ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 4/7/2005

Θέμα 1. (α) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X. Δείξτε ότι

(i) Αν $Y^o \neq \varnothing$, τότε $Y = X$.

(ii) Η κλειστότητα $\overline{Y}$ του Y είναι υπόχωρος του X.

(β) Έστω X διανυσματικός χώρος και Y, Z υπόχωροι του X τέτοιοι ώστε $Y \cap Z = \{0\}$. Δείξτε ότι για κάθε $w \in < Y \cup Z >$ υπάρχουν μοναδικά $y \in Y$ και $z \in Z$ ώστε $w = y + z$.

Θέμα 2. (α) Έστω H χώρος Hilbert και F, G κλειστοί υπόχωροι του H τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in F$ και για κάθε $y \in G$ έχουμε $x \perp y$.

(i) Δείξτε ότι ο $F + G$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.

(ii) Δείξτε ότι αν $x \in F$, τότε $d(x, G) = \|x\|$.

(β) Έστω Y κλειστό υπερεπίπεδο του χώρου $(X, \|\cdot\|)$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής γραμμική $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $Ker f = Y$.

Θέμα 3. (α) Πότε δύο κυρτά K_1, K_2 σε ένα χώρο με νόρμα λέμε ότι διαχωρίζονται και πότε ότι διαχωρίζονται γνήσια;

(β) Διατυπώστε το θεμελιώδες διαχωριστικό θεώρημα.

(γ) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in X$, υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ και $x^*(x) = \|x\|$.

(ii) Αν $(x_n)_n$ είναι αριθμήσιμο πυκνό στον X και $(x_n^*)_n$ ακολουθία στον X^* τέτοια ώστε $x_n^*(x_n) = \|x_n\|$ και $\|x_n^*\| = 1$, δείξτε ότι $\bigcap_n Ker x_n^* = \{0\}$.

Θέμα 4. Έστω $(t_n)_n$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$. Για κάθε $f \in C[0, 1]$ θεωρούμε την ακολουθία $\left(\frac{f(t_n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

(α) Δείξτε ότι ο τελεστής $T : C[0, 1] \to c_0(\mathbb{N})$, όπου $T(f) = \left(\frac{f(t_n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, είναι γραμμικός και 1-1.

(β) Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος και υπολογίστε τη νόρμα $\|T\|$ του T.

(γ) Έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $f \in C[0, 1]$ ώστε $\|f\|_\infty = 1$ και $\|T(f)\|_{c_0} < \varepsilon$.

Θέμα 5. Έστω K κυρτό συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$.

(α) Αν $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμική συνεχής και $M = \max\{f(x) : x \in K\}$, δείξτε ότι το σύνολο $\{x \in K : f(x) = M\}$ είναι ακραίο υποσύνολο του K.

(β) Έστω $(Y, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμική συνεχής. Δείξτε ότι

(i) Το $T(K)$ είναι κυρτό και συμπαγές.

(ii) Αν $y \in Ex(T(K))$, δείξτε ότι το $T^{-1}(y)$ είναι ακραίο υποσύνολο του K.

(iii) Χρησιμοποιώντας το (ii) δείξτε ότι για κάθε $y \in Ex(T(K))$ υπάρχει $x \in Ex(K)$ ώστε $T(x) = y$.