Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
19 Οκτωβρίου 2007

Να απαντηθούν όλα τα θέματα.
Καλή επιτυχία.

Θέμα 1°

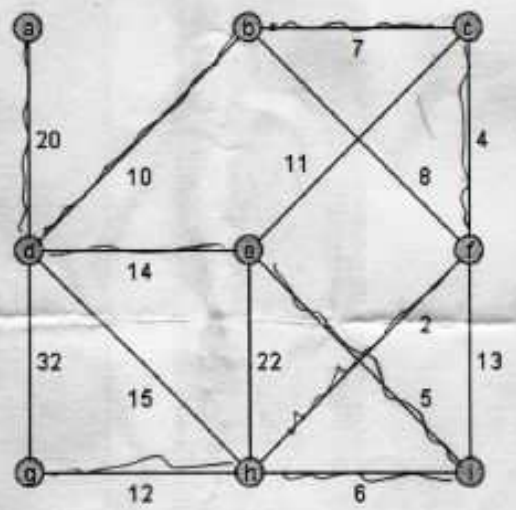
Δίδεται μια ακολουθία n αριθμών $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε σε χρόνο O(log n) τη θέση ενός τοπικού ελάχιστου. Υπενθυμίζεται ότι το στοιχείο x_j είναι ένα τοπικό ελάχιστο εάν $x_{j-1} >= x_j <= x_{j+1}$. Υποθέτουμε ότι $x_0 = x_{n+1} = +\infty$. Να περιγράφει ενας αλγόριθμος που υπολογίζει τη θέση ενός τοπικού ελάχιστου σε χρόνο O(log n) και να αποδειχθεί η ορθότητα του.

Θέμα 2°

Να δειχθεί ότι κάθε αλγόριθμος ταξινόμησης που βασίζεται σε συγκρίσεις απαιτεί Ω(nlogn) συγκρίσεις, όπου n είναι το πλήθος των στοιχείων που ταξινομούνται.

Θέμα 3°

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Kruskal, να υπολογίσετε ένα ελάχιστο διασυνδετικό δένδρο (minimum spanning tree) για το παρακάτω γράφημα:



Θέμα 4°

Να σχεδιαστεί αλγόριθμος ο οποίος υπολογίζει τον αριθμό των συνδεδεμένων συστατικών ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος και καταχωρεί σε κάθε κόμβο τον αύξοντα αριθμό του συνδεδεμένου συστατικού. Να αναλυθεί η χρονική πολυπλοκότητα του αλγόριθμου σας.

Θέμα 5°

Με δεδομένο ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G=(V,E), το πρόβλημα του «χρωματισμού κόμβων» επισυνάπτει σε κάθε κόμβο του γραφήματος ένα χρώμα έτσι ώστε:

i. γειτονικοί κόμβοι έχουν διαφορετικό χρώμα, και
ii. χρησιμοποιείται ο ελάχιστος δυνατός αριθμός χρωμάτων.

Υποθέστε ότι γνωρίζουμε έναν αλγόριθμο που λύνει το πρόβλημα του χρωματισμού ενός γραφήματος. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο αυτό, να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα.

Ένα πανεπιστήμιο προσφέρει ένα σύνολο $C=\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ από μαθήματα στους φοιτητές του. Κάθε μάθημα διδάσκεται καθημερινά και έστω ότι το μάθημα c_i διδάσκεται κατά το χρονικό διάστημα T_i (πχ. T_i=(3μμ-5μμ)). Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός αιθουσών που απαιτούνται για την διδασκαλία όλων των μαθημάτων έτσι ώστε να μην υπάρχουν ποτέ 2 μαθήματα που χρησιμοποιούν την ίδια αίθουσα ταυτόχρονα.