1. Εκροή ραδιενεργής έκχυσης

Μια λίμνη 5.000.000 γαλονιών νερού τροφοδοτείται από έναν ποταμό. Έστω ότι το φρέσκο νερό εισρέει στη λίμνη με ρυθμό 1.000 γαλόνια/λεπτό και εκρέει με τον ίδιο ρυθμό. Μια συγκεκριμένη στιγμή, μια τυχαία έκχυση εισάγει 5 λίβρες διαλυτού ραδιενεργού ρύπου μέσα στη λίμνη. Έστω ότι η ραδιενεργή ουσία έχει χρόνο ημιζωής 2 μέρες και διαλύεται στο νερό της λίμνης δημιουργώντας ένα καλά-αναμεμειγμένο μείγμα.

1. Έστω $Q(t)$ η ποσότητα ραδιενεργού υλικού που υπάρχει στη λίμνη σε χρόνο t, μετρούμενη σε λεπτά από τη στιγμή της έκχυσης. Χρησιμοποιείστε την αρχή της διατήρησης [ο ρυθμός μεταβολής του $Q(t)$ ισούται με το ρυθμό εισροής μείον αυτόν της εκροής] για να εξαγάγετε μια διαφορική εξίσωση που να περιγράφει πώς το $Q(t)$ αλλάζει σε σχέση με το χρόνο. Λάβετε υπόψη ότι η διαλυόμενη ουσία απομακρύνεται τόσο από την εκροή του νερού όσο και από τη ραδιενεργό διάσπαση. Ορίστε την κατάλληλη αρχική συνθήκη έτσι ώστε να έχετε το πρόβλημα αρχικών συνθηκών που μας ενδιαφέρει.

2. Λύστε το παραπάνω πρόβλημα αρχικών συνθηκών.

3. Πόσο χρόνο θα πάρει η συγκέντρωση ραδιενεργού ρύπου ώστε να μειωθεί στο 0.01% από την αρχική τιμή της;

2. Επεξεργασία θαλασσινών

Πολλά τρόφιμα, όπως η καβουρόψιχα, αποστειρώνονται με το μαγείρεμα. Οι αλιευμένοι κάβουρες είναι φορτωμένοι με βακτήρια και η καβουρόψιχα πρέπει να αχνιστεί ώστε να μειωθεί ο πληθυσμός των βακτηρίων σε ένα ανεκτό επίπεδο. Όσο περισσότερο διαρκεί το άχνισμα της καβουρόψιχας, τόσο λιγότερα βακτήρια απομένουν. Αλλά το άχνισμα αφυδατώνει την ψίχα, μειώνοντας έτσι την ποσότητα καβουρόψιχας προς πώληση. Το υπερβολικό μαγείρεμα καταστρέφει κι αυτό τη γεύση και την υφή. Αυτός λοιπόν που επεξεργάζεται την καβουρόψιχα έρχεται αντιμέτωπος με ένα δίλημμα, όταν επιλέγει την κατάλληλη διάρκεια αχνίσματος.

Η βάση για μια επιλογή διάρκειας αχνίσματος είναι η ιδέα του «χρόνου ζωής»*. Αφού ολοκληρωθεί το άχνισμα, το προϊόν τοποθετείται μέσα σε ένα αποστειρωμένο πακέτο και καταψύχεται. Κατά την κατάψυξή του, η ποσότητα των βακτηριών μέσα στη ψίχα αυξάνεται σιγά-σιγά και τελικά φτάνει έναν αριθμό, όπου η καβουρόψιχα είναι πια ακατάλληλη για κατανάλωση. Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο η συσκευασμένη καβουρόψιχα είναι κατάλληλη για πώληση ονομάζεται χρόνος ζωής του προϊόντος. Μελετάμε το ακόλουθο πρόβλημα: Πόσο πρέπει να αχνίσουμε την καβουρόψιχα έτσι ώστε να επιτύχουμε έναν επιθυμητό χρόνος ζωής;

Το πρώτο βήμα της μοντελοποίησης του χρόνου ζωής είναι η επιλογή ενός μοντέλου που να περιγράφει τη δυναμική πληθυσμού των βακτηρίων. Χάριν απλότητας, έστω η (εξίσωση 1):

$$\frac{dP}{dt} = k(T)P$$

όπου το $P(t)$ υποδηλώνει τον πληθυσμό των βακτηρίων σε χρόνο t. Στην εξίσωση (1), το $k(T)$ αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ των ρυθμών γεννήσεων και θανάτων ανά μονάδα πληθυσμού ανά μονάδα χρόνου. Σε αυτό το μοντέλο, το k δεν είναι σταθερό. Είναι συνάρτηση ως προς T, όπου T η θερμοκρασία της καβουρόψιχας. [Προσέξτε ότι το $k(T)$ είναι, πάνω από όλα, μια συνάρτηση ως προς το χρόνο, δεδομένου ότι η θερμοκρασία T της καβουρόψιχας διαφοροποιείται με το χρόνο μέσα στη συσκευή αχνίσματος και μέσα στη θήκη της κατάψυξης.]

Οφείλουμε να επιλέξουμε ένα εύλογο μοντέλο για το ρυθμό αύξησης των βακτηρίων, $k(T)$. Αυτό το κάνουμε με την ακόλουθη λογική. Σε χαμηλές θερμοκρασίες (λίγο πριν παγώσουν τα βακτήρια), ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού των βακτηρίων είναι αργός. Γι' αυτόν τον λόγο καταψύχουμε τα τρόφιμα. Μαθηματικά, το $k(T)$ είναι μια σχετικά μικρή θετική ποσότητα σε αυτές τις θερμοκρασίες. Καθώς η θερμοκρασία αυξάνει, ο ρυθμός αύξησης των βακτηρίων, $k(T)$, αρχικά αυξάνει, με το γρηγορότερο ρυθμό αύξησης να παρατηρείται κοντά στους 90°F. Πέραν αυτής της θερμοκρασίας, ο ρυθμός αύξησης αρχίζει να μειώνεται. Πέραν των 145°F περίπου, ο ρυθμός θανάτου υπερβαίνει το ρυθμό γεννήσεων και ο

πληθυσμός των βακτηρίων αρχίζει να φθίνει. Ένα απλό μοντέλο που συλλαμβάνει αυτήν την ποιοτική συμπεριφορά είναι η δευτεροβάθμια συνάρτηση (εξίσωση 2):

$$k(T) = k_0 + k_1(T - 34)(140 - T)$$

όπου k_0 και k_1 θετικές σταθερές που συνήθως καθορίζονται πειραματικά.

Επίσης χρειαζόμαστε ένα μοντέλο που να περιγράφει τη θερμική συμπεριφορά της καβουρόψιχας: πώς η θερμοκρασία της καβουρόψιχας T διαφοροποιείται αναφορικά με τη θερμοκρασία του περιβάλλοντα χώρου. Από το νόμο του Νεύτωνα περί ψύξης, έχουμε (εξίσωση 3):

$$\frac{dT}{dt} = \eta[S(t) - T]$$

Στην εξίσωση (3), το η είναι μια θετική σταθερά και το $S(t)$ είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντα χώρου. Προσέξτε ότι η θερμοκρασία αυτή δεν είναι σταθερή, αφού η καβουρόψιχα αρχικά βρίσκεται στη συσκευή αχνίσματος και μετά στη θήκη της κατάψυξης.

Τώρα εφαρμόζουμε το μοντέλο σε ένα συγκεκριμένο σύνολο συνθηκών. Έστω τα ακόλουθα:

i. Αρχικά, η καβουρόψιχα είναι σε θερμοκρασία δωματίου (75°F) και περιέχει περίπου 10^7 βακτήρια ανά κυβικό εκατοστό.
ii. Το ατμόλουτρο διατηρείται σε μια σταθερή θερμοκρασία 250°F (ισοδυναμεί με 121,1°C).
iii. Όταν η καβουρόψιχα τοποθετείται στο ατμόλουτρο, παρατηρείται ότι η θερμοκρασία αυξάνει από 75°F σε 200°F μέσα σε 5 λεπτά.
iv. Όταν η καβουρόψιχα φυλάσσεται σε μια σταθερή θερμοκρασία 34 °F (ισοδυναμεί με 1,1°C), ο αριθμός των βακτηρίων μέσα στην καβουρόψιχα διπλασιάζεται σε 60 ώρες.
v. Ο αριθμός των βακτηρίων μέσα στην καβουρόψιχα ξεκινά να φθίνει μόλις η θερμοκρασία ξεπεράσει τους 145°F, δηλαδή [από εξίσωση (2)], $k(145) = 0$.
vi. Ένας αριθμός 10^5 βακτηρίων ανά κυβικό εκατοστό κρίνει το χρόνο ζωής. Μόλις αυτός ο αριθμός των βακτηρίων επιτευχθεί, η καβουρόψιχα δεν μπορεί να πωληθεί πια.

Προσδιορίστε πόσο καιρό πρέπει να αχνιστεί η καβουρόψιχα έτσι ώστε να επιτευχθεί ένας χρόνος ζωής 16 ημερών. Υποθέστε ότι η καβουρόψιχα πάει απευθείας από το ατμόλουτρο των 250°F στην θήκη της κατάψυξης των 34°F. Υποθέστε ότι η απαίτηση του 16ήμερου χρόνου ζωής περιλαμβάνει το χρόνο μεταφοράς στο σημείο πώλησης, δηλαδή υποθέστε ότι η μέτρηση του χρόνου ζωής ξεκινά από τη στιγμή κατά την οποία η καβουρόψιχα αφαιρείται από το ατμόλουτρο.

---

[*] χρόνος ζωής: ορίζεται ως η χρονική περίοδος κατά την οποία μια χημική ουσία ή ένα τρόφιμο μπορεί να διατηρήσει αναλλοίωτες τις ιδιότητές του.
Βλ. Λεξικό Τεχνολογίας & Επιστημών, Εκδόσεις Σταφυλίδη