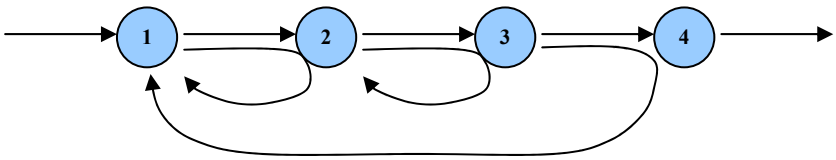
Μάθημα: ΔΙΚΤΥΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
7ου εξαμήνου ΣΕΜΦΕ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ - ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΔΙΚΤΥΩΝ

Ασκήσεις

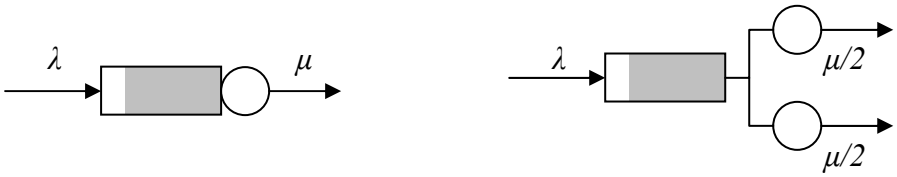
1. Αποστέλλονται πακέτα σταθερού μήκους 1250 bytes από τον κόμβο #1 στον κόμβο #4 μέσω των κόμβων #2 και #3 σε σειρά, όπως φαίνεται στο σχήμα, με τη μέθοδο store-and-forward. Οι ταχύτητες εκπομπής των συνδέσμων 1→2, 2→3, 3→4 είναι 32 Kbps, 64 Kbps και 32 Kbps, με πιθανότητα αποτυχημένης εκπομπής 10^{-2}, 10^{-1} και 10^{-2}, αντίστοιχα. Σε περίπτωση αποτυχημένης εκπομπής, οι κόμβοι #2 και #3 ζητούν επανεκπομπή πακέτου από τον αμέσως προηγούμενό τους κόμβο, ενώ ο τελικός κόμβος #4 από τον αρχικό. Αν ο μέσος χρόνος ελέγχου και (αρνητικής) επιβεβαίωσης λήψης είναι 10 ms ανά σύνδεσμο και με την υπόθεση μηδενικού χρόνου αναμονής στους κόμβους, να βρεθεί ο μέσος χρόνος αποστολής πακέτων από τον κόμβο #1 στον #4.



2. Αν X_1 και X_2 είναι δύο ανεξάρτητες και εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίτοιχα, να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $\min\{X_1, X_2\}$ είναι επίσης εκθετικά κατανεμημένη με ρυθμό $\lambda_1+\lambda_2$. Να δειχθεί επίσης ότι $\Pr\{X_1 \le X_2\} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

3. Για ένα απλό σύστημα αναμετάδοσης πακέτων, με αφίξεις Poisson, εκθετικά κατανεμημένο μήκος πακέτων μέσης τιμής 500 bytes, απεριόριστο χώρο αναμονής (*M/M/1)* και ταχύτητα γραμμής μετάδοσης 9600 bps, να βρεθούν τα μεγέθη: (α) πιθανότητα η γραμμή να είναι αδρανής (β) μέσος αριθμός πακέτων που βρίσκονται σε αναμονή (γ) πιθανότητα να βρίσκονται σε αναμονή περισσότερα από 3 πακέτα (μη συμπεριλαμβανομένου αυτού που μεταδίδεται) για τις εξής περιπτώσεις μέσων χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (σε sec): 2.083, 1.042, 0.694, 0.52.

4. Να συγκριθούν τα παρακάτω συστήματα εξυπηρέτησης ως προς το μήκος ουράς και το μέσο χρόνο διέλευσης. Και στα δύο συστήματα οι αφίξεις ακολουθούν την κατανομή Poisson με ρυθμό λ=3 sec^{-1}, ο δε συνολικό ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ=4 sec^{-1}.



(α) (β)

5. Με χρήση γενικών σχέσεων της θεωρίας πιθανοτήτων, να δειχθεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) του χρόνου εξυπηρέτησης σε σύστημα ***m*** παράλληλων, ανεξάρτητων και τυχαία επιλεγόμενων (από τους εισερχόμενους πελάτες) κλάδων ισούται με

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i f_i(t), \qquad (1.1)$$

όπου $\boldsymbol{p_i}$ η πιθανότητα επιλογής του κλάδου ***i*** και $\boldsymbol{f_i(t)}$ η pdf του αντίστοιχου χρόνου εξυπηρέτησης, ***i***=1,2,…m.
Με βάση αυτή τη σχέση, να υπολογιστεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του χρόνου εξυπηρέτησης σε σύστημα αυτού του τύπου, τριών κλάδων, με εκθετικά κατανεμημένους χρόνους εξυπηρέτησης μέσης τιμής 1,2 και 3 sec, και πιθανότητες επιλογής των κλάδων 0.5, 0.3 και 0.2, αντίστοιχα.

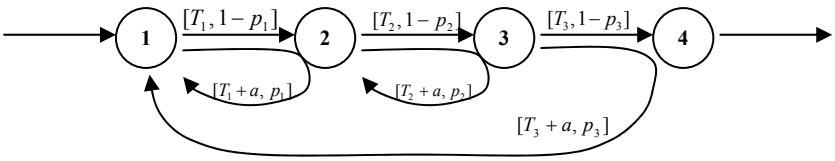
6. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση του χρόνου εξυπηρέτησης σε σύστημα που απαρτίζεται από τρία όμοια εκθετικά στάδια σε σειρά, η δε μέση τιμή του συνολικού χρόνου εξυπηρέτησης είναι ίση με αυτήν του συστήματος παράλληλων κλάδων της άσκησης 4. Να συγκριθούν οι τυπικές αποκλίσεις των δύο περιπτώσεων.

7. Θεωρείστε αναμονητικό σύστημα με αφίξεις Poisson, απεριόριστο χώρο αναμονής και εξυπηρετητή (α) όπως της άσκησης 4, (β) όπως της άσκησης 5. Να βρεθεί για τις δύο περιπτώσεις ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα, καθώς και ο μέσος χρόνος διέλευσης δια του συστήματος, όταν ο ρυθμός αφίξεων είναι 70% του ρυθμού εξυπηρέτησης. Να σημειωθεί ότι τα στάδια (παράλληλα ή εν σειρά) του εξυπηρετητή δεν πρέπει να εκληφθούν ως διακριτοί εξυπηρετητές που μπορούν να εξυπηρετούν ταυτόχρονα περισσότερους του ενός (αντίθετα, μόνον ένας πελάτης βρίσκεται πάντα στον εξυπηρετητή, ανεξαρτήτως σταδίου).

8. Σε ένα απλό αναμονητικό σύστημα έχουμε αφίξεις Poisson με ρυθμό λ, ο δε χρόνος εξυπηρέτησης είναι ίσος με $d+\tau$, όπου τ εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή μέσης τιμής $\bar{\tau} = 1/\mu$ και $d = a\bar{\tau} > 0$ σταθερά. Να υπολογιστεί η μέση τιμή του αριθμού πελατών στο σύστημα, καθώς και ο μέσος χρόνος διέλευσης δια του συστήματος, συναρτήσει των λ, μ, α.

Λύσεις

1.



Από το παραπάνω διάγραμμα καταστάσεων, με τους χρόνους και τις πιθανότητες μετάβασης σημειωμένους στα αντίστοιχα βέλη, καταστρώνουμε τις εξισώσεις για τους μέσους χρόνους:

$$\overline{T}_{14} = p_1[T_1 + a + \overline{T}_{14}] + (1-p_1)[T_1 + \overline{T}_{24}]$$
$$\overline{T}_{24} = p_2[T_2 + a + \overline{T}_{24}] + (1-p_2)[T_2 + \overline{T}_{34}]$$
$$\overline{T}_{34} = p_3[T_3 + 3a + \overline{T}_{14}] + (1-p_3)T_3$$

τις οποίες μπορούμε να λύσουμε ως προς τους αγνώστους, μεταξύ των οποίων και ο ζητούμενος χρόνος $\overline{T}_{14}$.

2. Αν $Y=min\{X_1, X_2\}$, τότε:

$$\Pr\{Y > y\} = \Pr\{X_1 > y \text{ and } X_2 > y\} = \Pr\{X_1 > y\}\Pr(X_2 > y\}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της ανεξαρτησίας των X_1 και X_2. Αντικαθιστώντας τις πιθανότητες που υπεισέρχονται στην παραπάνω σχέση με τις εκθετικές συναρτήσεις των αντίστοιχων CPDF που εκφράζουν, παίρνουμε:

$$\Pr\{Y > y\} = e^{-\lambda_1 y} e^{-\lambda_2 y} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y},$$

απ' όπου συνάγεται το ζητούμενο.

Επίσης είναι:

$$\Pr\{X_1 < X_2\} = \int_0^\infty \Pr\{X_1 \in (z, z+dz)\}\Pr\{X_2 > z | X_1 \in (z, z+dz)\} = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} e^{-\lambda_2 z} dz = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

3. Για το εν λόγω *M/M/*1 σύστημα είναι:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\{1/2.083, 1/1.042, 1/0.694, 1/0.52\}\ packets_per_\sec}{9600 bits_per_\sec / 8x500 bits_per_packet} = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$$

$\Pr\{n$ πακέτα στο σύστημα$\}$: $p_n = (1-\rho)\rho^n$

$\Pr\{$γραμμή αδρανής$\}$ = $p_0 = 1-\rho$

Μέσος αριθ. πακέτων σε αναμονή: $\overline{N}_{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n = \overline{N} - (1-p_0) = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$

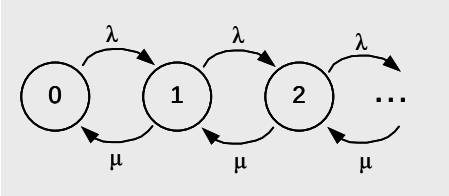
{πακέτα στο σύστημα} = n = {πακέτα σε αναμονή}+1, n>0

$\Pr\{n > 4\} = \sum_{n=5}^{\infty} p_n = (1-\rho)\rho^5(1+\rho+\rho^2+\cdots) = \rho^5$

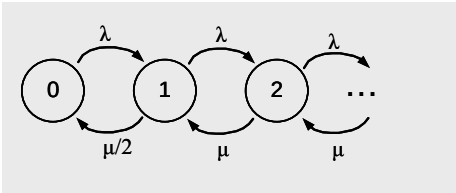
ένταση κίνησης	πιθανότητα γραμμή αδρανής	μέσος αριθμός πακέτων σε αναμονή	πιθανότητα πακέτα σε αναμονή >3
$\boldsymbol{\rho}$	**1-$\boldsymbol{\rho}$**	$\boldsymbol{\rho^2/(1-\rho)}$	$\boldsymbol{\rho^5}$
0.2	0.8	0.050	0.0003
0.4	0.6	0.266	0.010
0.6	0.4	0.900	0.078
0.8	0.2	3.200	0.328

4. (α) $p_{n,a} = (1-\rho)\rho^n$, $\overline{N}_a = E\{n\} = \dfrac{\rho}{1-\rho}$, $T_a = \overline{N}_a / \lambda = \dfrac{1/\mu}{1-\rho}$

ρ=3/4=0.75 ➔ $\overline{N}_a = 3$, $T_a = 1\,\text{sec}$



(β) $p_{n,b} = \begin{cases} 2p_0\rho^n, & n > 0 \\ p_0, & n = 0 \end{cases} \Rightarrow p_{0,b} = \dfrac{1-\rho}{1+\rho}$, $p_{n,b} = \dfrac{2(1-\rho)}{1+\rho}\rho^n$, $n \ge 1$



Ισχύουν προφανώς οι σχέσεις:

$$p_{0,a} = (1-\rho) > \frac{1-\rho}{1+\rho} = p_{0,b},$$

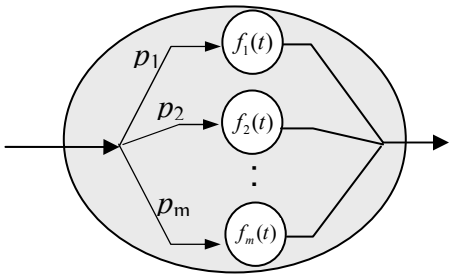
$$p_{n,a} = (1-\rho)\rho^n < \frac{2}{1+\rho}(1-\rho)\rho^n = p_{n,b},\ n \ge 1$$

$$\overline{N}_b \equiv E\{n\} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \frac{2}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \frac{2}{1+\rho}\overline{N}_a \quad > \overline{N}_a$$

$$T_b \underset{(Little)}{=} \overline{N}_b / \lambda = \frac{2}{1+\rho}\overline{N}_a / \lambda = \frac{2}{1+\rho}T_a \quad > T_a$$

Π.χ., για τη δοσμένη κίνηση είναι
ρ=3/4=0.75 ➔ $\overline{N}_b = 3.43$, $T_b = \overline{N}_b / \lambda = 1.14\,\text{sec}$

5. Στο διπλανό σχήμα δείχνεται σχηματικά εξυπηρετητής m παράλληλων κλάδων, με τις αντίστοιχες πιθανότητες επιλογής, p_i, και τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας χρόνων εξυπηρέτησης των κλάδων, $f_i(t),\ i = 1,2,...m$.



Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου εξυπηρέτησης του εξυπηρετητή αυτού είναι

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr\{T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi} \in (t, t+\Delta t)\}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i \Pr\{T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi} \in (t, t+\Delta t)|_i\}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i f_i(t)\Delta t}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{m} p_i f_i(t)$$

και η ροπογεννήτρια συνάρτηση (μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$):

$$F(s) \equiv \mathrm{E}\{e^{-sT}\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \sum_{i=1}^{m} p_i \int_0^\infty e^{-st} f_i(t)dt = \sum_{i=1}^{m} p_i F_i(s).$$

Για εκθετικές κατανομές $f_i(t)$ είναι: $F_i(s) = \dfrac{\mu_i}{\mu_i + s}$, οπότε

$$F(s) = \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\mu_i}{\mu_i + s} \quad \text{και} \quad F'(s) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\mu_i}{(\mu_i + s)^2}, \quad F''(s) = \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{2\mu_i}{(\mu_i + s)^3}$$

Οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης, λοιπόν, είναι:

$$m_1 \equiv \mathrm{E}\{T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi}\} = (-1)F'(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\mu_i}, \qquad m_2 \equiv \mathrm{E}\{T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi}^2\} = (-1)^2 F''(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{2p_i}{\mu_i^2}$$

η δε μεταβλητότητα (τετράγωνο τυπικής απόκλισης) ξέρουμε ότι δίνεται από τη σχέση

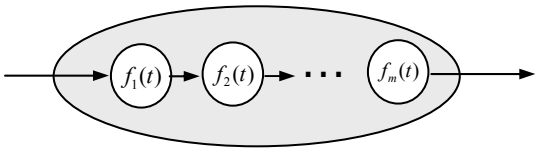
$$\sigma^2 \equiv \mathrm{E}\{\left[T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi} - \mathrm{E}\{t\}\right]^2\} = m_2 - m_1^2.$$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις στα δεδομένα της άσκησης για το σύστημα τριών κλάδων, παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l} p_i = \{0.5,\ 0.3,\ 0.2\} \\ \mu_i = \{1,\ 0.5,\ 0.33\}\,\mathrm{sec}^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m_1 = 1.7\,\mathrm{sec},\ \ m_2 = 7\,\mathrm{sec}^2 \\ \sigma = \sqrt{7 - 1.7^2} \approx 2.03 \end{array}$$

Για το συντελεστή μεταβλητότητας του χρόνου εξυπηρέτησης παρατηρούμε ότι $\mathrm{CoV}(T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi}) \equiv \dfrac{\sigma^2}{m_1^2} > 1$. Πρόκειται λοιπόν για μια **υπερ-εκθετική κατανομή.**

6. Στο διπλανό σχήμα δείχνεται σχηματικά σύστημα εξυπηρέτησης m κλάδων (σταδίων) σε σειρά. Εδώ, ο συνολικός χρόνος εξυπηρέτησης είναι το άθροισμα των χρόνων στα επιμέρους στάδια. Με την υπόθεση της ανεξαρτησίας των σταδίων, είναι:



$$T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi} = T_1 + T_2 + ...T_m \;\Rightarrow\; F(s) \equiv \mathrm{E}\{e^{-sT}\} = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{E}\{e^{-sT_i}\} = \prod_{i=1}^{m} F_i(s)\,.$$

Έστω ότι για όλα τα στάδια ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένος, με την ίδια μέση τιμή, 1/μ, δηλαδή $F_i(s) = \dfrac{\mu}{\mu + s}, \quad \forall i$.

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση του συνολικού χρόνου εξυπηρέτησης είναι

$$F(s) = \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^m, \quad F'(s) = -\frac{m}{\mu}\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{m+1}, \quad F''(s) = \frac{m(m+1)}{\mu^2}\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{m+2}$$

που για τις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης δίνει:

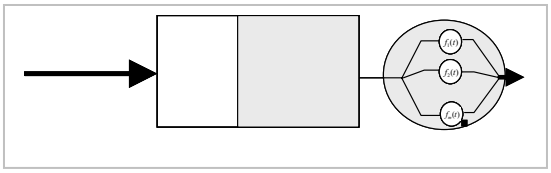
$$m_1 \equiv \mathrm{E}\{T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi}\} = (-1)F'(0) = \frac{m}{\mu}, \qquad m_2 \equiv \mathrm{E}\{T^2_{\varepsilon\xi\upsilon\pi}\} = (-1)^2 F''(0) = \frac{m(m+1)}{\mu^2} = \frac{m+1}{m} m_1^2$$

Οπότε: $\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = m_1^2\left(\dfrac{m+1}{m} - 1\right) = \dfrac{m_1^2}{m}$

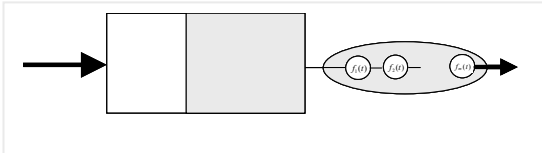
$$\mathrm{CoV}(T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi}) \equiv \frac{\sigma^2}{m_1^2} = \frac{1}{m} < 1$$

Εδώ λοιπόν έχουμε **υπο-εκθετική κατανομή** του χρόνου εξυπηρέτησης.

7.



(α)



(β)

Οι αφίξεις είναι Poisson, όμως οι χρόνοι εξυπηρέτησης δεν είναι εκθετικά κατανεμημένοι. Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση που δίνει το μέσο αριθμό πελατών σε σύστημα *M/G/1,* και, στη συνέχεια, τον τύπο του Little για να υπολογίσουμε το μέσο χρόνο διέλευσης:

$$\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho}[1-\frac{\rho}{2}(1-\mathrm{CoV}(T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi}))], \qquad \overline{T} \underset{(Little)}{=} \frac{\overline{N}}{\lambda}$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος, είναι $\rho \equiv \frac{\lambda}{\mu} = 0.7$ και για τα δύο συστήματα.

Κάνοντας χρήση των τιμών CoV($T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi}$) που βρήκαμε για τους αντίστοιχους εξυπηρετητές στην προηγούμενη άσκηση, παίρνουμε:

(α) $\overline{N} = 4.87, \quad \overline{T} = 12.2$ sec

(β) $\overline{N} = 1.8, \quad \overline{T} = 4.5$ sec

8. Πρόκειται και εδώ για σύστημα *M/G/1*. Η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης $T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi}=d+\tau$ είναι μια μετατοπισμένη εκθετική της οποίας οι ροπές 1ης και 2ης τάξης είναι:

$$m_1 = d + \frac{1}{\mu}, \qquad m_2 = \mathrm{E}\{(d+\tau)^2\} = d^2 + 2d\,\mathrm{E}\{\tau\} + \mathrm{E}\{\tau^2\} = d^2 + 2d\frac{1}{\mu} + \frac{2}{\mu^2},$$

όπου, για την τελευταία ισότητα, ελήφθη υπ'όψη ότι $\mathrm{E}\{\tau^2\} = \frac{2}{\mu^2}$ (το *τ είναι* εκθετικά κατανεμημένο, μέσης τιμής $1/\mu$).

Γράφοντας τη μεταβλητότητα του χρόνου εξυπηρέτησης στη μορφή $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$ και αντικαθιστώντας τα m_1 και m_2 με τα ίσα τους από τις παραπάνω σχέσεις, βρίσκουμε ότι

$\sigma^2 = \frac{1}{\mu^2}$ (όπως ακριβώς και της εκθετικά κατανεμημένης μεταβλητής τ),

οπότε $\mathrm{CoV}(T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi}) \equiv \frac{\sigma^2}{m_1^2} = \frac{1/\mu^2}{(\alpha+1)^2/\mu^2} = \frac{1}{(\alpha+1)^2} < 1$ (υπο-εκθετική κατανομή).

Συνεπώς

$$\overline{N} \underset{(M/G/1)}{=} \frac{\rho}{1-\rho}[1-\frac{\rho}{2}(1-\mathrm{CoV}(T_{\varepsilon\xi\upsilon\pi}))] = \frac{\rho}{\rho+1}[1-\frac{\rho}{2}(1-\frac{1}{(\alpha+1)^2})], \qquad T \underset{(Little)}{=} \frac{\overline{N}}{\lambda},$$

όπου $\rho = \frac{\lambda}{1/m_1} = \frac{\lambda}{\mu}(\alpha+1)$.----------