ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ / Κατεύθ. Μαθηματικού Εφαρμογών
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ
«ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»

ΑΘΗΝΑ 15/09/2010, ΩΡΑ: 12:00

Θέμα 1° :

(α) (Μον. 2) Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(x_1,x_2)=4,\quad 0<x_1<2,\quad 0<x_2<2,$$

$$u(0,x_2)=u(2,x_2)=u(x_1,0)=0,\ u(x_1,2)=2\sin\frac{3\pi x_1}{2}.$$

(β) (Μον. 0.5). Να δοθεί η μορφή της ημιγραμμικής εξίσωσης 2ης τάξης με $\underset{\sim}{x}\in\mathbb{R}^3$.

Θέμα 2° : (Μον. 1.5).

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $[0,3]$ με f,f' τμηματικά συνεχείς. Να γίνει κατάλληλη περιοδική της επέκταση έτσι ώστε να έχει ως ανάπτυγμα την συνημιτονική σειρά Fourier $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$ και να δοθεί η μορφή των συντελεστών a_n. Στη συνέχεια να δειχθεί ότι $\frac{2}{3}\int_0^3|f(x)|^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$.

Θέμα 3° : (Μον. 1).

Να προσδιοριστεί το A ώστε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών να είναι επιλύσιμο:

$$\Delta u(\rho,\varphi)=\rho\sin\varphi,\quad 1<\rho<10,\quad 0<\varphi\le 2\pi,$$

$$\left.\frac{\partial u(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=A,\ 0<\varphi\le 2\pi,\quad \left.\frac{\partial u(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right|_{\rho=10}=-1,\quad 0<\varphi\le 2\pi.$$

Δίνεται ο τελεστής Laplace σε πολικές συντεταγμένες:

$$\Delta u(\rho,\phi)=\frac{\partial^2u(\rho,\phi)}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u(\rho,\phi)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u(\rho,\phi)}{\partial\phi^2}.$$

Θέμα 4° : (2 μον.)

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$x^2y''(x)+xy'(x)+\lambda y(x)=0,\qquad 1<x<e^{\pi},\ y(1)=y(e^{\pi})=0.$$

(β) Είναι η εξίσωση σε μορφή Sturm-Liouville; Να δώσετε τη σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από αυτό το πρόβλημα.

(γ) Να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$x^2y''(x)+xy'(x)+3y(x)=1,\qquad 1<x<e^{\pi},\ y(1)=y(e^{\pi})=0.$$

(δ) Να αναπτύξετε σε γενικευμένη σειρά Fourier, ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις του (α), τη συνάρτηση $f(x)=1,\quad 1<x<e^{\pi}$.

Θέμα 5° : **(2 μον.)**

(α) (μ.1,5). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - \cos x, & 0 < x < 2\pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 1, \quad u_x(2\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 3 - \cos x, & 0 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Δώστε μία φυσική ερμηνεία αυτού του προβλήματος, αν $u = u(x,t)$ παριστάνει θερμοκρασία.

(β) (μ. 0,5). Να περιγράψετε τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = r(t), \quad u(L,t) = g(t), & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

Θέμα 6° : **(1 μον.)**

Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να λυθεί το πρόβλημα:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad -\infty < y < \infty,\ x > 0,$$

$$u(0,y) = f(y), \quad -\infty < y < \infty, \quad x > 0$$

$$u,\ u_y \to 0, \quad |y| \to \infty,\ x > 0, \quad (*),$$

$$u \quad \varphi\rho\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \quad x \to \infty.$$

(Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier).

Δίνονται (να κάνετε χρήση μόνο αυτών των τύπων και να δώσετε τη λύση υπό ολοκληρωτική μορφή: $u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (y-t)^2} f(t)dt$).

1. $F\{u(x,y)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{isy}\, dy = \hat{u}(x,s),$
2. $F^{-1}\{\hat{u}(x,s)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x,s)e^{-isy}\, ds = u(x,y),$
3. $F\{u_{yy}(x,y)\} = (-is)^2 \hat{u}(x,s),$ (για τη ισχύ της χρειάζεται και η (*)).
4. $F^{-1}\{e^{-|s|x}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2x}{x^2 + y^2},$
5. $F^{-1}\{\hat{f}(s)\hat{g}(s)\} = (f * g)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(y-t)dt.$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ	ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ