ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α Ι

20 Φεβρουαρίου 2010

Απαντήστε και στα τρία θέματα. Διάρκεια εξέτασης: **3 ώρες**.

ΘΕΜΑ 1ο

α) Έστω τα στοιχεία της ομάδας μεταθέσεων S_8:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 8 & 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε την σ^{-1} και την $\rho\sigma$. Αναλύστε την σ και την σ^{-1} σε γινόμενο ξένων κύκλων και σε γινόμενο αντιμεταθέσεων. Τι παρατηρείτε; Δώστε μία εμπεριστατωμένη απάντηση.

β) Δώστε ένα στοιχείο της S_8 τάξης 15. Δείξτε ότι δεν υπάρχει στοιχείο της S_8 τάξης 16.

γ) Δείξτε ότι για κάθε υποομάδα H της S_n, με $n \geq 2$, είτε όλες οι μεταθέσεις στην H είναι άρτιες είτε ακριβώς οι μισές από αυτές είναι άρτιες.

(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Εστω H υποομάδα μιας (πολλαπλασιαστικής) ομάδας G. Στην G ορίζουμε τη σχέση

$$x \sim y \iff x^{-1}y \in H.$$

α) Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Σε ποιά σημεία χρησιμοποιήσατε το ότι H υποομάδα της G;

β) Δείξτε ότι η κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου $g \in G$ είναι το αριστερό του σύμπλοκο gH.

γ) Δείξτε ότι για κάθε $g \in G$ υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση $\phi : H \longrightarrow gH$.

δ) Από τα παραπάνω συνάγετε και διατυπώστε το Θεώρημα Lagrange.

ε) Έστω G, G' ομάδες και έστω $f : G \longrightarrow G'$ ομομορφισμός. Δείξτε ότι τα στοιχεία ενός συμπλόκου $gKerf$ του πυρήνα $Kerf$ έχουν όλα την ίδια εικόνα.

στ) Υπάρχει μη τετριμμένος ομομορφισμός από την ομάδα $\mathbb{Z}_{10}$ στην ομάδα $\mathbb{Z}_9$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(3,5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

α) Για την ομάδα $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{18}$ δώστε μία ισομορφική της, η οποία να είναι σύμφωνη με το Θεώρημα Ταξινόμησης των Πεπερασμένα Παραγόμενων Αβελιανών Ομάδων.

β) Δώστε γεωμετρική ερμηνεία για την ομάδα-πηλίκο $\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}\times 4\mathbb{Z}}$, βρίσκοντας ελάχιστους θετικούς εκπροσώπους των συμπλόκων της.

γ) Δώστε γεωμετρική ερμηνεία για την υποομάδα $< 3 > \times < 2 >$ της ομάδας $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$.

δ) Δείξτε ότι κάθε στοιχείο μιας πεπερασμένης ομάδας υψούμενο στην τάξη της ομάδας δίνει το μοναδιαίο στοιχείο της.

ε) Διατυπώσατε το (Μικρό) Θεώρημα Fermat για $a \in \mathbb{Z}$ και p πρώτο αριθμό. Θεωρήστε στη συνέχεια την πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{Z}_p^* = \{\overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ και, χρησιμοποιώντας το δ), συνάγετε την απόδειξη του Θεωρήματος Fermat.

στ) Δείξτε ότι ο 7 δεν διαιρεί τον αριθμό 6^{32}.

(3,5 μονάδες)

Καλή επιτυχία! Σ. Λαμπροπούλου