ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

9 Φεβρουαρίου, 2005

Θέμα 1. Έστω το σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο και έστω $\varepsilon > 0$.

(α') Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο G με $G \supseteq E$ και $m(G \setminus E) < \varepsilon$. Επίσης, να αποδειχθεί ότι υπάρχει κλειστό σύνολο F με $F \subseteq E$ και $m(E \setminus F) < \varepsilon$. (1,5 μον.)

(β') Έστω $m(E) < \infty$. Αν $E_n := E \cap [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί πρώτα ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $m(E) < m(E_{n_0}) + \varepsilon/2$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει συμπαγές σύνολο K με $K \subseteq E$ και

$$m(E \setminus K) < \varepsilon.$$

(1 μον.)

Απόδειξη.

(α') Βλέπε τις σημειώσεις του μαθήματος.

(β') Είναι $m(E_n) < \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $E_n \subseteq E_{n+1}$, η (E_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και από γνωστή πρόταση $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = m(E) < \infty$. Επομένως, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$m(E) - m(E_{n_0}) < \varepsilon/2 \quad \text{και ισοδύναμα} \quad m(E) < m(E_{n_0}) + \varepsilon/2.$$

Από το (α') υπάρχει κλειστό σύνολο K με $K \subseteq E_{n_0}$ και $m(E_{n_0} \setminus K) = m(E_{n_0}) - m(K) < \varepsilon/2$, δηλαδή $m(E_{n_0}) < m(K) + \varepsilon/2$. Άρα, $m(E) < m(K) + \varepsilon$ και ισοδύναμα $m(E \setminus K) < \varepsilon$. Επειδή $K \subseteq E_{n_0}$, το K είναι κλειστό και φραγμένο και επομένως συμπαγές σύνολο.

■

Θέμα 2. Έστω η συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, όπου $E \in \mathcal{M}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν το σύνολο $E_r := \{x \in E : f(x) \geq r\}$ είναι μετρήσιμο για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, όπου $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών. (1 μον.)

Απόδειξη. Αν η f είναι μετρήσιμη, από γνωστή πρόταση το E_r είναι μετρήσιμο, $r \in \mathbb{Q}$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι τα σύνολα E_r είναι μετρήσιμα, για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Αν $a \in \mathbb{R}$, υπάρχει αύξουσα ακολουθία (r_n) ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} r_n = a$. Επομένως, το

$$\{x \in E : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) \geq r_n\}$$

είναι ένα μετρήσιμο σύνολο. Δηλαδή το $\{x \in E : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και επομένως η f είναι μετρήσιμη. ■

Θέμα 3. Έστω η $f \in L_1(E)$, όπου E είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(α') Αν $E_c = \{x \in E : |f(x)| \geq c\}$, $c \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{c\to\infty} \int_{E_c} |f| \, dm = 0$. (1,2 μον.)

(β') Χρησιμοποιώντας το (α'), να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$, με $m(A) < \delta$, είναι $\int_A |f| \, dm < \varepsilon$. (1,3 μον.)

Απόδειξη.

(α') Έστω (c_n) πραγματική ακολουθία με $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ και έστω $f_n = |f|\chi_{E_{c_n}}$. Επειδή η $f \in L_1(E)$, από γνωστή πρόταση θα είναι $|f| < \infty$ $\sigma.\pi.$ και επομένως $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ $\sigma.\pi.$ στο E. Επίσης, $f_n \le |f| \in L_1(E)$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_{c_n}} |f| \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, dm = 0 .$$

Άρα, $\lim_{c\to\infty} \int_{E_c} |f| \, dm = 0$.

(β') Από το (α'), για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\int_{E_c} |f| \, dm < \varepsilon/2$. Έστω $0 < \delta \le \varepsilon/2c$. Αν το $A \subseteq E$ είναι μετρήσιμο σύνολο με $m(A) < \delta$, επειδή $E \setminus E_c = \{x \in E : |f(x)| < c\}$, τότε

$$\int_A |f| \, dm = \int_{A\cap E_c} |f| \, dm + \int_{A\cap(E\setminus E_c)} |f| \, dm < \varepsilon/2 + c \cdot m(A) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

■

Θέμα 4. (α') Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, $f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, όπου $E \in \mathcal{M}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, να αποδειχθεί ότι

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \, dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n(x)| \, dm(x) .$$

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n(x)| \, dm(x) < \infty$, τι συμπεραίνετε για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (1 μον.)

(β') Έστω $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ είναι μια αρίθμηση των ρητών αριθμών στο $[0,1]$ και έστω (a_n) πραγματική ακολουθία με $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |x - r_n|^{-1/2}$ συγκλίνει απόλυτα $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$.

(1 μον.)

(γ') Να υπολογιστεί το

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\,\pi/2]} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x \, dm(x) .$$

(1 μον.)

Λύση.

(α') Για την απόδειξη της ισότητας βλέπε τις σημειώσεις του μαθήματος. Από την υπόθεση είναι $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \, dm(x) < \infty$ και αυτό συνεπάγεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο E. Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει απόλυτα $\sigma.\pi.$ στο E.

(β') Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 |x - r_n|^{-1/2} \, dx = \int_0^{r_n} (r_n - x)^{-1/2} \, dx + \int_{r_n}^1 (x - r_n)^{-1/2} \, dx = 2r_n^{1/2} + 2(1 - r_n)^{1/2} ,$$

δηλαδή συγκλίνει. Αν $M = 2r_n^{1/2} + 2(1 - r_n)^{1/2}$, από γνωστό θεώρημα

$$\int_{[0,1]} |x - r_n|^{-1/2} \, dm(x) = \int_0^1 |x - r_n|^{-1/2} \, dx = M$$

και επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_{[0,1]} |x - r_n|^{-1/2} \, dm(x) = M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Από το (α') (δηλαδή από το θεώρημα B. Levi) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |x - r_n|^{-1/2}$ συγκλίνει απόλυτα $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$.

(γ') Η $f_n(x) := \left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x$ είναι ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $[0,\pi/2]$ και από γνωστό θεώρημα $\int_{[0,\pi/2]}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x\,\mathrm{d}m(x) = \int_0^{\pi/2}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x\,\mathrm{d}x$. Επίσης, για κάθε $x \in (0,\pi/2]$, από τη γεωμετρική σειρά έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n = \frac{1}{1-\left(1-\sqrt{\sin x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}.$$

Επομένως, από το (α') είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{[0,\pi/2]}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x\,\mathrm{d}m(x) &= \int_{[0,\pi/2]}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_{[0,\pi/2]}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\sqrt{\sin x}\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = 2.\end{aligned}$$

<u>*Σημείωση.*</u> Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2}\cos x/\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x = 2$, δηλαδή συγκλίνει, από γνωστό θεώρημα είναι $\int_{[0,\pi/2]}\cos x/\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}m(x) = \int_0^{\pi/2}\cos x/\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x = 2$.

■

Θέμα 5. Έστω $f_n(x) = nx\ln x/\left(1+n^2x^2\right)$, $x \in (0,1]$. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x).$$

Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (1,5 μον.)

Λύση. Για κάθε $x \in (0,1]$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x\ln x\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n^2x^2} = x\ln x\lim_{t\to\infty}\frac{t}{1+t^2x^2} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} x\ln x\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2tx^2} = 0.$$

Επειδή $1+n^2x^2 \geq 2nx$, για κάθε $x \in (0,1]$ είναι

$$|f_n(x)| = \frac{nx\,|\ln x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{nx\,|\ln x|}{2nx} = \frac{|\ln x|}{2}$$

και η συνάρτηση $g(x) := |\ln x|/2$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,1]$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση εύκολα αποδεικνύεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1\frac{|\ln x|}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

δηλαδή ότι συγκλίνει. Επομένως, από γνωστό θεώρημα η $g \in L_1(0,1]$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_{(0,1]}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = 0.$$

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες