\succsim$, συνεπώς θα ισχύει ότι:

$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$. Επίσης απαιτούμε $\bar{u}(x) \geq \bar{u}(y) \Leftrightarrow x \succsim y$

Επειδή γνωρίζουμε ήδη ότι η u αναπαριστά την $\succsim$, αρκεί να δείξουμε ότι η $\bar{u}$ έχει την ίδια διάταξη με τη u.

$\bar{u}(x) \leq \bar{u}(y) \Leftrightarrow u(x) - u(0) \leq u(y) - u(0) \Rightarrow u(x) \leq u(y)$, εφόσον $u(0)$ σταθερά.

Και επειδή $u(x) \leq u(y) \overset{x \lesssim y}{\Leftrightarrow}$ τότε έχουμε ότι $\bar{u}(x) \leq \bar{u}(y) \Leftrightarrow x \lesssim y$

Τέλος, θα δείξουμε και την άλλη σχέση, ότι $\bar{u}(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$.

Από τον ορισμό της u και τη μονοτονία της $\succsim$, η οποία συνεπάγεται και τη μονοτονία της u, έχουμε ότι:

$u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$

Αντικαθιστώντας $y = 0$: $u(x) \geq u(0) \Leftrightarrow x \succsim 0$

$u(x) - u(0) \geq 0 \Leftrightarrow x \succsim 0$

$\bar{u}(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$ Ο.Ε.Δ.

(ΣΥΝΕΧΕΙΑ) Άσκηση 0.0.3.

ii) Έστω $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Rightarrow x_1 \leq x_2$ και $y_1 \leq y_2$ τότε θα έχουμε προφανώς ~~ότι~~ $\min\{(x_1, y_1)\} \leq \min\{(x_2, y_2)\} \Rightarrow u(x_1, y_1) \leq u(x_2, y_2)$ άρα η συνάρτηση, οπότε και $\succsim$ μονότονη. Εφόσον $\min\{x, y\} = x$ και $\min\{x, y\} = y$ συνεχείς τότε η συνεχής, οπότε και $\succsim$ συνεχής

iii) Ομοίως αν $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Rightarrow \max\{x_1, y_1\} \leq \max\{x_2, y_2\} \Rightarrow u(x_1, y_1) \leq u(x_2, y_2)$ άρα η μονότονη και συνεπώς $\succsim$ μονότονη. Επίσης επειδή $\max\{x, y\} = x$ και $\max\{x, y\} = y$ συνεχείς, τότε η συνεχής, άρα $\succsim$ συνεχής.