ΣΧΟΛΗ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΞΑΜΗΝΟ: $9^0$
ΜΑΘΗΜΑ: ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. ΚΕΧΑΓΙΑΣ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ: 2 ΩΡΕΣ
ΘΕΜΑΤΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ.
ΟΧΙ ΒΙΒΛΙΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ.

ΘΕΜΑ 1: Θεωρήστε ένα σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x *με ταχύτητα* που εξαρτάται από τον χρόνο τέτοια ώστε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{gt}{\sqrt{1+g^2t^2}}$$

*με* g σταθερό.

1) Μπορεί ποτέ η ταχύτητα του σωματιδίου να υπερβεί την ταχύτητα του φωτός (Εδώ θεωρήστε c=1);
2) Υπολογίστε το τετράνυσμα της ταχύτητας του σωματιδίου.
3) Εκφράστε τα x *και* t σαν συναρτήσεις του ιδιοχρόνου.
4) Πόση είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου;

ΘΕΜΑ 2: Θεωρήστε τη γεωμετρία «σκουληκότρυπας» με μετρική που δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + (z^2+b^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Ποια η γεωμετρία για 1) |z|>>b, 2) |z|<<b (b>0); Μπορείτε να φανταστείτε γιατί ονομάζεται «σκουληκότρυπα»; Να βρεθούν οι γεωδαισιακές στον παραπάνω χωροχρόνο *στο* $\theta=\pi/2$.

ΘΕΜΑ 3: Η μετρική που περιγράφει μία μελανή οπή είναι:

$$ds^2 = -(1-\frac{2GM}{r})dt^2 + \frac{1}{1-\frac{2GM}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Από τα δύο φαινομενικά ανώμαλα «σημεία» r = 0, r = 2GM , δείξτε ότι το δεύτερο είναι απλά ανωμαλία συντεταγμένων.

<u>Υπόδειξη</u>: Βρείτε την μορφή του χώρου γύρω από r = 2GM κάνοντας την προσέγγιση r~2GM+ε όπου ε<<2GM και κρατώντας τον πρώτο κυρίαρχο όρο στο ε. Στην προσεγγιστική μετρική που θα βρείτε κάντε την αλλαγή μεταβλητών

$$t = 4GM\tanh^{-1}(\frac{X}{T}), \qquad \varepsilon = \frac{1}{8GM}(X^2 - T^2)$$

ΘΕΜΑ 4: Τα μιόνια (μ) είναι υποατομικά σωματίδια με χρόνο ζωής $\tau_\mu=2\text{x}10^{-6}$ s. Μπορούν να παραχθούν από κοσμική ακτινοβολία στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας. Κάποια από αυτά μπορούν να ανιχνευτούν από κατάλληλες συσκευές (ανιχνευτές μιονίων) στην επιφάνεια της *γης* προτού διασπαστούν σύμφωνα με την αντίδραση

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

Θα περίμενε λοιπόν κανείς, μιόνια τα οποία παράχθηκαν στην ατμόσφαιρα, για παράδειγμα, στα 10km από την επιφάνεια της γης και τα οποία κινούνται με 0.999c , *να* διανύσουν μία απόσταση περίπου ίση με L=0.999c $\tau_\mu \sim$ 600 m προτού διασπαστούν. Πως λοιπόν φτάνουν στην επιφάνεια της γης;

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad \gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Δίνονται:

Θέμα 1: $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}(x)$ ,

Θέμα 3: $\frac{d}{dx}\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}$