

ΜΑΡΙΑ ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

&

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ II

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

1. Πίνακας γραμμικών απεικονίσεων :

$$\left. \begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 \\ f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 \\ f(e_3) &= a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [f]$$

(Επιπλέον στο e_1 : $f(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \checkmark$). Τότε $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$.

2. Αλλαγή βάσης : Έστω $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ και $B_2 = (f_1, f_2, f_3)$, και
"παλιό" βάση "νέα" βάση

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + b_{31}e_3 \\ f_2 &= b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + b_{32}e_3 \\ f_3 &= b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{ο πίνακας} \\ \text{αλλαγής βάσης} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Τότε αν } \vec{v} &= x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 \\ &= x'_1 \cdot f_1 + x'_2 \cdot f_2 + x'_3 \cdot f_3 \end{aligned} \right\}$$

το $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ είναι το "παλιό" διάνυσμα και

το $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$ είναι το "νέο" διάνυσμα, και συνδέονται

πρ με B ως εξής $X = B \cdot X' \Leftrightarrow X' = B^{-1} \cdot X$.

3. Πίνακας ενδομορφισμού στη νέα βάση ως προηγ. παγιά:

$$\text{Έστω } [f]_{B_1} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\text{Έστω } [f]_{B_2} = A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix}.$$

Εάν $\vec{v} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x'_1 f_1 + x'_2 f_2 + x'_3 f_3$ και

$\vec{u} = f(\vec{v})$, αναλογα θα έχουμε

$\vec{u} = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 = y'_1 f_1 + y'_2 f_2 + y'_3 f_3$

Τότε
$$\begin{cases} Y = A \cdot X & \text{και } Y' = A' \cdot X' \\ X = B \cdot X' & \text{και } Y = B \cdot Y' \end{cases}$$
 , όπου $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ και $Y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow BY' = A \cdot X = A \cdot B \cdot X'$ \iff Βασιλοεπίφθοι

$Y' = B^{-1} \cdot A \cdot B \cdot X'$. Άρα $\boxed{A' = B^{-1} \cdot A \cdot B}$

* ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ *

Ερώτημα:

1 Έστω πίνακας $A \in \Pi_n(K)$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

2 Αν $A = P \Delta P^{-1}$ είναι μια διαγωνοποίηση του A τότε ο διαγωνιστός πίνακας Δ έχει ως διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A

ενώ ο πίνακας P έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A , λ_i αντιστοιχία των ιδιοτιμών του λ_i του A διασφαλίσει την παρουσία τους ως Δ

• Αν $A^T = A \Leftrightarrow A$ συμμετρικός $\Leftrightarrow A$ διαγωνοποιείται

• Πίνακας A διαγωνοποιείται \Leftrightarrow από ορθόγωνο πίνακα Q
($Q^{-1} = Q^T$) Αν $A = Q \Delta Q^T$

Ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων $\delta n \lambda$ μορφής

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k)$$

• A

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του πίνακα A .

i) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr } A$

ii) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A$

- Συνθήκη η κανονική γεωμετρική γνήσια του \mathbb{C}

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

- Για ορθογώνια γωνία $\phi \neq \pm 90^\circ$ είναι

$$\cos \phi = \frac{1}{2} (\text{tr } T - 1) \quad (\text{γεωμετρικός η.ε.α.})$$

- Αναγωγή εσφαγωνικής μορφής σε κανονική της μορφής

1. Εκφράσουμε την F ως προς μία ορθοκανονική βάση, από όπου προκύπτει ο πίνακας της A .

2. Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές λ_i του A οπότε προκύπτει η κανονική μορφή

$$F(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

3. Υπολογίζουμε μια βάση από ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του A , δηλ. βρίσκουμε τον ορθογώνιο πίνακα Q , οπότε είναι γνήσιος

και ο μετασχηματισμός $x = Qy$ που κάνει την αναγωγή σε κανονική μορφή

- A αντιστρέφεται, λ ιδιοτιμή, \vec{x} ιδιοδιάνυσμα \Rightarrow

$$A^{-1}: \text{ιδιοτιμή } \frac{1}{\lambda}, \text{ ιδιοδιάνυσμα } \vec{x}$$

* ΓΕΝΙΚΑ *

- $|A| = 0 \Leftrightarrow$ ο πίνακας A δεν είναι σφαιρικός (αντιστρέψιμος)
- Ένας τετραγωνικός πίνακας P λέγεται ορθογώνιος αν ισχύει $PP^T = P^T P = I \Rightarrow \boxed{P^{-1} = P^T}$
- Αν P είναι ένας ορθογώνιος πίνακας, τότε ο πίνακας $B = P^{-1}AP$ λέγεται ορθογώνιος όμοιος προς τον A
- Πίνακας P ορθομοναδιαίος $\Leftrightarrow \boxed{P^* P = I = P P^*}$
- B Σφαιρικός πίνακας $\Leftrightarrow B^*$ Σφαιρικός πίνακας
(κωμικός) $\leftarrow \rightarrow$
 $B^* B^* = B B^*$
- A ερμιτιανός $\Leftrightarrow A^* = (\bar{A})^T = A$
- f τετραγωνική μορφή \Rightarrow
 - (Σφαιρική) $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ Στενά ορισμένη
 - (Σφαιρική) $\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$ Εύρως ορισμένη
- Συμμετρικός $\Rightarrow A^T = A$
- Δύο πίνακες $A, B \in \text{Πιν}(\mathbb{R})$ καλούνται ισοτιμ αν \exists αντιστρέψιμος P τέτοιος ώστε $B = P^T A P$
- A ισοτιμ του $I_n \Rightarrow A$ πίνακας εσωτερικού γινόμενου
- Πρόταση. Αν A ορθογώνιος $n \times n$ πίνακας τότε
 1. A^T ορθογώνιος
 2. $|\det A| = 1$
 3. Κάθε συνάρτηση ιδιοτιμ $\Rightarrow \lambda = \pm 1$
↑ ασχοληθείτε

- Οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί του \mathbb{R}^2 δίνονται από τους πίνακες ως follows

$$i) A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$\det = 1$

$$ii) A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

$\det = -1$

Στρέφει στο επίπεδο \mathbb{R}^2 κατά γωνία θ

Συμμετρία στο \mathbb{R}^2 ως προς ευθεία από την αρχή των αξόνων με γωνία $\theta/2$ ως προς τον x^* .

- Ένας πηλ. πίνακας A στο \mathbb{C} είναι ορθογώνιος ως προς ορθοκανονική βάση α και μόνο αν

$$\boxed{A^* = A^{-1} \Leftrightarrow \bar{A}^T = A^{-1}}$$

- Ένας πηλ. ημι-αριθμ. πίνακας είναι ορθογώνιος, δηλ. πίνακας ορθοκανονισμού πεσ, αν και μόνο αν τα διανυσματά-οστήλη του αποτελούν ορθοκανονική βάση (κάθετα μεταξύ τους ενώ δύο και πεσ=1)

- A ορθογώνιος \Rightarrow
 - \bar{A}, A^T ορθογώνιοι
 - $|\det A| = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$.

- $\boxed{A \text{ ορθογώνιος} \Rightarrow (\bar{A})^T = A^{-1}}$ Αν X, Y είναι οι πίνακες-οστήλη των συνιστωσών δύο διανυσμάτων x, y του διανυσματικού χώρου V , ως προς μια βάση $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ τότε το ημι-αριθμ. εσωτερικό γινόμενο είναι $\boxed{\langle x, y \rangle = X^T A Y}$

Τέλος, αν B είναι ο πίνακας του εσωτερικού γινομένου ως προς μια άλλη βάση, με πίνακα αλλαγής βάσης του P , ισχύει $\boxed{B = P^T A P}$

• ΘΕΩΡΗΜΑ:

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική ισομετρία του $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$

$\exists u \in \mathbb{R}^3 \neq \vec{0}$

1. $Tu = \pm u$

2. $T[u]^\perp \subseteq [u]^\perp$

• $\left. \begin{aligned} \langle x, Ay \rangle &= \bar{a} \langle x, y \rangle \\ \langle y, y \rangle &= \langle y, \bar{x} \rangle \end{aligned} \right\} K = \mathbb{C}$

• A ορθογώνιος \Rightarrow $\left. \begin{aligned} (x, y \text{ στοιχεία } \mathbb{C}^n, \bar{A}n) \quad & x^T \bar{y} = 0 \\ & \|x\| = x^T \bar{x} = 1 \\ & \|y\| = y^T \bar{y} = 1 \end{aligned} \right\}$

• A ορθογώνιος $\Rightarrow \bar{A}, A^T$ ορθογώνιοι
 $|\det A| = 1$.

• $r^* r = |r|^2$

Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΜΑΔΑ ΤΟΥ \mathbb{R}^n (Απαντήσεις)

1. Έστω $f(x) = f(y)$. Τότε $d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.
2. $d(T_a(x), T_a(y)) = d(x+a, y+a) = \|x+a - y-a\| = \|x-y\| = d(x, y)$.
3. Αν f, g είναι ισομετρίες του \mathbb{R}^n , τότε ορίζεται η σύνδεση τους $f \circ g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και ισχύει, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, ότι:

$$d((f \circ g)(x), (f \circ g)(y)) = d(f(g(x)), f(g(y))) = d(g(x), g(y)) \quad [\text{αφού } f \text{ ισομετρία}]$$

$$= d(x, y) \quad [\text{αφού } g \text{ ισομετρία}]$$

Άρα η $f \circ g$ είναι ισομετρία.

4. Η f είναι 1-1 και επί, οπότε ορίζεται η $f^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και ισχύει ότι $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\begin{aligned} d(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))) &= d(f^{-1} \circ f(x), f^{-1} \circ f(y)) \\ &= d(x, y) \quad [\text{αφού } f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^n}] \\ &= d(f(x), f(y)) \quad [\text{αφού } f \text{ ισομετρία}] \end{aligned}$$

Η f^{-1} είναι επί, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x$.

5. Σύμφωνα με το (3) η σύνδεση απεικονίσεων είναι εσωτερική πράξη επί του $E(n)$, που ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα.

Το καλύτερο στοιχείο της πράξης αυτής είναι η ταυτοτική απεικόνιση $\text{id}_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: x \rightarrow \text{id}_{\mathbb{R}^n}(x) = x$, η οποία κινείται στο σύνολο $E(n)$, αφού

$$d(\text{id}_{\mathbb{R}^n}(x), \text{id}_{\mathbb{R}^n}(y)) = d(x, y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Λόγω της (4) για κάθε $f \in E(n)$, ισχύει ότι $f^{-1} \in E(n)$.

6. Κατ' αρχήν ισχύει ότι: $\|f(x)\| = \|x\|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. (1).

Πράγματι, $\|f(x)\| = d(f(x), 0) = d(f(x), f(0)) = d(x, 0) = \|x\|$.

Επιπλέον έχουμε, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) = d(x, y) &\Leftrightarrow \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \Leftrightarrow \|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle = \langle x - y, x - y \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle f(x), f(x) \rangle - 2\langle f(x), f(y) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\Leftrightarrow \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(y) \rangle + \|f(y)\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle. \quad (2) \end{aligned}$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι η f είναι γραμμική απεικόνιση.

Θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ του \mathbb{R}^n ,

δηλαδή $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Τότε και το σύνολο $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^n , αφού $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle \stackrel{(2)}{=} \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Αν $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$, τότε $x_i = \langle x, e_i \rangle$, $i=1, 2, \dots, n$.

Υποθέτουμε ότι $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i)$, ως προς τη βάση $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$.

Τότε $\lambda_i = \langle f(x), f(e_i) \rangle = \langle x, e_i \rangle = x_i$, οπότε θα είναι:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i). \quad (3)$$

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) e_i, \text{ οπότε θα έχουμε, λόγω (3),}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) f(e_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) + \beta \sum_{i=1}^n y_i f(e_i) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γραμμική, οπότε λόγω και του (2) είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.

7. Θεωρούμε τη μεταφορά $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: x \rightarrow T(x) := f(0) + x$, που είναι ισομετρική επί του \mathbb{R}^n , οπότε η ανεικόνιση $T^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: x \rightarrow T^{-1}(x) = -f(0) + x$ είναι ισομετρική. Επομένως και η σύνθεση $T^{-1} \circ f$ είναι ισομετρική του \mathbb{R}^n .
Επιπλέον ισχύει: $(T^{-1} \circ f)(0) = T^{-1}(f(0)) = -f(0) + f(0) = 0$, οπότε από το (6) η $T^{-1} \circ f$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, έστω $\sigma = T^{-1} \circ f$, οπότε θα είναι $f = T \circ \sigma$.

Μονοδιυότητα των T, σ

Έστω ότι $f = T \circ \sigma = T' \circ \sigma'$

Τότε $T^{-1} \circ T' \circ \sigma' = \sigma$ και $(T^{-1} \circ T' \circ \sigma')(0) = \sigma(0) \Rightarrow (T^{-1} \circ T')(0) = \sigma(0)$

$$\Rightarrow (T^{-1} \circ T')(0) = 0$$

$$\Rightarrow T^{-1} \circ T' = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \quad [\text{γιατί } T^{-1} \circ T' \text{ είναι μεταφορά με } T^{-1} \circ T'(0) = 0]$$

$$\Rightarrow T = T'$$

Από $T \circ \sigma = T \circ \sigma'$ και $T = T' \Rightarrow T \circ \sigma = T \circ \sigma'$

$$\Rightarrow T^{-1} \circ (T \circ \sigma) = T^{-1} \circ (T \circ \sigma') \Rightarrow (T^{-1} \circ T) \circ \sigma = (T^{-1} \circ T) \circ \sigma'$$

$$\Rightarrow \sigma = \sigma'$$

Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΜΑΔΑ ΤΟΥ \mathbb{R}^n

Ορισμός: Μία απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

λέγεται **ισομετρία** του \mathbb{R}^n .

Στερεά κίνηση του \mathbb{R}^n είναι μία ισομετρία επί του \mathbb{R}^n .

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι :

1. Μία ισομετρία f του \mathbb{R}^n είναι απεικόνιση 1-1.
2. Η απεικόνιση **μεταφορά** $\tau_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; x \rightarrow \tau_a(x) = x + a$, είναι ισομετρία.
3. Η σύνθεση δύο ισομετριών του \mathbb{R}^n είναι ισομετρία του \mathbb{R}^n .
4. Αν η απεικόνιση f είναι ισομετρία επί του \mathbb{R}^n , τότε ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} και είναι επίσης ισομετρία επί του \mathbb{R}^n .
5. Το σύνολο $E(n)$ των ισομετριών επί του \mathbb{R}^n αποτελεί **ομάδα** ως προς τη σύνθεση απεικονίσεων (**Ευκλείδεια ομάδα** του \mathbb{R}^n).
6. Κάθε ισομετρία $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $f(0) = 0$, είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.
7. Αν $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ισομετρία του \mathbb{R}^n να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικές απεικονίσεις

$$\tau: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ (μεταφορά)}$$

$$\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ (ορθογώνιος μετασχηματισμός)}$$

έτσι ώστε να ισχύει : $f = \tau \circ \sigma$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

ΤΕΜΦΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΙ

- 1) α) (Ένα από μοντέλο επιδημίας) Έστω x_0 το ποσοστό των υγιών και $y_0 = 100 - x_0$ το ποσοστό των ασθενών ατόμων ενός πληθυσμού. Παρατηρείται ότι μετά από κάθε χρόνο 30% των υγιών αρρωσταίνουν και 10% των ασθενών χινοται καλά. Δείξτε ότι η εξέλιξη της υγείας του πληθυσμού περιγράφεται από την εξίσωση $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Πάρτε οποιαδήποτε αρχική τιμή (x_0, y_0) και διηλεκτώστε στο ελίπτοδο XOY την ματαάσταβη υγείας των ελίπτοτων 8 ετών. Κάνετε μία υπόθεση για την ματαάσταβη υγείας μακροπρόθεσμα.
- β) Δείξτε ότι υπάρχουν αριθμός δύο $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 > \lambda_2$, τέτοια ώστε η εξίσωση $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ να έχει μη μηδενική λύση. Βρείτε τα λ_1, λ_2 και αντίστοιχες λύσεις $\vec{v} = (v_1, v_2)$ και $\vec{w} = (w_1, w_2)$. Εξηγείωστε τα αποτελέσματα ως προς το μοντέλο του ερωτήματος α).
- γ) Επιλέξτε μία αρχική ματαάσταβη (x_0, y_0) υγείας του πληθυσμού με $(x_0, y_0) \neq \vec{v}$ και \vec{w} και βρείτε $a, b \in \mathbb{R}$ με $(x_0, y_0) = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w}$. Δείξτε ότι μακροπρόθεσμα η ματαάσταβη υγείας θα είναι $a \cdot \vec{v} = (a \cdot v_1, a \cdot v_2)$.
- 2) Δείξτε ότι οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολώνυμο, αλλά δεν είναι όμοιοι.
- 3) Έστω A ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας. Δείξτε ότι:
- $\lambda \neq 0$ για κάθε ιδιοτιμή λ του A .
 - Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ οι ιδιοτιμές του A , τότε $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_s^{-1}$ οι ιδιοτιμές του A^{-1} .
 - $\text{Ker}(A^{-1} - \lambda^{-1} \cdot I_n) = \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n)$. Τι συμπαίρει αυτό;
- 4) Έστω $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 83 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Αν A^T ο ανάστροφος του A , δείξτε ότι:
- $\chi_A(\lambda) = (7 - \lambda)^3 = \chi_{A^T}(\lambda)$.
 - $\dim V_A(7) = 1$ και $\dim V_{A^T}(7) = 1$, (V_A, V_{A^T} αντίστοιχοι ιδιοχώροι).
 - $\text{Ker}(A - 7 \cdot I_3) \neq \text{Ker}(A^T - 7 \cdot I_3)$. Τι συμπαίρει αυτό;

ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

ΤΕΜΦΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ II

Σ.ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ

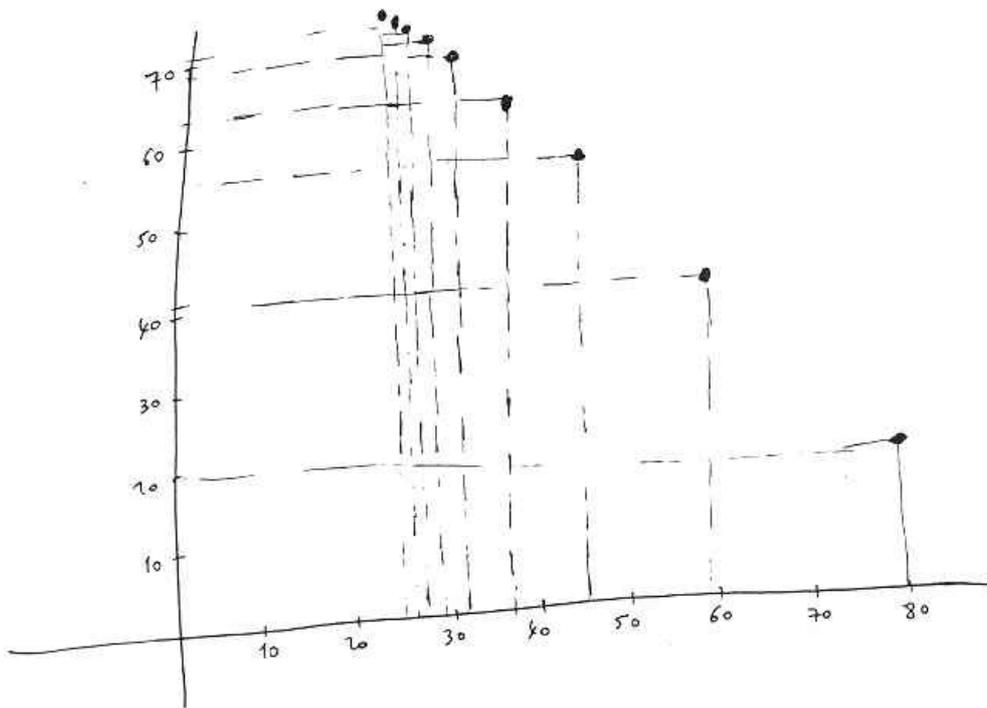
1) α) Έστω X_0 % υγιείς και $Y_0 = 100 - X_0$ % αδένεις. $\Rightarrow X_0 + Y_0 = 100$.

Βρίσκουμε $X_1 = X_0 - 0,3 X_0 + 0,1 Y_0 = 0,7 X_0 + 0,1 Y_0$
 και $Y_1 = Y_0 + 0,3 X_0 - 0,1 Y_0 = 0,3 X_0 + 0,9 Y_0$ } Άρα $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$.

Έστω τώρα αρχικές τιμές $X_0 = 80\%$ και $Y_0 = 20\%$. Τότε υπολογίζουμε:

$X_1 = 58, Y_1 = 42$ | $X_2 = 44,8, Y_2 = 55,2$ | $X_3 = 36,88, Y_3 = 63,12$
 $X_4 = 32,13, Y_4 = 67,87$ | $X_5 = 29,277, Y_5 = 70,723$ | $X_6 = 27,566, Y_6 = 72,434$
 $X_7 = 26,54, Y_7 = 73,46$ | $X_8 = 25,924, Y_8 = 74,076$.

Οι δύο ακολουθίες φαίνονται να συγκλίνουν στην εφίδωξη $Y = 3 \cdot X$.



(αν κάποιος πάρει π.χ. $X_0 = 10, Y_0 = 90 \Rightarrow X_1 = 16, Y_1 = 84, \dots$
 και οι τιμές θα συγκλίνουν στην ίδια ευθεία $Y = 3 \cdot X$).

β) Θα βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0,7 - \lambda & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1,6\lambda + 0,6 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1,6 \pm \sqrt{1,6^2 - 4 \cdot 0,6}}{2 \cdot 0,6}$$

Άρα οι ρίζες είναι οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 0,6$.

Για να βρούμε ιδιοδιάνυσμα στην ιδιοτιμή 1 έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,7x + 0,1y = x \\ 0,3x + 0,9y = y \end{cases} \Leftrightarrow y = 3x, \text{ οπότε}$$

για παράδειγμα το $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$.

Για να βρούμε ιδιοδιάνυσμα στην ιδιοτιμή 0,6 έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,6 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,7x + 0,1y = 0,6x \\ 0,3x + 0,9y = 0,6y \end{cases} \Leftrightarrow y = -x, \text{ οπότε}$$

το $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 0,6$.

Παρατηρούμε ότι η αντιστροφή του α) γίνονται στο ιδιοδιάνυσμα \vec{v} .

Δεν θα μπορούσαν να γίνουν στο \vec{w} εφόσον δεν έχουν νόημα οι αρνητικές τιμές.

γ) Έστω $x_0 = 80, y_0 = 20$. Λύνουμε την εξίσωση $(x_0, y_0) = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Βρίσκουμε } a = 25, b = 55, \text{ άρα } (x_0, y_0) = 25 \cdot \vec{v} + 55 \cdot \vec{w} \Rightarrow$$

$$(x_1, y_1) = A \cdot (x_0, y_0) = A \cdot (25\vec{v} + 55\vec{w}) = 25 \cdot A(\vec{v}) + 55 \cdot A(\vec{w})$$

$$= 25\vec{v} + 55 \cdot 0,6\vec{w}, \text{ και επαγωγικά βρίσκουμε:}$$

$$(x_n, y_n) = 25\vec{v} + 55 \cdot 0,6^n \vec{w}, \text{ άρα } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = 25\vec{v}.$$

Αυτή είναι η μακροπρόθεσμη κατάσταση υγείας και συζητούμε με το α).

2) $B = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Οι όμοιοι πίνακες προς τον B είναι της

μορφής $P^{-1} \cdot B \cdot P$, όπου P αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας.

$$\text{όμως } P^{-1} B P = P^{-1} \cdot s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P = s \cdot P^{-1} I_2 P = s \cdot I_2 = B.$$

Άρα ο B είναι ο μόνος όμοιος προς τον εαυτό του.

Άρα $A \neq B$.

3) α) Αν ήταν $\lambda=0$ ιδιοτιμή του A , θα είχαμε

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \stackrel{\lambda=0}{=} \det A \Rightarrow \chi_A(0) = \det A = 0, \text{ άρα } \underline{\text{από τον εφ'όσον } A \text{ αντιστρέψιμος.}}$$

β) Έστω $\lambda \neq 0$ μία ιδιοτιμή του A και έστω $\vec{x} \neq \vec{0}$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, δηλαδή $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \lambda \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = \lambda \cdot A^{-1} \cdot \vec{x} \Leftrightarrow A^{-1} \cdot \vec{x} = \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{x}$. Άρα το $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1} .

γ) Από τα παραπάνω έχουμε ότι αν το \vec{x} είναι ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ του A , τότε το \vec{x} είναι και ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\frac{1}{\lambda}$ του A^{-1} . Άρα $V_A(\lambda) = V_{A^{-1}}(\lambda^{-1}) \Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \text{Ker}(A^{-1} - \lambda^{-1} I_n)$. Δηλαδή έχουμε ίδια ιδιοδιανύσματα (άρα και ίδιους ιδιοχώρους) για αντίστοιχες αντίστροφες ιδιοτιμές λ, λ^{-1} .

5) α) Οι A, A^T είναι τριγωνικοί $\Rightarrow \chi_A(\lambda) = (7-\lambda)^3 = \chi_{A^T}(\lambda)$.

β) Βρίσκουμε τους ανάδοχους ιδιοχώρους:

$$V_A(7) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : (A - 7I_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 83 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = x_3 = 0.$$

Άρα $V_A(7) = \langle (1, 0, 0) \rangle$ και $\dim V_A(7) = 1$.

$$\text{Ανάλογα: } V_{A^T}(7) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : (A^T - 7I_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\text{ο ανάστροφος των } (A - 7I_3) \right) \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 83 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0.$$

Άρα $V_{A^T}(7) = \langle (0, 0, 1) \rangle$ και $\dim V_{A^T}(7) = 1$.

δ) $V_A(7) = \text{Ker}(A - 7I_3) \neq V_{A^T}(7) = \text{Ker}(A^T - 7I_3)$. Άρα οι A, A^T έχουν ίδιες ιδιοτιμές και διαφορετικά ιδιοδιανύσματα

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

ΤΕΜΦΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ II
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞ. 2001-2

- 1) Βρείτε το ελάχιστο ποσώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Διαγωνοποιείται ο A ; Στη συνέχεια υπολογίστε τον πίνακα $B = A^{2001} - 2 \cdot A^{2000} - A^{1999} + 2 \cdot A^{1998} + A^2$.

- 2) Δείξτε ότι οι παρακάτω πίνακες δεν είναι όμοιοι μεταξύ τους.

$$A = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

- 3) Δείξτε ότι οι πίνακες A και A^T (ο ανάστροφος του A) έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό και το ίδιο ελάχιστο ποσώνυμο.

- 4) Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό ποσώνυμο του πίνακα $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ είναι το γινόμενο των χαρακτηριστικών ποσώνυμων των A και B . Στη συνέχεια δείξτε ότι το ελάχιστο ποσώνυμο του C είναι το Ε.Κ.Π. των ελάχιστων ποσώνυμων των A και B .

- 5) Αν για τον πίνακα $A \in M_n(K)$ υπάρχει ελάχιστος φυσικός αριθμός p , ώστε $A^p = 0$, δείξτε ότι το χαρακτηριστικό ποσώνυμο του A είναι λ^n και το ελάχιστο ποσώνυμο είναι λ^p .
Υπόδ. θεωρήστε \vec{x} ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ και πάρτε $A^p \vec{x}$.

Σ. Πατηροπούλου

ΕΡΓΑΣΙΑ 2

ΤΕΜΦΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ II

- 1) Βρείτε το ελάχιστο ποσώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
 Διαγωνοποιείται ο A ; Στη συνέχεια υπολογίστε τον πίνακα $B = A^{2001} - 2 \cdot A^{2000} - A^{1999} + 2 \cdot A^{1998} + A^2$.

- 2) Δείξτε ότι οι παρακάτω πίνακες δεν είναι όμοιοι μεταξύ τους.

$$A = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}.$$

- 3) Δείξτε ότι οι πίνακες A και A^T (ο ανάστροφος του A) έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό και το ίδιο ελάχιστο ποσώνυμο.

- 4) Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό ποσώνυμο του πίνακα $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ είναι το γινόμενο των χαρακτηριστικών ποσώνυμων των A και B . Στη συνέχεια δείξτε ότι το ελάχιστο ποσώνυμο του C είναι το Ε.Κ.Π. των ελάχιστων ποσώνυμων των A και B .

- 5) Αν για τον πίνακα $A \in M_{n \times n}(K)$ υπάρχει ελάχιστος φυσικός αριθμός p , ώστε $A^p = 0$, δείξτε ότι το χαρακτηριστικό ποσώνυμο του A είναι λ^n και το ελάχιστο ποσώνυμο είναι λ^p .
Υπόδειξη: θεωρήστε \vec{x} ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ και πάρτε $A^p \vec{x}$.

Σ. Πατηροπούλου

ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

ΤΕΜΦΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΙ

Σ. ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ

1) Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I_4| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \dots = -(\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+1)^2.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε ότι:

$$(A - 1 \cdot I_4) \cdot (A + 1 \cdot I_4) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα θα είναι $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1) \cdot (\lambda+1) = \lambda^2 - 1$.

Το $\mu_A(\lambda)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων άρα ο A διαγωνοποιείται, σύμφωνα με γνωστό κριτήριο. Ο φάσας διαγώνιος πίνακας θα έχει στα διαγώνια του ιδιοτιμές 1, -1 ανάλογα με τις γεωμετρικές του πολλαπλασιαστές.

Εφόσον $\mu_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$, θα έχουμε $A^2 - I_4 = 0 \Leftrightarrow A^2 = I_4 \Rightarrow$
 $B = A^{2001} - 2 \cdot A^{2000} - A^{1999} + 2 \cdot A^{1998} + A^2 = A - 2 \cdot I_4 - A + 2 \cdot I_4 + I_4 = I_4.$

2) Βρίσκουμε $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) = \chi_\Gamma(\lambda) = (t-\lambda)^3$ (άρα $\lambda = t$ ή τριπλή ιδιοτιμή)

Εν συνεχεία βρίσκουμε ότι $t \cdot I_3 - A \neq 0$ και $(t \cdot I_3 - A)^2 \neq 0$, άρα

$\mu_A(\lambda) = (t-\lambda)^3$. Όμοια βρίσκουμε:

$t \cdot I_3 - B \neq 0$, άρα $(t \cdot I_3 - B)^2 = 0$, άρα $\mu_B(\lambda) = (t-\lambda)^2$. Τέλος,

$t \cdot I_3 - \Gamma = 0$ άρα $\mu_\Gamma(\lambda) = t - \lambda$. Εφόσον οι πίνακες A, B, Γ έχουν διαφορετικά ελάχιστα πολυώνυμα δεν είναι όμοιοι μεταξύ τους.

3) Έχουμε $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I) = \chi_{A^T}(\lambda)$

Έβω τώρα $p(x)$ ως αίο πολυώνυμο. Επειδή ισχύει

$$(A^T)^k = (A^k)^T \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow p(A^T) = (p(A))^T \quad (\text{δοκιμάστε}$$

ένα παράδειγμα!). Άρα $p(A^T) = \mathbf{0} \iff p(A) = \mathbf{0}$.

Αν λοιπόν M_A και M_{A^T} είναι τα ελάχιστα πολυώνυμα των A, A^T θα έχουμε: $M_A(A) = \mathbf{0} \Rightarrow M_A(A^T) = \mathbf{0}$, άρα

$$M_{A^T} \mid M_A. \quad \text{Ομοίως: } M_{A^T}(A^T) = \mathbf{0} \Rightarrow M_{A^T}(A) = \mathbf{0}, \text{ άρα}$$

$M_A \mid M_{A^T}$. Εφόσον τα δύο πολυώνυμα ηλκηλοδιαφορούνται και

είναι μονονικά (ο μεγαλύτερος συντελεστής = 1) $\Rightarrow M_{A^T} = M_A$.

4) Έβω $C = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}$ ηκη σύνθετος πίνακας με A $k \times k$ και B $(n-k) \times (n-k)$. Από ιδιότητες οριζόντιας σύνθετων πίνακας έχουμε:

$$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} A - \lambda I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B - \lambda I_{n-k} \end{vmatrix} = |A - \lambda I_k| \cdot |B - \lambda I_{n-k}| = \chi_A(\lambda) \cdot \chi_B(\lambda).$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι ισχύουν οι ιδιότητες:

$$C^m = \begin{bmatrix} A^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^m \end{bmatrix} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \mu \cdot C = \begin{bmatrix} \mu \cdot A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu \cdot B \end{bmatrix} \quad \forall \mu \in \mathbb{C},$$

$$C_1 + C_2 = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_1 + B_2 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } C_1 = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_1 \end{bmatrix} \text{ και } C_2 = \begin{bmatrix} A_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{bmatrix}.$$

Άρα, αν $q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ως αίο πολυώνυμο,

$$\text{θα έχουμε: } q(C) = \begin{bmatrix} q(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & q(B) \end{bmatrix}.$$

Έβω τώρα $M_A(\lambda)$ και $M_B(\lambda)$ τα ελάχιστα πολυώνυμα των A και B αντίστοιχα. Από τα παραπάνω θα έχουμε:

$$M_A(C) = \begin{bmatrix} M_A(A) & 0 \\ 0 & M_A(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_A(B) \end{bmatrix} \quad \text{και}$$

$$M_B(C) = \begin{bmatrix} M_B(A) & 0 \\ 0 & M_B(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_B(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι $M_A(C) \cdot M_B(C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, άρα αν

$M_C(A)$ είναι το ελάχιστο πολλαίνομο του C , θα πρέπει

$$\boxed{M_C \mid M_A \cdot M_B} \quad (1) \quad \left(\begin{array}{l} \text{π.χ. αν } M_A(\lambda) = (\lambda-1)^2 (\lambda+2)^3 (\lambda^2+1) \text{ και} \\ M_B(\lambda) = (\lambda-1) \cdot (\lambda+2)^2 \Rightarrow M_C(\lambda) \mid (\lambda-1)^3 \cdot (\lambda+2)^5 \cdot (\lambda^2+1) \end{array} \right).$$

$$\text{Όμως } M_C(C) = \begin{bmatrix} M_C(A) & 0 \\ 0 & M_C(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M_C(A) = 0 \\ M_C(B) = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Άρα } \boxed{M_A \mid M_C \text{ και } M_B \mid M_C} \quad (2) \quad (1), (2) \Rightarrow M_C = \text{E.k.D.}(M_A, M_B).$$

- 5) Έστω λ ιδιοτιμή του A και \vec{x} αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της. Τότε $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \Rightarrow A^2 \cdot \vec{x} = A \cdot \lambda \vec{x} = \lambda \cdot A \cdot \vec{x} = \lambda^2 \cdot \vec{x} \Rightarrow \dots \Rightarrow A^k \cdot \vec{x} = \lambda^k \cdot \vec{x}$
 $\forall k \in \mathbb{N}$. Άρα για $k=p$, είναι $A^p \cdot \vec{x} = \lambda^p \cdot \vec{x} \Leftrightarrow \vec{0} = \lambda^p \cdot \vec{x}$, και αφού $\vec{x} \neq \vec{0}$ σαν ιδιοδιάνυσμα, θα πρέπει $\lambda^p = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.
 Άρα το 0 είναι η μόνη ιδιοτιμή του A , άρα $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$.
 Το ελάχιστο πολλαίνομο θα είναι της μορφής $M_A(\lambda) = \lambda^r$, όπου r ο ελάχιστος αριθμός, ώστε $M_A(A) = A^r = 0$. Άρα αναγκαστικά $M_A(\lambda) = \lambda^r$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 3 ΓΡΑΜΜΙΚΗ II ΤΕΜΦΕ

- 1) (Ιδιότητες ευθείων συναρτηών πίνακα). Δείξε ότι:
- α) Αν $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ τότε $e^D = \text{diag}(e^{d_1}, e^{d_2}, \dots, e^{d_n})$.
 - β) Ο e^A είναι αντιστρέψιμος $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$.
 - γ) Η ευθείων συναρτηών πίνακων δύν είναι επί του σώσον των αντιστρέψιφων πίνακων.
 - δ) $(e^A)^T = e^{A^T}$. Στη συνέχεια, αν $A + A^T = 0$ δείξε ότι $(e^A) \cdot (e^A)^T = I$ (δηλαδή ο e^A είναι ορθογώνιος).
 - ε) $\det e^A = e^{\text{tr}A}$ (εξετάσε περίπτωσης: A διαγώνιος, A τριγωνικός, A τριγωνοποιήσιμος), όπου $A \in M_n(\mathbb{C})$.
-

2) Γνωρίζοντας ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ είναι

όμοιος προς τον τριγωνικό πίνακα $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(άρα στην τάξη)

α) Υπολογίσε τον πίνακα e^A .

β) Λύσε το ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών

εξισώσεων: $\frac{dX}{dt} = A \cdot X$, όπου $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

Σ. Πατηροπούλου

ΕΡΓΑΣΙΑ 3 - ΛΥΣΕΙΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ II
 ΤΕΜΦΕ
 Σ. Λαμπροπούλου

1) α) Έστω $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Τότε $D^2 = \text{diag}(d_1^2, d_2^2, \dots, d_n^2)$
 και γενικότερα $D^k = \text{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k)$. Άρα

$$e^D = I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots = \text{diag}\left(1 + d_1 + \frac{d_1^2}{2!} + \frac{d_1^3}{3!} + \dots, 1 + d_2 + \frac{d_2^2}{2!} + \dots, \dots\right)$$

$$= \text{diag}(e^{d_1}, e^{d_2}, \dots, e^{d_n}).$$

β) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. θ.δ.ό. e^A αντιστρέψιμος. Πράγματι, έχουμε:
 $I = e^0 = e^{A+(-A)} = e^A \cdot e^{-A}$ οπότε $A \cdot (-A) = (-A) \cdot A$. Άρα e^A
 αντιστρέψιμος και $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

γ) θ.δ.ό. όλοι οι αντιστρέψιμοι πίνακες δέν είναι της μορφής e^A
 για κάποιον $n \times n$ πίνακα A , δηλαδή ότι η ευθεία συνάρτηση
 \exp δέν είναι επί του συνόλου των αντιστρέψιμων πινάκων.
 Πράγματι, έστω ο πίνακας:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & +1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Τότε M αντιστρέψιμος, υιαν υπάρχει πίνακας D με $e^D = M$,
 θα έπρεπε ο D να είναι διαγώνιος, δηλαδή της μορφής

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}. \text{ Τότε } e^D = M \Leftrightarrow \begin{bmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & +1 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow d_2 = \dots = d_n = 0$ και $e^{d_1} = -1$, άρα, εφόσον το
 σύνολο τιμών της πραγματικής ευθείας συνάρτησης e^x , $x \in \mathbb{R}$
 είναι το \mathbb{R}_+ .

2) Έχουμε ότι $A = Q^{-1} \cdot T \cdot Q$, όπου $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ και $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Ενας αντιστρέψιμος πίνακας (αβούρα βγαυ Τάση).

a) $e^A = e^{Q^{-1} \cdot T \cdot Q} \xrightarrow[\text{βασικά}]{\text{από}} Q^{-1} \cdot e^T \cdot Q \quad \textcircled{I}$

Τώρα έχουμε $T = \Delta + \Sigma$, όπου $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ και $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Επειδή τα διαγώνια στοιχεία του Δ είναι όλα ίδια, ισχύει $\Delta \cdot \Sigma = \Sigma \cdot \Delta$.

Άρα $e^T = e^{\Delta + \Sigma} = e^{\Delta} \cdot e^{\Sigma} \quad \textcircled{II}$. Οπότε $e^A = \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}$.

Επιπλέον έχουμε: $\Sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $\Sigma^3 = 0$. Άρα

$$e^{\Sigma} = I + \Sigma + \frac{\Sigma^2}{2!} + \frac{\Sigma^3}{3!} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow e^{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textcircled{III}$$

$$\textcircled{II}, \textcircled{III} \Rightarrow e^T = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 4e^2 \\ 0 & e^2 & 2e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} \quad \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{IV} \Rightarrow e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 4e^2 \\ 0 & e^2 & 2e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Αν Δ διαγώνιος και Π τυχόν κατ' οριζόντιο, ενδέχεται $\Delta \Pi \neq \Pi \Delta$, είναι αν $\Delta = \lambda I$.

β) Έχουμε $A_1 = Q^{-1} \cdot T \cdot Q$, όπου Q ο πίνακας αλλαγής
 βάζει νέα βάση. Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό

$$Y = Q \cdot X \Leftrightarrow X = Q^{-1} \cdot Y \quad \text{όπου} \quad X' = Q^{-1} \cdot Y' \Rightarrow$$

$$\textcircled{*} X' = A_1 \cdot X \Leftrightarrow Q^{-1} \cdot Y' = A_1 \cdot Q^{-1} \cdot Y \Leftrightarrow Y' = Q \cdot A_1 \cdot Q^{-1} \cdot Y \Leftrightarrow$$

$$\textcircled{**} Y' = T \cdot Y. \text{ Αυτά είναι ευκολότερα να λυθούν.}$$

Η γενική λύση του $\textcircled{**}$ είναι: $Y(t) = e^{t \cdot T} \cdot C$, όπου

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \text{ διαδοχικά βραβεία } \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Τώρα} \quad e^{tT} = e^{t\Delta + t\Sigma} = e^{t\Delta} \cdot e^{t\Sigma} \quad (\text{εφόσον } t\Delta \cdot t\Sigma = t\Sigma \cdot t\Delta)$$

$$\text{και} \quad e^{t\Delta} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \text{ενώ} \quad e^{t\Sigma} = I + t\Sigma + \frac{t^2 \Sigma^2}{2!} \Leftrightarrow$$

$$e^{t\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 3t \\ 0 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & 3t+t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα} \quad e^{tT} = \begin{bmatrix} e^{2t} & t \cdot e^{2t} & (3t+t^2) \cdot e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 2t \cdot e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Για να λύσει του $\textcircled{*}$ τώρα έχουμε: $X(t) = e^{tA_1} \cdot C$, όπου

$$e^{tA_1} = Q^{-1} \cdot e^{tT} \cdot Q.$$

$$\delta) (e^A)^T = \left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots \right)^T = I + A^T + \frac{A^{T^2}}{2!} + \dots = e^{A^T}$$

Εξίσω τώρα $A + A^T = 0$ τότε $e^{A+A^T} = I$. Επίσης ισχύει

$A + A^T = 0 \Leftrightarrow A^T = -A \Rightarrow A \cdot (-A) = (-A) \cdot A$, άρα σύμφωνα με την ιδιότητα $A \cdot A^T = A^T \cdot A$, υα άρα $e^{A+A^T} = e^A \cdot e^{A^T} = I$. Από δ) $e^{A^T} = (e^A)^T$.

Άρα $e^A \cdot (e^A)^T = I$, δηλαδή $(e^A)^{-1} = (e^A)^T$ άρα e^A ορθογώνιος.

$$\epsilon) \text{ Έστω } A = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} \text{ τότε } e^A = \begin{bmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{bmatrix}, \text{ άρα}$$

$$\det e^A = e^{d_1} \dots e^{d_n} = e^{d_1 + \dots + d_n} = e^{\text{tr} A}$$

Εξίσω τώρα $A = \begin{bmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$ άνω τριγωνικός. Τότε ο e^A είναι

$$\text{ως follows: } e^A = \begin{bmatrix} e^{d_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{bmatrix}, \text{ όπου } A^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{bmatrix} \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Άρα } \det e^A = e^{d_1} \dots e^{d_n} = e^{d_1 + \dots + d_n} = e^{\text{tr} A}$$

Η $\exp A$ ορίζεται για κάθε αριθμό \mathbb{C} και ισχύουν όλα τα παραπάνω.

Τώρα, στο \mathbb{C} όπου οι αριθμοί είναι τριγωνοποιήσιμοι, άρα υπάρχει

P αντιστρέψιμος τέ $A = P^{-1} \cdot T \cdot P$, όπου T τριγωνικός. Επίσης οι

\det και tr είναι αναλλοίωτοι ως προς την ομοιότητα αριθμών, δηλαδή:

$$\det e^A = \det(e^{P^{-1} \cdot T \cdot P}) = \det(P^{-1} \cdot e^T \cdot P) = \det e^T \text{ και}$$

$$e^{\text{tr} A} = e^{\text{tr}(P^{-1} \cdot T \cdot P)} = e^{\text{tr} T}. \text{ Άρα από παραπάνω } \det e^A = e^{\text{tr} A}$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 4

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Τ.Ε.Μ.Φ.Ε.

- 1) Έστω A ένας 6×6 πίνακας με στοιχεία στο \mathbb{R} , και έστω $\chi_A(\lambda) = (\lambda^2 + 5) \cdot (\lambda - 1)^4$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και $\mu_A(\lambda) = (\lambda^2 + 5) \cdot (\lambda - 1)^2$ το ελάχιστο πολυώνυμο του A .
- α) Βρείτε τις πιθανές ριζές και τονιές μορφές του A .
- β) Βρείτε τις πιθανές μορφές Jordan του A , όταν ο A θεωρηθεί ότι έχει στοιχεία στο \mathbb{C} .

- 2) Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan J και μια βάση Jordan για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια να προσδιορίσει πίνακα P , τέτοιος ώστε $P^{-1} \cdot A \cdot P = J$.

- 3) Να λυθεί το διαφορικό σύστημα $X'(t) = A \cdot X(t)$, όπου A ο πίνακας της Άσκησης 2 και $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$.

Σ. Λατρινόπουλος.

ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4

ΓΡΑΜΜΙΚΗ II

1) α) Οι πιθανοί στοιχειώδεις διαρρέτες είναι:

(i) $\lambda^2 + 5$, $(\lambda - 1)^2$, $\lambda - 1$, $\lambda - 1$

(ii) $\lambda^2 + 5$, $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda - 1)^2$

Κι εφόσον $(\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, οι πιθανές πρώτες μορφές των A είναι:

(i)
$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$
 και (ii)
$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

β) Αν τα στοιχεία των A είναι μιγαδικά, τότε:

$\chi_A(\lambda) = (\lambda - i\sqrt{5})(\lambda + i\sqrt{5})(\lambda - 1)^4$ και

$\psi_A(\lambda) = (\lambda - i\sqrt{5})(\lambda + i\sqrt{5})(\lambda - 1)^2$,

οπότε οι πιθανοί στοιχειώδεις διαρρέτες των A είναι:

(i) $\lambda - i\sqrt{5}$, $\lambda + i\sqrt{5}$, $(\lambda - 1)^2$, $\lambda - 1$, $\lambda - 1$

(ii) $\lambda - i\sqrt{5}$, $\lambda + i\sqrt{5}$, $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda - 1)^2$.

Άρα οι πιθανές κανονικές μορφές Jordan των A θα είναι:

Άρα το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα v_3 είναι της μορφής:
 $(x_1, x_2, x_2, -2x_1 - a)$ και προέρχεται από ιδιοδιάνυσμα της
 μορφής: $(a, -a, -a, -2a)$. Θέτοντας $a=1$ παίρνουμε
 το ιδιοδιάνυσμα $v_1 = (1, -1, -1, -2)$ και γενικευμένο της
 μορφής: $v_3 = (x_1, x_2, x_2, -2x_1 - 1)$.

Εξάλλου, θέτοντας $a=1$ και $b=0$ βγών αρχική γενική μορφή
 ιδιοδιανυσμάτων παίρνουμε ένα δεύτερο γραφ. αντφ. ιδιοδιάνυσμα
 ω: $v_2 = (1, 0, 0, -2)$.

Ζητάει τώρα δεύτερο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $v_4 = (y_1, y_2, y_3, y_4)$
 που προκύπτει από το v_3 μέσω της επίδρασης:

$$(A - 2I) \cdot v_4 = v_3 \Leftrightarrow (\Sigma_2) : \begin{cases} -2y_1 - 2y_2 + 2y_3 - y_4 = x_1 & (1) \\ 2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = x_2 & (2) \\ 4y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 2y_4 = -2x_1 - 1 & (3) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (1)+(2) &\Rightarrow -y_2 + y_3 = x_1 + x_2 \\ (1)-(2)+(3) &\Rightarrow x_1 - x_2 - 2x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1 - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_3 = y_2 - 1$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $y_4 = -2y_1 - x_1 - 2$

Άρα η γενική μορφή του v_3 είναι:

$$v_3 = (x_1, -x_1 - 1, -x_1 - 1, -2x_1 - 1) \text{ ενώ του } v_4:$$

$$v_4 = (y_1, y_2, y_2 - 1, -2y_1 - x_1 - 2). \text{ Θέτοντας } x_1 = 0 \text{ παίρνουμε:}$$

$$v_3 = (0, -1, -1, -1) \text{ και } v_4 = (y_1, y_2, y_2 - 1, -2y_1 - 2).$$

$$\text{Θέτοντας και } y_1 = 0, y_2 = 0 \text{ παίρνουμε } v_4 = (0, 0, -1, -2).$$

Άρα μια διατεταγμένη βάση Jordan θα είναι η (v_1, v_3, v_4, v_2)

(η ισοδύναμη η: (v_2, v_1, v_3, v_4)), και θα έχουμε:

$$A \sim J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $v_4 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_2$
στην
συν

$$(i) \text{ Ισοδύναμα: } J' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $v_2 \quad v_1 \quad v_3 \quad v_4$
στην
συν

Άρα ο P θα είναι ο πίνακας:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \text{ Ισοδύναμα ο } P' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

3) Γενική λύση: $X(t) = e^{tA} \cdot C$ (*), όπου C διάνυσμα σταθερών συστατικών.
 Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $Y = P \cdot X \Rightarrow Y(t) = e^{tJ} \cdot C$ (**)

Είναι η γενική λύση των νέων συστατικών.

Από (***) \Rightarrow (*) διότι: $A = P^{-1} \cdot J \cdot P$, άρα $tA = P^{-1} \cdot tJ \cdot P \Rightarrow e^{tA} = P^{-1} \cdot e^{tJ} \cdot P$.

Υπολογισμός των e^{tJ} : $J = \Delta + \Sigma$, όπου $\Delta = \text{diag}(2, 2, 2, 2)$ και

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^3 = 0.$$

Άρα $e^{tJ} = e^{t\Delta + t\Sigma} = e^{t\Delta} \cdot e^{t\Sigma}$, εφόσον $t\Delta \cdot t\Sigma = t\Sigma \cdot t\Delta$.

$e^{t\Delta} = \text{diag}(e^{2t}, e^{2t}, e^{2t}, e^{2t})$ και

$$e^{t\Sigma} = I + t\Sigma + \frac{t^2 \Sigma^2}{2!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & t/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 5

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II - ΤΕΜΦΕ

ΧΩΡΟΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1. Να αποδείξετε ότι η σχέση $\langle A, B \rangle := \text{tr} AB^T$ ορίζει στο διανυσματικό χώρο $M_n(\mathbb{R})$ των $n \times n$ πραγματικών πινάκων ένα πραγματικό εσωτερικό γινόμενο.

Να αποδείξετε ότι η σχέση $\langle A, B \rangle := \text{tr} A\bar{B}^T$ ορίζει στο διανυσματικό χώρο $M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων ένα μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο.

Να αποδείξετε ότι η βάση $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ του διανυσματικού χώρου $M_n(K)$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι ορθοκανονική ως προς το αντίστοιχο της από τα παραπάνω εσωτερικά γινόμενα.

Στο 2. και 3. να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Gram-Schmidt

2. Στο διανυσματικό χώρο $C[a, b]$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού $[a, b]$, να αποδείξετε ότι η σχέση

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ορίζει ένα πραγματικό εσωτερικό γινόμενο.

3. Στο χώρο των πραγματικών πολυωνύμων P_3 βαθμού το πολύ 3 με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle P(x), Q(x) \rangle := \int_1^2 P(x)Q(x)dx$$

να προσδιορίσετε με τη μέθοδο Gram-Schmidt μία ορθοκανονική βάση.

4. Στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο

(i) Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του $u = (1, -1, 2)$ πάνω στον υπόχωρο U που παράγεται από το $v = (0, 1, 1)$.

(ii) Να βρεθεί μία βάση του W^\perp , αν είναι $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, y - z = 0\}$

5. Στον Ορθομοναδιαίο χώρο \mathbb{C}^3 με εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από τον πίνακα

$$G = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 2 \end{bmatrix},$$

ως προς τη κανονική βάση του \mathbb{C}^3 , να βρεθεί μία βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος του υποχώρου U που παράγεται από το $u = (-i, 0, 1)$.

ΛΥΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5

ΓΡΑΜΜΙΚΗ II ΤΕΜΠΕ

$$1) \text{ (i) } \langle \lambda A + \mu B, \Gamma \rangle = \text{tr} [(\lambda A + \mu B) \cdot \Gamma^T] = \lambda \cdot \text{tr} A \Gamma^T + \mu \cdot \text{tr} B \Gamma^T$$

όμοια για $\langle A, \lambda B + \mu \Gamma \rangle$.

$$\text{(ii) } \left. \begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \text{tr} A B^T \\ \langle B, A \rangle &= \text{tr} B A^T \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{όπου } (A B^T)^T = B A^T \text{ και αντιστοίχοι} \\ &\text{πίνακες έχουν ίδια διαγώνια στοιχεία, άρα} \\ &\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{(iii) } \langle A, A \rangle = \text{tr} A A^T$$

Έστω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$, όπου $i, j = 1, \dots, n$.

$$\text{Τότε έχουμε: } \langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

$$\text{Άρα } \langle A, A \rangle = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0. \text{ Ενόπλιως } \langle A, A \rangle = 0$$

αν και μόνο αν $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \Leftrightarrow A$ ο μηδενικός πίνακας.

$$b) \text{ Έστω τώρα } \langle A, B \rangle = \text{tr} A \bar{B}^T \text{ στο χώρο } M_n(\mathbb{C}).$$

Η διγραμμικότητα αποδεικνύεται όπως παραπάνω.

$$\text{(ii) } \left. \begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \text{tr} A \bar{B}^T \\ \langle B, A \rangle &= \text{tr} B \bar{A}^T \text{ και } (A \bar{B}^T)^T = \bar{B} A^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle A, B \rangle = \langle \bar{B}, A \rangle$$

$$\text{(iii) } \text{tr} A \bar{A}^T = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \bar{a}_{ij} = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \geq 0, \text{ και}$$

$$\langle A, A \rangle = 0 \text{ αν και μόνο αν } a_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow A = 0.$$

δ) Στις δύο απροζήσεις έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} \\ \langle A, B \rangle &= \sum_{i,j} a_{ij} \bar{b}_{ij} \end{aligned} \right\} \text{άρα}$$

και στις δύο περιπτώσεις :

$$\langle E_{ij}, E_{kl} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{αν } (i,j) \neq (k,l) \\ 1, & \text{αν } (i,j) = (k,l) \end{cases} \quad \text{αρα } E_{ij}, E_{kl} \text{ ορθοκανονική.}$$

2) (i), (ii) προφανείς ιδιότητες.

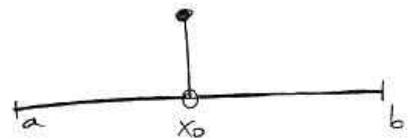
$$(iii) \langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0.$$

Κι επειδή f συνεχής αν $f \neq 0 \Rightarrow \langle f, f \rangle > 0$.

Άρα $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Π.χ. η f που ορίζεται από τα γραφικά :

$$\text{δηλαδή } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, x_0) \cup (x_0, b] \\ 1, & x = x_0 \end{cases}$$



δεν είναι η μηδενική συνάρτηση,
έχει όμως ολοκλήρωμα μηδέν.

3) Επιστρέφουμε στο χώρο P_3 με βάση $(1, x, x^2, x^3)$ και θα εφαρμόσουμε βάσει τη μέθοδο Gram-Schmidt.

Θέτουμε $V_0 = 1$ και επιλέγουμε

$$\langle x, 1 \rangle = \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0. \quad \text{Θέτουμε } V_1 = x, \text{ τότε } x \perp V_0.$$

Συνεπώς $V_2 = x^2 + \alpha x + \beta \cdot 1$, ζήτουμε ώστε

$$\langle V_2, V_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 (x^2 + \alpha x + \beta) x dx = \frac{2}{3} \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

$$\text{και } \langle V_2, V_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 (x^2 + \alpha x + \beta) dx = \frac{2}{3} + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Άρα } V_2 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Τέλος ζυγαίει $V_3 = x^3 + ax^2 + bx + c$, ζήτουμε ώστε

$V_3 \perp V_2, V_3 \perp V_1, V_3 \perp V_0$. Εφόσον το V_2 είναι γραμμ. συνδυασμός των $1, x, x^2$, αρκεί να έχουμε συνδυασμό ώστε $V_3 \perp x^2, V_3 \perp x,$

$$V_3 \perp 1.$$

Διευρώνω:

$$0 = \langle v_3, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 = a \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 + c \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = a \frac{2}{5} + \frac{2}{3}c$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c = 0 \quad (*)$$

$$0 = \langle v_3, x \rangle = \int_{-1}^1 x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b \Leftrightarrow \boxed{b = -\frac{3}{5}}$$

$$0 = \langle v_3, 1 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 + ax^2 + bx + c = \frac{2}{3}a + 2c \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{2}{3}a + 2c = 0} \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow a = c = 0, \text{ άρα } \boxed{v_3 = x^3 - \frac{3}{5}x}$$

Αρα βρίσκουμε ορθογώνια διανύσματα v_0, v_1, v_2, v_3 . Τώρα θα
θα ορθοκανονικοποιήσουμε. Ορίζουμε $\boxed{w_0 = v_0}$.

$$\text{Έχουμε } \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \|x\| = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ επομένως } \langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ορίζουμε } \boxed{w_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}x}.$$

$$\text{Εν συνεχεία ορίζουμε: } \|v_2\| = \sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle} \text{ και } \|v_3\| = \sqrt{\langle v_3, v_3 \rangle}.$$

$$\text{Ορίζουμε } \boxed{w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}} \text{ και } \boxed{w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}} \text{ βρίσκουμε τον}$$

ορθοκανονικό βάση (w_0, w_1, w_2, w_3) του P_3 .

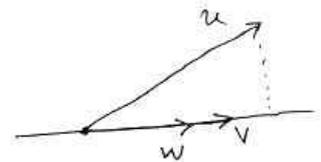
$$4) \text{ i) } u = (1, -1, 2), \quad v = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle. \text{ Βρίσκουμε } \|v\| = \sqrt{2}.$$

$$\text{Έστω } w = \frac{v}{\|v\|} = \frac{v}{\sqrt{2}}. \text{ Τότε } \|w\| = 1.$$

Η προβολή του u στον U είναι

$$\boxed{w \cdot \langle u, w \rangle}. \text{ Έχουμε } \langle u, w \rangle = \left\langle (1, -1, 2), \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Άρα } w \cdot \langle u, w \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} w = \frac{1}{2} v.$$



(ii) Ο W είναι μια ευθεία, η οποία των επιπέδων $x+y+z=0$ και $y-z=0$ με αντίστοιχα νόρμα διαστέφα τα $n_1 = (1, 1, 1)$ και $n_2 = (0, 1, -1)$.
 Άρα μια βάση του ορθογώνιου χώρου W^\perp θα είναι $\{n_1, n_2\}$.

β' ζήτημα: Βρίσκουμε βάση για τον W :

$y=z$, $x+y+z=0 \Leftrightarrow x=-2y$. Άρα το οποιοδήποτε σημείο του W είναι της μορφής: $(-2y, y, y) = y \cdot (-2, 1, 1)$, άρα

$W = \langle (-2, 1, 1) \rangle$. Συνεπώς όλα τα διανύσματα

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ με $(x, y, z) \perp (-2, 1, 1) \Leftrightarrow$

Άρα αν μεμονωμένα των επιπέδων $-2x+y+z=0$. Άρα το επίπεδο είναι ο W^\perp . Ορίζουμε $z=1, y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ ή $z=0, \dots$ βρίσκουμε βάση του W^\perp .

5). Έστω $U = \langle \underset{u}{(-i, 0, 1)} \rangle$. Για να βρούμε τον U^\perp συνεπώς όλα τα $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : (x, y, z) \perp u \Leftrightarrow$

$$\langle (x, y, z), (-i, 0, 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x, y, z) \cdot \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \text{ Άρα ελι}$$

βρίσκουμε μια επίλυση ως προς x, y, z (είναι επίπεδο στον \mathbb{C}^3) και δίνοντας ανεξάρτητες τιμές στα z, y βρίσκουμε δύο βασικά διανύσματα του U^\perp .