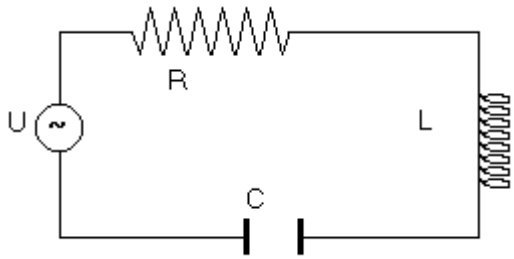
Μιχάλης Καλογεράκης
9^{ο} Εξάμηνο ΣΕΜΦΕ
ΑΜ:09101187

Υπεύθυνος Άσκησης: Κα Μανωλάτου
Συνεργάτις: Ζάννα Βιργινία
Ημερομηνία Διεξαγωγής:8/11/2005

Άσκηση 19
Εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις και συντονισμός

1) Εισαγωγή: Σκοπός και στοιχεία Θεωρίας

Σκοπός μας στην άσκηση αυτή είναι να μελετήσουμε το φαινόμενο του συντονισμού στις εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Με βάση τα δεδομένα που θα προκύψουν θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε κάποια χαρακτηριστικά του κυκλώματος, όπως τον συντελεστή ποιότητάς του, τον συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου που χρησιμοποιήσαμε, την χωρητικότητα του πυκνωτή και την αντίσταση των απωλειών του κυκλώματος.



Η ολική εμπέδηση ενός κυκλώματος που διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα δίδεται από τον τύπο:

$$Z_{o\lambda} = \sqrt{(Z_{LC})^2 + R^2} \Leftrightarrow Zo\lambda = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}\ .$$

Όταν λοιπόν ένα κύκλωμα διεγείρεται από μια πηγή η οποία έχει πλάτος Vo τότε το πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος είναι $I_o = \frac{V_o}{Z_{o\lambda}}$.Η διαφορά φάσης φ μεταξύ ρεύματος και τάσης δίνεται από τον τύπο $\phi = \arctan\frac{Z_{LC}}{R}$.

Αν λοιπόν η τάση του κυκλώματος είναι $V = V_o \cos(\omega t)$, τότε η ένταση του ρεύματος θα είναι $I = I_o \cos(\omega t+\varphi)$

Όταν η παράσταση $Z_{LC} = 0 \Leftrightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$, τότε ο μόνος υπαρκτός λόγος εμπέδησης είναι η αντίσταση του κυκλώματος. Τότε λοιπόν έχουμε μέγιστη προσφορά ενέργειας από την πηγή στο κύκλωμα κι επιπλέον, η τάση και η ένταση είναι σε φάση. Ουσιαστικά δηλαδή, έχουμε ένα κύκλωμα που αποτελείται μόνο από μία αντίσταση. Προφανώς, η ένταση του ρεύματος στο συντονισμό γίνεται μέγιστη.

Η συχνότητα στην οποία παρατηρείται συντονισμός είναι συγκεκριμένη για κάθε κύκλωμα με σταθερές τιμές αυτεπαγωγής πηνίου(L) και χωρητικότητας πυκνωτή(C), και δίδεται από τον τύπο $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

Μπορούμε τώρα να κάνουμε ένα σχεδιάγραμμα της καμπύλης του συντονισμού, το οποίο δεν είναι τίποτε άλλο από τη γραφική παράσταση της έντασης του ρεύματος συναρτήσει της κυκλικής συχνότητας (την οποία καθορίζει η πηγή) . Υπάρχουν δύο τιμές συχνοτήτων στις οποίες η ένταση έχει τιμή $I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_o}{\sqrt{2}}$. Έστω λοιπόν

ότι αυτές οι δύο τιμές είναι οι ω_1 και ω_2 ($\omega_2>\omega_1$).Ορίζουμε το εύρος της καμπύλης συντονισμού ως τη διαφορά $\Delta\omega$ ή $\Delta f = f_2 - f_1$.Όσο μικρότερο είναι το Δf, τόσο μικρότερη είναι η ζώνη συχνοτήτων που μπορούν να περάσουν από το κύκλωμα, συνεπώς τόσο καλύτερα μπορεί να επιτευχθεί ο συντονισμός του.

Ο συντελεστής ποιότητας το συστήματος είναι το μέσο μας για να μετρήσουμε πόσο καλά αποδίδει το κύκλωμά μας την ενέργεια που του προσφέρουμε σε μία περίοδο. Έτσι λοιπόν προκύπτει ότι ο συντελεστής ποιότητας είναι $Q = \frac{L\omega_o}{R}$, όπου ω_o είναι η συχνότητα συντονισμού. Επιπλέον, μπορούμε να δείξουμε ότι ο συντελεστής ποιότητας ενός κυκλώματος δίδεται από τον τύπο $Q = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$. Επίσης αποδεικνύεται ότι στον συντονισμό ισχύει η σχέση $V_o^L = V_o^C = Q \cdot V_o$.

2)Πειραματική διάταξη και διαδικασία

Η διάταξή μας αποτελούνταν από ένα κύκλωμα RLC, μία γεννήτρια χαμηλών συχνοτήτων και έναν παλμογράφο για την μέτρηση των τάσεων στα άκρα του κάθε μέρους του κυκλώματος, σύμφωνα με τις οδηγίες της άσκησης. Αρχικά μετρήσαμε με βήμα 50Hz ξεκινώντας από τα 400 τις τιμές της τάσης του ρεύματος στον παλμογράφο. Εντοπίσαμε την καμπύλη συντονισμού γύρω στα 740Hz, οπότε από τα 700 έως τα 800Hz πήραμε τιμές με βήμα 10Hz για να έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια. Ήταν πολύ δύσκολο το να επιτύχουμε τις ακριβείς τιμές στη γεννήτρια και αυτό ήθελε πάρα πολλή προσοχή.

Αρχικά λοιπόν πήραμε μετρήσεις έχοντας συνδεδεμένες και τις 2 αντιστάσεις, συνολικής ωμικής αντίστασης 78Ω ενώ στη δεύτερη σειρά μετρήσεων βραχυκυκλώσαμε την δεύτερη αντίσταση και έτσι είχαμε συνολική αντίσταση 22Ω.

Στη συνέχεια μετρήσαμε την τάση στα άκρα του πυκνωτή με ωμική αντίσταση του κυκλώματος ίση με 22Ω και μετά την τάση στα άκρα του πηνίου με ωμική αντίσταση κυκλώματος ίση με 56Ω.

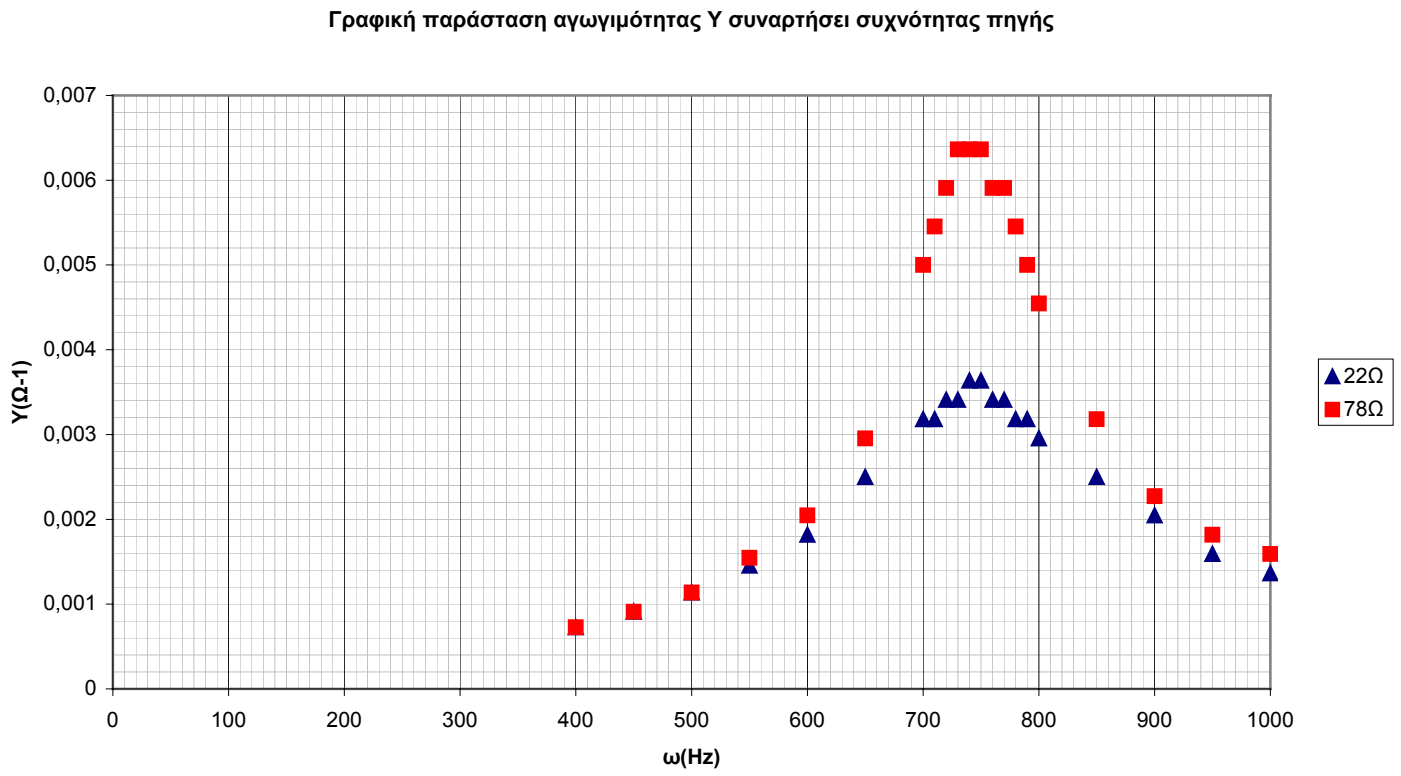
3)Επεξεργασία των μετρήσεων

1-2-3)Από τις πειραματικές τιμές μπορούμε να συμπληρώσουμε τους πίνακες.

Ωμική αντίσταση 22Ω			
F(Hz)	Vo(V)	Io(A)	Y(Ω^{-1})
400	0,032	0,001	0,0007
450	0,040	0,002	0,0009
500	0,050	0,002	0,0011
550	0,064	0,003	0,0015
600	0,032	0,001	0,0007
650	0,110	0,005	0,0025
700	0,140	0,006	0,0032
710	0,140	0,006	0,0032
720	0,150	0,007	0,0034
730	0,150	0,007	0,0034
740	0,160	0,007	0,0036
750	0,160	0,007	0,0036
760	0,150	0,007	0,0034
770	0,150	0,007	0,0034
780	0,140	0,006	0,0032
790	0,140	0,006	0,0032
800	0,130	0,006	0,003
850	0,110	0,005	0,0025
900	0,090	0,004	0,002
950	0,070	0,003	0,0016
1000	0,060	0,003	0,0014

Ωμική αντίσταση 78Ω			
F(Hz)	Vo(V)	Io(A)	Y(Ω^{-1})
400	0,032	0,001	0,0007
450	0,040	0,002	0,0009
500	0,050	0,002	0,0011
550	0,068	0,003	0,0015
600	0,090	0,004	0,002
650	0,130	0,006	0,003
700	0,220	0,01	0,005
710	0,240	0,011	0,0055
720	0,260	0,012	0,0059
730	0,280	0,013	0,0064
740	0,280	0,013	0,0064
750	0,280	0,013	0,0064
760	0,260	0,012	0,0059
770	0,260	0,012	0,0059
780	0,240	0,011	0,0055
790	0,220	0,01	0,005
800	0,200	0,009	0,0045
850	0,140	0,006	0,0032
900	0,100	0,005	0,0023
950	0,080	0,004	0,0018
1000	0,070	0,003	0,0016

3)Μπορούμε τώρα λοιπόν να σχεδιάσουμε την πειραματική καμπύλη του συντονισμού, στην οποία όμως δεν θα χαράξουμε γραμμές, αλλά θα τοποθετήσουμε μόνο τα πειραματικά σημεία.



4)Η καμπύλη στην οποία μπορούμε να στηριχτούμε με περισσότερη ακρίβεια για τον προσδιορισμό της συχνότητας συντονισμού είναι η καμπύλη για τα 22Ω που έχει πιο «μαζεμένη» κορυφή. Με σφάλμα ανάγνωσης 5Hz μπορούμε να πούμε ότι η συχνότητα συντονισμού είναι στα 740Hz.

Το Y_{max} για την περίπτωση της αντίστασης 78Ω (πρώτη περίπτωση) είναι $Y_{\max} = 0,0035\Omega^{-1}$ ενώ για 22Ω (δεύτερη περίπτωση) $Y_{\max} = 0,0066\Omega^{-1}$.Το σφάλμα και στις δύο περιπτώσεις είναι $0,0002\Omega^{-1}$.

Το $\Delta f = f_2 - f_1$ όπου f1 και f2 οι συχνότητες που αντιστοιχούν σε ρεύμα $I_o = 0,707 I_{o\max}$.
Όπού $I_{o,\max} = Y_{\max} U_o$

.Άρα για την πρώτη περίπτωση έχουμε $I^A_{o\max} = 0,0035 \cdot 2A = 7 \cdot 10^{-3} A$. Άρα f1 και f2 είναι οι συχνότητες για $Y_1 = \frac{0,707 I_{0,\max}}{2} = 2,47 \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}$ άρα $f_1 = 650 \pm 5Hz$ και $f_2 = 850 \pm 5Hz$ άρα $\Delta f = 200 \pm 5Hz$.

Ομοίως για την δεύτερη περίπτωση $I^B_{o\max} = 0,0066 \cdot 2A = 0,0132A$ και $Y_2 = \frac{0,707 I_{o\max}}{2} = 4,67 \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}$ άρα $f_1 = 690 \pm 5Hz$ και $f_2 = 790 \pm 5Hz$ άρα $\Delta f = 100 \pm 5Hz$.

5) Θα χρησιμοποιήσω τη σχέση (19.6) $Q = \frac{f_\sigma}{\Delta f}$

Έτσι για την πρώτη περίπτωση (R=78Ω) έχω $\overline{Q_A} = \frac{740Hz}{200Hz} = 3,7$ και $\delta Q_A = \sqrt{\left(\frac{\partial Q_A}{\partial f_\sigma}\delta f_\sigma\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_A}{\partial \Delta f}\delta \Delta f\right)^2}$

όπου $\frac{\partial Q_A}{\partial f_\sigma}\delta f_\sigma = \frac{1}{\Delta f} \cdot \delta f_\sigma = 0,025$ και $\frac{\partial Q_A}{\partial \Delta f}\delta \Delta f = f_\sigma \frac{1}{\Delta f^2}\delta \Delta f = 0,28$ άρα $\delta Q_A = \sqrt{0,025^2 + 0,0925^2} = 0,009$.

Άρα έχω $Q_A = 3,70 \pm 0,09$.

Για την δεύτερη περίπτωση (R=22Ω) έχω $\overline{Q_B}=\frac{740Hz}{100Hz}=7,4$ και $\delta Q_B=\sqrt{\left(\frac{\partial Q_B}{\partial f_\sigma}\delta f_\sigma\right)^2+\left(\frac{\partial Q_B}{\partial \Delta f}\delta\Delta f\right)^2}$ όπου $\frac{\partial Q_B}{\partial f_\sigma}\delta f_\sigma=\frac{1}{\Delta f}\cdot\delta f_\sigma=0,05$ και $\frac{\partial Q_B}{\partial \Delta f}\delta\Delta f=f_\sigma\frac{1}{\Delta f^2}\delta\Delta f=0,37$ άρα $\delta Q_B=\sqrt{0,05^2+0,37^2}=0,37$.

Άρα έχουμε $Q_B=7,40\pm0,37$.

6)Στο συντονισμό ισχύει ότι: $\frac{1}{Y}=R_{ολ}\Leftrightarrow R_a=\frac{1}{Y}-R$. Συνεπώς, στην πρώτη περίπτωση έχουμε $R_{a,1}=\frac{1}{Y_1}-78=326\Omega$ (!!!) ενώ στη δεύτερη είναι $R_{a,2}=214-22\Omega=192\Omega$.Προφανώς δεν μπορεί να είναι τόσο μεγάλη η τιμή των απωλειών. Κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι τα καλώδια που χρησιμοποιήσαμε ήταν εντελώς αχρηστευμένα.

7) Θα χρησιμοποιηθεί η σχέση: $U_o^L=U_o^C=QU_o\Rightarrow Q=\frac{U_o^L}{U_o}$.Έχω $U_o^L=U_o^C=15,5\pm1,0V$ και $U_o=2,0\pm0,1V$.Άρα $\overline{Q}=\frac{8}{2,0}=4$ και $\delta Q=\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial U_o^L}\delta U_o^L\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial U_o}\delta U_o\right)^2}$ με $\frac{\partial Q}{\partial U_o^L}\delta U_o^L=\frac{1}{U_o}\delta U_o^L=\frac{1}{2,0}1,0=0,5$ και $\frac{\partial Q}{\partial U_o}\delta U_o=U_o^L\frac{1}{U_o^2}\delta U_o=\frac{8}{2,0^2}0,1=0,2$ οπότε $\delta Q=\sqrt{0,5^2+0,4^2}=0,5$. Τελικά $Q=4,0\pm0,5$.Η τιμή αυτή είναι πολύ κοντά στην τιμή που υπολογίσαμε από το διάγραμμα. Επιπλέον, αυτός ο τρόπος υπολογισμού, δεν περιέχει τα σφάλματα ανάγνωσης των διαγραμμάτων, τα οποία είναι δύσκολο να διαβαστούν με ακρίβεια.

8) Για το L έχω:

$Q=\frac{L2\pi f_\sigma}{R}\Rightarrow L=\frac{QR}{2\pi f_\sigma}$ οπότε $\overline{L}=\frac{4\cdot195\Omega}{2\cdot3,14\cdot740Hz}=0,17H$ και $\delta L=\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial Q}\delta Q\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial f_\sigma}\delta f_\sigma\right)^2}$ με $\frac{\partial L}{\partial Q}\delta Q=\frac{R}{2\pi f_\sigma}=\frac{195}{2\cdot3,14\cdot740}0,5\frac{\Omega}{Hz}=0,02H$ και $\frac{\partial L}{\partial f_\sigma}\delta f_\sigma=\frac{QR}{2\pi f_\sigma^2}\delta f_\sigma=\frac{7,8\cdot195}{2\cdot3,14\cdot740^2}10\frac{\Omega}{Hz}=0,002H$.Όπως βλέπουμε το $\frac{\partial L}{\partial f_\sigma}\delta f_\sigma$ είναι μια τάξη μεγέθους μικρότερο από το $\frac{\partial L}{\partial Q}\delta Q$ οπότε είναι αμελητέα ποσότητα για τον υπολογισμό του σφάλματος. Άρα $\delta L=0,02H$ και τελικά $L=0,17\pm0,02H$.

Για το C έχω:

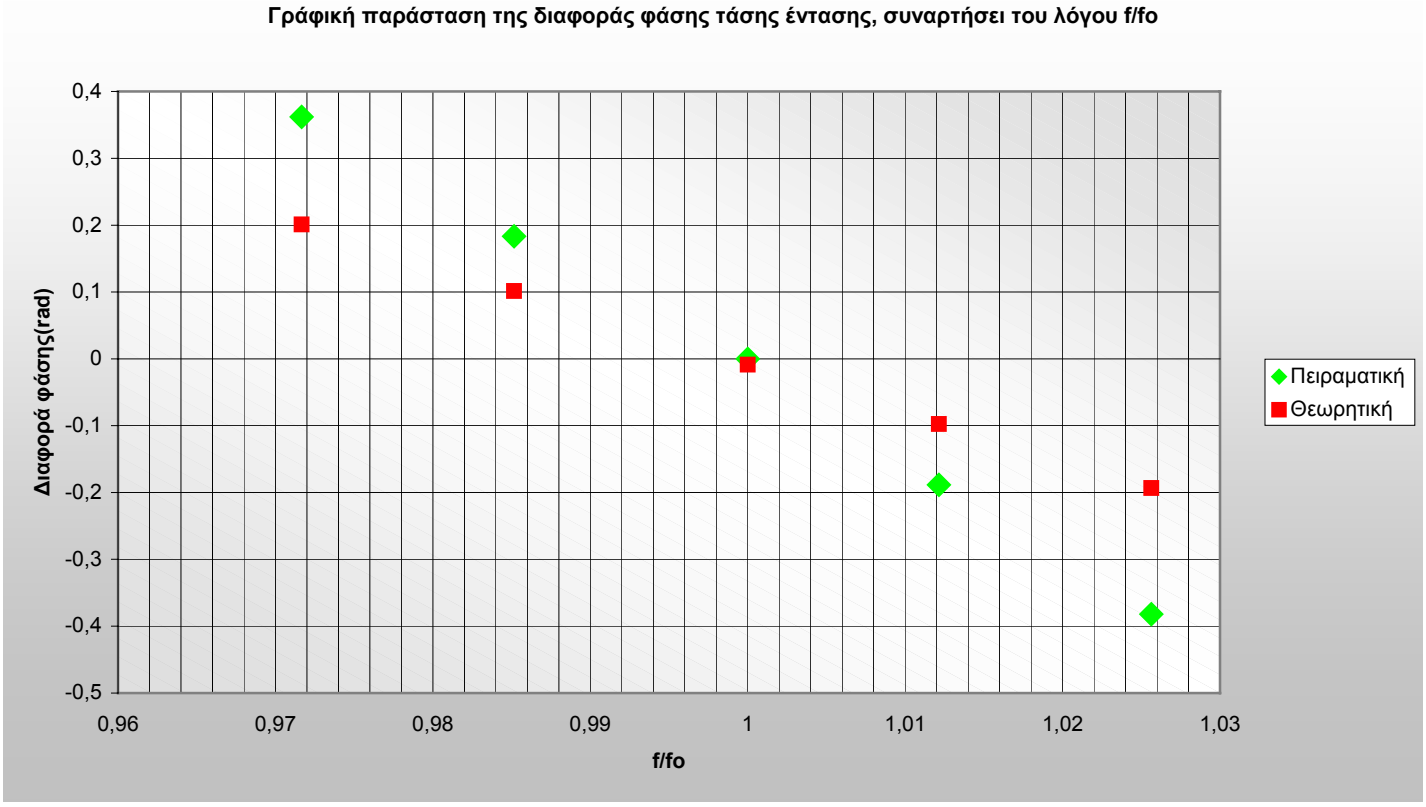
$2\pi f_\sigma=\frac{1}{\sqrt{LC}}\Rightarrow C=\frac{1}{4\pi^2f_\sigma^2L}$ οπότε $\overline{C}=\frac{1}{4\cdot9,86\cdot740^2 0,17\left(Hz^2H\right)}=2,72\cdot10^{-7}F$ και $\delta C=\sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial L}\delta L\right)^2+\left(\frac{\partial C}{\partial f_\sigma}\delta f_\sigma\right)^2}$ όπου $\frac{\partial C}{\partial L}\delta L=\frac{1}{4\pi^2f_\sigma^2L^2}\delta L=\frac{1}{4\cdot9,86\cdot740^2 0,17^2}0,02\frac{H}{Hz^2H^2}=0,003\mu F$ και $\frac{\partial C}{\partial f_\sigma}\delta f_\sigma=\frac{1}{4\pi^2f_\sigma^3L}=\frac{1}{4\cdot9,86\cdot740^3\cdot0,17\left(Hz^3H\right)}10Hz=0,004\mu F$ επομένως $\delta C=\sqrt{0,003^2+0,004^2}=0,005\mu F$.Τελικά $C=0,272\pm0,005\mu F$..

9)Στο τελευταίο μέρος του πειράματός μας ζητήθηκε να μετρηθεί η διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος και τάσης για κάποιες συχνότητες κοντά στη συχνότητα συντονισμού. Εκεί ήταν που μπορέσαμε με ακρίβεια να προσδιορίσουμε την συχνότητα συντονισμού, η οποία τελικά προέκυψε ότι ήταν 741Hz. Στα 741Hz η διαφορά φάσης της τάσης της πηγής και της τάσης της R1 (η οποία έχει ίδια φάση με το ρεύμα που διαρρέει το

κύκλωμα), είναι μηδενική. Την ολική αντίσταση εδώ τη θεωρούμε ίση με 214Ω, όσο δηλαδή υπολογίσαμε στο ερώτημα 6.

F(Hz)	Dt(ms)	F/fs	Φπειρ(rad)	Φθεωρ(rad)
720	0,08	0,97	0,36191	0,2010617
730	0,04	0,99	0,18347	0,1015307
741	0	1	0	-0,008625
750	-0,04	1,01	-0,1885	-0,097516
760	-0,08	1,03	-0,382	-0,193266

Προκύπτει λοιπόν το παρακάτω διάγραμμα.



11)Σχολιάζοντας τα αποτελέσματά μας, μπορούμε να δούμε ότι το πείραμα ήταν αρκετά επιτυχημένο. Προσδιορίσαμε την τιμή της συχνότητας συντονισμού στα 740 Hz μέσω γραφήματος, ενώ μέσω του παλμογράφου ήταν 741Hz. Τα υπόλοιπα, λίγο-πολύ προέκυψαν σε λογικές τιμές, αν εξαιρέσουμε τις τιμές των απωλειών στις οποίες τα νούμερα που προέκυψαν ήταν αρκετά μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα. Έχοντας όμως εμπιστοσύνη στις μετρήσεις μας , δεν μπορούμε παρά να τα δεχθούμε.