ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΠΤΙΚΗΣ

6ο Εξάμηνο ΤΕΜΦΕ

3ο φυλλάδιο
Άνοιξη 2002

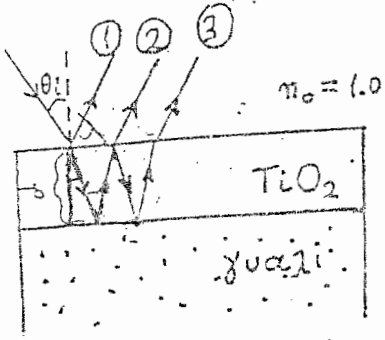
1. Μια επίπεδη δέσμη σύμφωνου φωτός από ένα laser Ar^+ μήκους κύματος $\lambda_0 = 488$ nm προσπίπτει σε μια ασυνέχεια που περιέχει δύο μικροσκοπικές οπές σε απόσταση d = 0.2 mm μεταξύ τους. Οι οπές λειτουργούν ως δευτερογενείς σημειακές πηγές φωτεινών κυμάτων. Σε μια οθόνη σε απόσταση r = 2 m παρατηρούμε την εικόνα συμβολής. (α) Σε πόση απόσταση (σε rads και mm) από τον κεντρικό άξονα (κέντρο εικόνας συμβολής) παρατηρείται ο πρώτος σκοτεινός κροσσός; (β) Σε πόση απόσταση (σε mm) από τον κεντρικό άξονα παρατηρείται ο φωτεινός κροσσός πέμπτης τάξης;

2. Δέσμη ορατής ακτινοβολίας που αποτελείται από δύο μήκη κύματος στο κόκκινο ($\lambda_r = 680$ nm) και στο πράσινο (λ_g) προσπίπτει σε μια ασυνέχεια που περιέχει δύο λεπτές σχισμές σε μικρή απόσταση μεταξύ τους. Τα δύο κύματα (κόκκινο και πράσινο) είναι σύμφωνα ως προς τον εαυτό τους. Από τις σχισμές εκπέμπονται δύο σετ δευτερογενών κυμάτων για τα δύο μήκη κύματος και κάθε σετ συμβάλλει σε μια μακρινή οθόνη όπου παρατηρείται ότι ο πρώτης τάξης σκοτεινός κροσσός του κόκκινου συμπίπτει με τον δεύτερης τάξης φωτεινό κροσσό του πράσινου. Υπολογίστε το μήκος κύματος λ_g.

3. Ένα λεπτό στρώμα αλκοόλης δείκτη διάθλασης n = 1.36 και μεταβλητού πάχους είναι απλωμένο πάνω σε επίπεδη επιφάνεια γυαλιού ($n_g > n$) και όταν φωτίζεται κάθετα με λευκό φως δίνει μια έγχρωμη εικόνα από τις ανακλώμενες δέσμες στις διαχωριστικές επιφάνειες αέρα-αλκοόλης και αλκοόλης-γυαλιού. (α) Δικαιολογήστε την έγχρωμη εικόνα. (β) Αν από μια περιοχή του στρώματος ανακλάται έντονα πράσινο φως ($\lambda_0 = 500$ nm), υπολογίστε για ποιές τιμές πάχους του στρώματος σε αυτή την περιοχή λαμβάνουμε την έντονη εικόνα ανάκλασης του πράσινου. Ποιό είναι το ελάχιστο τέτοιο πάχος;

4. Μονοχρωματικό σύμφωνο φως μήκους κύματος $\lambda_0 = 640$ nm προσπίπτει κάθετα σε επίπεδη επίστρωση διηλεκτρικού υλικού δείκτη διάθλασης n = 1.3. Η επίστρωση είναι από γυάλινο επίπεδο πλακίδιο δείκτη διάθλασης $n_g = 1.6$. Αν η όλη διάταξη περιβάλλεται από αέρα ($n_0 = 1.0$), πόσο πρέπει να είναι το ελάχιστο δυνατό πάχος της επίστρωσης έτσι ώστε το ανακλώμενο φως από τις δύο διαχωριστικές επιφάνειες αέρα-επίστρωσης και επίστρωσης-γυαλιού να ελαχιστοποιηθεί. Τι ποσοστό της προσπίπτουσας φωτεινής ισχύος αντιπροσωπεύουν οι δύο πρώτες ανακλώμενες δέσμες (μια από κάθε διαχωριστική επιφάνεια).

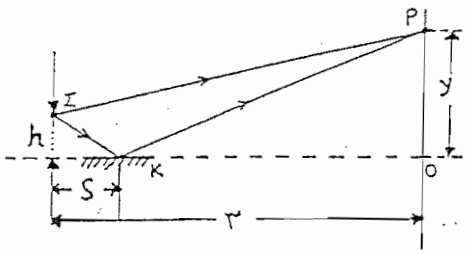
5. Μονοχρωματική δέσμη σύμφωνου φωτός μήκους κύματος λ_0 προσπίπτει υπό γωνία θ_i σε λεπτή επίπεδη επίστρωση TiO_2 δ.δ. n_f η οποία επικάθεται σε επίπεδο πλακίδιο γυαλιού δ.δ. n_g. Αν $n_f > n_g$, δείξτε ότι συνθήκη ενισχυτικής συμβολής για τις ανακλώμενες δέσμες 1 και 2 αντιπροσωπεύει τη συνθήκη αναιρετικής συμβολής για τις δέσμες 2 και 3 που προκύπτουν από εσωτερικές ανακλάσεις στη διεπιφάνεια TiO_2-γυαλιού (βλέπε σχήμα). Υποτίθεται ότι ο δείκτης διάθλασης του αέρα: $n_0 = 1.0$.



6. Ένα ευθυγραμμισμένο συμβολόμετρο Michelson φωτίζεται με κωνική δέσμη laser μήκους κύματος λ_0 = 500 nm. Στο ένα σκέλος του συμβολόμετρου τοποθετούμε κάθετα στη δέσμη ένα διηλεκτρικό πλακίδιο πάχους d = 0.2 cm και δείκτη διάθλασης n = 1.5 και παρατηρούμε στο κέντρο της εικόνας τον κροσσό μηδενικής τάξης (m = 0). Αν αποσύρουμε το πλακίδιο (α) ποιάς τάξης κροσσό θα παρατηρήσουμε στο κέντρο της εικόνας; Θα είναι φωτεινός ή σκοτεινός; (β) Ποιά θα είναι η διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ των δύο δεσμών μετά την απομάκρυνση του πλακιδίου; (Δίνεται ο δείκτης διάθλασης του αέρα: n_0 =1.0).

7. Σε ένα ευθυγραμμισμένο συμβολόμετρο Michelson τοποθετούμε κελί μήκους 10.0 cm το οποίο αρχικά περιέχει ατμοσφαιρικό αέρα. Το συμβολόμετρο φωτίζεται με κωνική φωτεινή δέσμη μήκους κύματος λ_0 = 500 nm. Αν ο δείκτης διάθλασης του αέρα ληφθεί με ακρίβεια n_0 = 1.00029 (και όχι 1.0) και το κελί εκκενωθεί εντελώς από τον αέρα, πόσοι συνολικά κροσσοί (φωτεινοί και σκοτεινοί) θα μετακινηθούν κατά τη διαδικασία της εκκένωσης;

8. Δίνεται σημειακή σύμφωνη μονοχρωματική πηγή Σ μήκ. κύματος λ_0 = 580 nm σε απόσταση r = 1.0 m από την οθόνη παρατήρησης. Ένα διηλεκτρικό κάτοπτρο K ανακλαστικότητας ~100 % είναι τοποθετημένο όπως δείχνει το σχήμα και σε κάθετη απόσταση h από την πηγή. Θεωρώντας την προσέγγιση συμβολής μακρινού πεδίου (h και s << r), αν οι διαδοχικοί φωτεινοί κροσσοί συμβολής που σχηματίζονται από την υπέρθεση των απευθείας και των ανακλώμενων στο κάτοπτρο ακτίνων απέχουν απόσταση Δy = 0.4 mm, να υπολογιστεί η απόσταση h.



ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΟΠΤΙΚΗΣ

3ο φυλλάδιο — Άνοιξη 2002

3.1 (α) Από τις σχέσεις $\boxed{d\sin\theta_m = (m+\frac{1}{2})\lambda}$ και $\boxed{y_m = \frac{r}{d}(m+\frac{1}{2})\lambda}$ που δίνουν την γωνιακή και τη γραμμική απόσταση του σκοτεινού κροσσού τάξης m αντίστοιχα, έχουμε για τις προσεγγιστικά μακρινά πεδία ότι $\boxed{\sin\theta_m \simeq \theta_m}$ (σε rads) και επομένως:

$\theta_m \simeq (m+\frac{1}{2})\lambda/d$ και για τον πρώτο σκοτεινό κροσσό $m=0$ (κροσσός μηδενικής τάξης)

$$\theta_0 = \lambda/2d = \frac{488\times10^{-9}\,m}{2\times0.2\times10^{-3}\,m} = 1.22\times10^{-3}\ \text{rads}$$

Αν δε κάναμε την προσέγγιση $\sin\theta_m \simeq \theta_m$ τότε $\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d}\right) = 1.219999395$ rads. Συνεπώς η προσέγγιση μακρινού πεδίου είναι εξαιρετικά αξιόπιστη. Η γραμμική απόσταση θα δίνεται από τη

$$y_0 = \frac{r\lambda}{2d} = \frac{2.0\,m\times488\times10^{-9}\,m}{2\times0.2\times10^{-3}\,m} = 2.44\ mm$$

(β) Η απόσταση των φωτεινών κροσσών από το κέντρο της εικόνας συμβολής είναι:

$\boxed{y_m = \frac{r}{d}m\lambda}$ και για τον πέμπτο τάξης κροσσό:

$$y_5 = \frac{5r\lambda}{d} = \frac{5\times2.0\,m\times488\times10^{-9}\,m}{0.2\times10^{-3}\,m} = 24.4\ mm,$$ δηλ. δέκα φορές μεγαλύτερη απ' ότι η απόσταση του πρώτου (μηδενικής τάξης) σκοτεινού κροσσού.

3.2 Η απόσταση του σκοτεινού κροσσού πρώτης τάξης ($m=1$) για το κόκκινο δίνεται από τη

$$y_{1r} = \frac{r}{d}(1+\frac{1}{2})\lambda_r = \frac{1.5\,r\lambda_r}{d} \quad (1)$$

Η απόσταση του φωτεινού κροσσού δεύτερης τάξης ($m=2$) για το πράσινο

$y_{2g} = \frac{2r\lambda_g}{d}$ (2) . Διαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2)

$y_{1r}/y_{2g} = \frac{\frac{1.5r\lambda_r}{d}}{\frac{2r\lambda_g}{d}} = \frac{0.75\lambda_r}{\lambda_g}$. Όμως $y_{1r} = y_{2g}$ και

$\lambda_g = 0.75\lambda_r = 0.75 \times 680\,nm = 510\,nm$

$\boxed{3.3}$ (α) Οι δύο ανακλώμενες δέσμες από τις διεπιφάνειες αέρα-αλκοόλης και αλκοόλης-γυαλιού αντιστοιχούν σε ανακλάσεις από οπτικά αραιότερο σε οπτικά πυκνότερο μέσο και επομένως αμφότερες θα υποστούν μεταβολή φάσης κατά π. Άρα δεν θα υπάρξει σχετική μεταβολή φάσης μεταξύ των δύο δεσμών από τις ανακλάσεις και κάθε διαφορά φάσης θα οφείλεται αποκλειστικά στη διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ των δεσμών. Δηλ.

$\boxed{\delta(OA) = 2nd}$, όπου n ο δ.δ. της αλκοόλης και d το (μεταβλητό) πάχος του στρώματος αλκοόλης. Ενισχυτική συμβολή θα υπάρχει όταν οι δύο ανακλώμενες δέσμες είναι σε φάση $\boxed{(2nd = m\lambda)}$ (1) και αναιρετική όταν είναι σε αντίθετη φάση $\boxed{(2nd = (2m+1)\lambda/2)}$. Επομένως, λόγω του μεταβλητού πάχους θα έχουμε ενισχυτική συμβολή για κάποιο μήκος κύματος και αναιρετική για κάποιο άλλο, με όλες τις διαβαθμίσεις συμβολής για τα ενδιάμεσα μήκη κύματος. Έτσι μερικά μήκη κύματος (χρώματα) που συμβάλλουν ενισχυτικά θα φαίνονται πιο έντονα από άλλα που συμβάλλουν αναιρετικά για ένα δεδομένο σημείο του στρώματος. Σε άλλα σημεία, δια-

φορετικά μήκη κύματος θα συμβάλλουν εποικοδομητικά και θα προκύψει μια έγχρωμη εικόνα ανάκλασης.

(β) Για να παρατηρείται έντονο ανακλώμενο φως στο πράσινο από κάποια περιοχή του σύμπαντος θα πρέπει το αντίστοιχο μήκος κύματος να ικανοποιεί τη σχέση (1) και

$$d = \frac{m\lambda_0}{2n} = m\,\frac{500\times10^{-3}\,\mu m}{2\times1.36} = m\times 0.184\,\mu m \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Το ελάχιστο πάχος που χρειάζεται για να πάρουμε έντονη ανάκλαση στο πράσινο αντιστοιχεί σε $m=1$ και επομένως

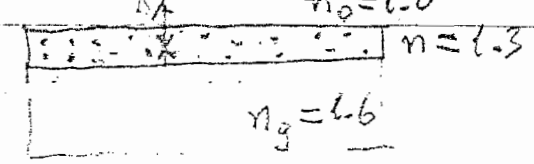
$$d_{min} = 0.184\,\mu m = 184\,nm,$$ δηλ. πάχος του μήκους κύματος.

3.4 Για να ελαχιστοποιηθεί το ανακλώμενο φως θα πρέπει οι δύο ανακλώμενες δέσμες από τις δύο διεπιφάνειες να συμβάλλουν σε αντίθετη φάση. Αφού αμφότερες οι ανακλάσεις αντιστοιχούν σε πρόσπτωση από οπτικά αραιότερο σε οπτικά πυκνότερο δεν θα υπάρξει διαφοροποίηση φάσης κατά τις ανακλάσεις. Επομένως, κάθε διαφορά φάσης θα οφείλεται στη διαφορά οπτικού δρόμου. Για αναιρετικά συμβολή πρέπει:

$$2nd = (2m+1)\lambda_0/2 \qquad (1)$$

$n=1.3$, $\lambda_0 = 640\,nm$, $m=0$ (για ελάχιστο δυνατό πάχος d) και $d=;$

$$d = \frac{\lambda_0}{4n} = \frac{640\,nm}{4\times1.3} \simeq 123\,nm$$ (επιστρώση τετάρτου μήκους κύματος)



Για την ανάκλαση στη

διεπιφάνεια αέρα-επίστρωσης και για κάθεμια προσπίπτουσα η ανακλαστικότητα R δίνεται από την:

$$R = \left(\frac{n-n_0}{n+n_0}\right)^2 = \left(\frac{0.3}{2.3}\right)^2 = 0.017 \text{ ή } 1.7\%$$ της προσπίπτουσας φωτεινής ισχύος

Η προσπίπτουσα δέσμη στην ίδια διεπιφάνεια επίστρωσης-γυαλιού θα έχει φωτεινή ισχύ $T = 1 - R = 0.983$ ή 98.3% (Η ίδια τιμή βρίσκεται από τη σχέση $T = \frac{4n_0 n}{(n_0+n)^2}$)

Έτσι, από την ανάκλαση στη διεπιφάνεια επίστρωσης-γυαλιού θα προκύψει φωτεινή ισχύς που θα είναι ίση με κλάσμα TR' της αρχικής ισχύος, όπου:

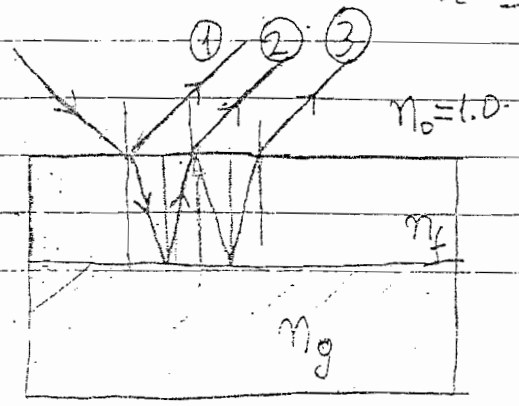
$$R' = \left(\frac{n_g-n}{n_g+n}\right)^2 = \left(\frac{0.3}{2.9}\right)^2 = 0.0107$$

και $TR' = 0.983 \times 0.0107 = 1.052 \times 10^{-3}$

Στη συνέχεια, η ανακλώμενη στην ίδια διεπιφάνεια θα διέλθει την πρώτη επιφάνεια με διαπερατότητα $T' = T$ και θα εξέλθει με ισχύ ίση με κλάσμα ίσο με

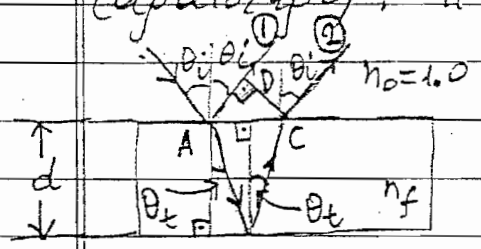
$$TR'T' = 1.052 \times 10^{-3} \times 0.983 = 1.034 \times 10^{-3}$$
ή $\simeq 1.0\%$

3.5



Η δέσμη 1 υφίσταται μεταβολή φάσης κατά τη ανάκλασή της στη διεπιφάνεια αέρα – TiO_2 αφού προσπίπτει από οπτικά

αραιότερο σε οπτικά πυκνότερο μέσο. Αν τώρα η δέσμη (2) δεν υφίσταται μεταβολή φάσης κατά την ανάκλασή της στη διεπιφάνεια TiO_2 (πυκνότερο) - γυαλιού (αραιότερο), η διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ των δύο δεσμών θα είναι:



$$\delta(O\Delta) = n_f(AB+BC) - n_0 AD = \frac{2nd}{\cos\theta_t} - AC\sin\theta_i$$

$$= \frac{2nd}{\cos\theta_t} - 2d\tan\theta_t \sin\theta_i \quad (1)$$

Εφαρμογή του νόμου του Snell για τη διάθλαση στη διεπιφάνεια αέρα - TiO_2 δίνει: $\sin\theta_i = n\sin\theta_t$ και συνεπάγεται στον (1) δίνει:

$$\delta(O\Delta) = \frac{2nd}{\cos\theta_t} - 2d\tan\theta_t\, n\sin\theta_t = \frac{2nd}{\cos\theta_t}(1-\sin^2\theta_t) = 2nd\cos\theta_t \quad (2)$$

Επομένως η διαφορά φάσης μεταξύ των (1) και (2) θα είναι:

$$\boxed{\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(O\Delta) - \pi} = \frac{4\pi n}{\lambda_0} d\cos\theta_t - \pi$$

και για ενισχυτική συμβολή θα πρέπει

$$\boxed{\delta\varphi = \frac{4\pi n}{\lambda_0} d\cos\theta_t - \pi = 2m\pi} \quad (m = 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

απ' όπου προκύπτει ότι $d\cos\theta_t = (2m+1)\frac{\lambda_0}{4n}$ (3)

Η διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ των δεσμών (2) και (3) είναι ίδια όπως αυτή μεταξύ των (1) και (2). Όμως οι (2) και (3) δεν μεταβάλλουν τη φάση τους κατά την ανάκλασή τους στη διεπιφάνεια TiO_2-γυαλί. Επομένως η διαφορά φάσης τους κατά τη

συμβολή θα οφείλεται αποκλειστικά στη διαφορά δρόμου και για αναιρετική συμβολή (αντίθετη φάση):

$$\boxed{\delta\varphi = \frac{4\pi n}{\lambda_0} d\cos\theta_t = (2m+1)\pi} \quad \text{και}$$

$$d\cos\theta_t = (2m+1)\frac{\lambda_0}{4n} \qquad (m = 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

Η τελευταία σχέση είναι ίδια με την (3)

3.6 Εφ' όσον στο κέντρο της εικόνας παρατηρούμε τον κροσσό μηδενικής τάξης (σκοτεινός) τότε η διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ των δύο δεσμών είναι μηδέν, δηλ. $(O\Delta)_1 = (O\Delta)_2$ (1). Αν το πλακίδιο έχει τοποθετηθεί στο σκέλος (δέσμη) 1, τότε θα έχουμε:

$$(O\Delta)_1 = 2x_1 - 2d + 2nd = 2x_1 + 2(n-1)d \quad (2)$$

όπου x_1 η απόσταση του διαιρέτη δέσμης από το κάτοπτρο 1. Αν σε αυτή την κατάσταση, η απόσταση του διαιρέτη δέσμης από το κάτοπτρο 2 είναι x_2, τότε θα έχουμε

$$(O\Delta)_2 = 2x_2 \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (2), (3) στην (1) έχουμε:

$$2x_1 + 2(n-1)d = 2x_2 \Rightarrow 2(x_2 - x_1) = 2(n-1)d \quad (4)$$

Μετά την απομάκρυνση του πλακιδίου η διαφορά οπτικού δρόμου θα είναι:

$$\delta(O\Delta) = 2x_2 - 2x_1 = m\lambda_0/2 \Rightarrow 2(x_2 - x_1) = m\lambda_0/2 \quad (5)$$

~~όπου η m τάξη του κροσσού που θα~~ (m: ακέραιος) εμφανιστεί στο κέντρο της εικόνας συμβολής.

Οι (4) και (5) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τα $2(X_2-X_1)$ ($\equiv \delta(O\Delta)$ μετά την απομακρύνση του πλακιδίου) και m.

Λύνοντας την (4) βρίσκουμε:

$$\delta(O\Delta) = 2(X_2-X_1) = 2(1.5-1)\times 0.2\ cm = \underline{0.2\,cm}$$

ενώ από την (5) βρίσκουμε:

$$m = \frac{2(X_2-X_1)}{\lambda_0/2} = \frac{4(X_2-X_1)}{\lambda_0} = \frac{0.4\times10^{-2}\,\mu m}{500\times10^{-9}\,\mu m} = 8.000$$

Έτσι, η $\delta(O\Delta)$ θα γίνει 0.2 cm και θα παρατηρούμε στο κέντρο της εικόνας τον κροσσό τάξης 8.000 ο οποίος, ως άρτιας τάξης, θα είναι σκοτεινός.

$\boxed{3.7}$ Έστω $\delta(O\Delta)$ η διαφορά οπτικού δρόμου μεταξύ των δύο σχισμών στην αρχική κατάσταση και $\delta(O\Delta)'$ στην τελική κατάσταση μετά την εκκένωση του κελιού. Αν υποτεθεί ότι ο δείκτης διάθλασης του κενού $n_v = 1.0$, τότε θα έχουμε:

$$\delta(O\Delta) = m\,\lambda_0/2 \quad \text{και} \quad \delta(O\Delta)' = m'\,\lambda_0/2$$

και η μεταβολή της διαφοράς δρόμου κατά την αλλαγή θα είναι

$$\delta(O\Delta) - \delta(O\Delta)' = (m-m')\,\lambda_0/2 = M\,\lambda_0/2 \quad (1)$$

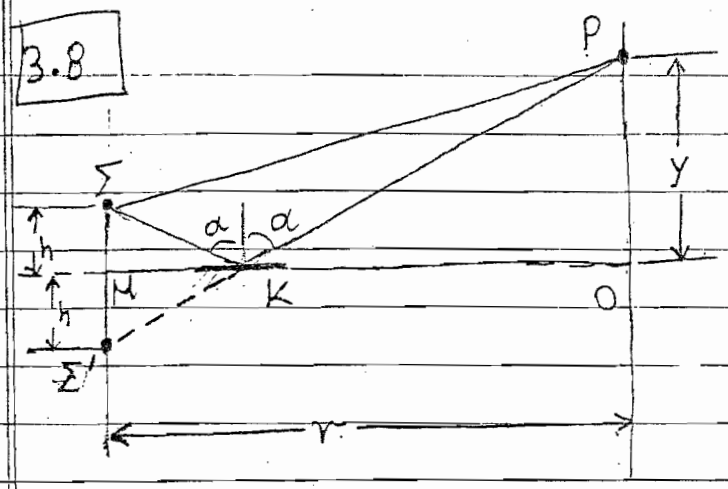
Όμως, αν δεν υπάρχει άλλη διαφοροποίηση μεταξύ των δύο καταστάσεων, θα έχουμε:

$$\delta(O\Delta) - \delta(O\Delta)' = 2n_0 d - 2n_v d = 2(n_0-1)d \quad (2)$$

όπου d το μήκος του κελιού. Από τις (1) και (2) προκύπτει: $2(n_0-1)d = M\lambda_0/2 \Rightarrow M = \underline{4(n_0-1)d}$

$$M = \frac{4\times0.00029\times10\times10^{-2}\,m}{500\times10^{-9}\,\mu m} = 232 \text{ κροσσοί } \lambda_0 \text{ θα μετακινηθούν}$$

3.8



Η ανακλώμενη από το κάτοπτρο δέσμη που συμβάλλει με την απευθείας από την Σ στο P φαίνεται ότι προέρχεται από το φανταστικό ίδωλο Σ' της Σ που βρίσκεται συμμετρικά ως προς την MO σε απόσταση h. Έτσι, οι δύο σημειακές πηγές Σ και Σ' θα απέχουν απόσταση 2h και θα σχηματίζουν εικόνα συμβολής μακρινού πεδίου στην οθόνη. Τα κύματα στις πηγές Σ και Σ' ξεκινούν με αντίθετη φάση καθόσον η ανακλώμενη στο κάτοπτρο υφίσταται μεταβολή φάσης π (από αραιότερο σε πυκνότερο). Έτσι, η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής για τις δύο σχισμές σε απόσταση d (πείραμα Young) γίνεται συνθήκη αναιρετικής συμβολής στην παρούσα περίπτωση. Η απόσταση των ~~φωτ.~~ φωτ. κροσσών τάξης m και m+1 (διαδοχ. κροσσών) θα είναι αντίστοιχα

$\boxed{y_m = \frac{r}{d} m\lambda_0}$ και $y_{m+1} = \frac{r}{d}(m+1)\lambda_0$, οπότε η διαφ. απόστασης

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{r}{d}(m+1)\lambda_0 - \frac{r}{d} m\lambda_0 = \frac{r}{d}\lambda_0^{*}$$

και επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση $d = 2h$ έχουμε:

$$\Delta y = \frac{r}{2h}\lambda_0 \Rightarrow h = \frac{r}{2\Delta y}\lambda_0 = \frac{1.0\,m \times 580\times10^{-9}\,m}{2\times0.4\times10^{-3}\,m}$$

και $h = 0.725$ mm.

---

*Στην ίδια σχέση καταλήγουμε για την απόσταση δύο διαδοχικών φωτεινών κροσσών αν πάρουμε τις συνθήκες ενισχυτικής συμβολής για τους ~~φωτ.~~ φωτ. κροσσούς τάξης m και m+1.