ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»

3/03/2003 *ΩΡΑ: 8:30*

Θέμα 1ο (βαθ. 2)

Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των ελλείψεων:

$$3x^2 + y^2 = cx.$$

Θέμα 2ο (βαθ. 2)

Έστω $y_1(x), y_2(x)$ δύο λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = 0$, όπου $p(x), q(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα (α, β).

α) Δείξτε ότι οι $y_1(x), y_2(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $W(x_0) \neq 0$, όπου $W(x)$ είναι η ορίζουσα Wronski των λύσεων $y_1(x), y_2(x)$.

β) Αν οι $y_1(x), y_2(x)$ έχουν τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τότε οι $y_1(x), y_2(x)$ δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Θέμα 3ο (βαθ. 2)

Μ.Μ.Π.

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y''(x) + y(x) = \frac{3}{\cos x} + e^{3x} - 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Θέμα 4ο (βαθ. 2)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών: $y''(t) + 9y(t) = g(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$, όπου

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ t-1, & 1 < t < 5, \\ 4, & t > 5. \end{cases}$$

Θέμα 5ο (βαθ. 2)

Να βρεθεί υπό μορφή γενικευμένης δυναμοσειράς με κέντρο το $x_0 = 0$ η λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$4x^2 y''(x) - 2x\,y'(x) + (2-x)\,y(x) = 0,$$

που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης δεικτών.

Δίνονται:

1) $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$, 2) $\mathcal{L}\{\sin \alpha t\} = \dfrac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$,

3) $\mathcal{L}\{\varphi(t-\alpha)H(t-\alpha)\} = e^{-\alpha s}\Phi(s), \quad \alpha \ge 0$, όπου $\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \Phi(s)$ και

$$H_\alpha(t) = H(t-\alpha) = \begin{cases} 1, & t \ge \alpha \\ 0, & t < \alpha \end{cases}$$ η συνάρτηση *Heaviside*

4) $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ