ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ» ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 16/9/2002, ΩΡΑ:15.00

Θέμα 1°: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(\rho,\varphi,t)=\frac{1}{c^2}u_{tt},\quad 0\le\rho<3,\ 0\le\varphi<2\pi,\ t>0,\\ &u(3,\varphi,t)=0,\\ &u(\rho,\varphi,0)=5J_0(\frac{\mu_{05}}{3}\rho),\quad u_t(\rho,\varphi,0)=3J_1(\frac{\mu_{18}}{3}\rho)\sin\phi,\end{aligned}\right\}\qquad (1,75\mu o\nu.)$$

όπου J_n συναρτήσεις Bessel $n-$ τάξης, μ_{nm} ρίζες των Bessel και σχέση ορθογωνιότητας: $\int_0^a J_n(\mu_{nm}\frac{\rho}{a})J_n(\mu_{nk}\frac{\rho}{a})\rho\, d\rho=\frac{a^2}{2}[J_{n+1}(\mu_{nm})]^2\delta_{mk}$,

(Δίνεται ο διαφορικός τελεστής *Laplace* σε πολικές συντεταγμένες:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}).$$

Θέμα 2°: Να βρεθεί η συνάρτηση *Green* του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(x_1,x_2)=0,\quad \underset{\sim}{x}=(x_1,x_2)\in(0,+\infty)\times(-\infty,\infty),\\ &u(0,x_2)=g(x_2),\end{aligned}\right\}\qquad (1,75\mu o\nu.)$$

όπου g γνωστή συνάρτηση. Να γραφεί η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης.
(Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή *Laplace* στον $\mathbb{R}^2$:

$$E(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{x}')=\frac{1}{2\pi}\ln[(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2]^{1/2}).$$

Θέμα 3°: Να προσδιορίσετε τη σταθερά c ώστε να επιλύεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(\rho,\varphi)=0,\quad 2<\rho<4,\ 0\le\varphi<2\pi,\\ &\frac{\partial u}{\partial\hat{\eta}}(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=2}=5+\cos 2\varphi,\quad \frac{\partial u}{\partial\hat{\eta}}(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=4}=c,\end{aligned}\right\}\qquad (0,75\mu o\nu.)$$

όπου $\hat{\eta}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο.

Θέμα 4°: Να βρεθεί η μορφή της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(x_1,x_2)=3,\quad (x_1,x_2)\in(0,2)\times(0,4),\\ &u(0,x_2)=u(2,x_2)=0,\quad x_2\in[0,4],\\ &u(x_1,0)=0,\ u(x_1,4)=5x_1^2,\quad x_1\in[0,2].\end{aligned}\right\}\qquad (0,75\mu o\nu.)$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 5^0: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x)+\lambda y(x)=0, \qquad 0<x<\pi, \;\; y(0)=y(\pi)=0.$$

Στη συνέχεια να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος *Fredholm*), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$y''(x)+\Lambda y(x)=-5\sin 3x, \qquad 0<x<\pi, \;\; y(0)=y(\pi)=0,$$

για διάφορες τιμές του $\Lambda\in\mathbb{R}$. (2*μον.*)

Θέμα 6^0: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$\left.\begin{aligned} &w_t(x,t)=w_{xx}(x,t), \quad 0<x<\pi, \;\; t>0,\\ &w(0,t)=w(\pi,t)=0, \;\; t>0,\\ &w(x,0)=x, \;\; 0<x<\pi. \end{aligned}\right\}$$

Στη συνέχεια να λυθεί το πρόβλημα

$$\left.\begin{aligned} &u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+\frac{e^t-2t}{\pi}x+2t, \quad 0<x<\pi, \;\; t>0,\\ &u(0,t)=t^2, \quad u(\pi,t)=e^t, \;\; t>0,\\ &u(x,0)=\frac{x}{\pi}+x, \quad 0<x<\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (2\mu o\nu.)$$

(Υπόδειξη: Να θέσετε $u(x,t)=k(x,t)+w(x,t)$).

Θέμα 7^0: Με χρήση του μετασχηματισμού *Fourier*, να βρεθεί η (τυπική) λύση για το πρόβλημα :

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt}(x,t)=c^2u_{xx}, \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0,\\ &u(x,0)=f(x)=\frac{2\sin x}{1+x^2}, \quad u_t(x,0)=0, \quad -\infty<x<\infty, \end{aligned}\right\} \qquad (1\mu o\nu.)$$

υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί *Fourier*.
Επαληθεύει το αποτέλεσμά σας τον τύπο D' Alembert;

Δίνονται:

1. $\mathcal{F}\{u(x,t)\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{isx}\,dx=\hat{u}(s,t),$
2. $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(s,t)\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(s,t)e^{-isx}\,ds=u(x,t),$
3. $\mathcal{F}\{u_{xx}(x,t)\}=(-is)^2\hat{u}(s,t),$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3,5 ΩΡΕΣ **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**