ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 26/8/2006, ΩΡΑ: 12:00

Θέμα 1°

α) (βαθ. 0,5). Να καταγραφεί το γενικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση του κυκλικού τυμπάνου.

β) (βαθ. 1) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$u_t + cu_x + \lambda u = 0, \quad u(x,0) = f(x),$$

όπου

$$u = u(x,t), \quad c \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0, \quad f \in C^1. \ )$$

Θέμα 2°

α) (βαθ. 1,75). Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(\rho,\varphi) = 5\rho^2 \cos 2\varphi, \quad 1 < \rho < 3, \ 0 \le \varphi < 2\pi \\ &\frac{\partial u(1,\varphi)}{\partial \rho} = 3\sin\varphi + B, \\ &\frac{\partial u(3,\varphi)}{\partial \rho} = 5\cos\varphi, \end{aligned}\right\}.$$

(Δίνεται ο διαφορικός τελεστής Laplace σε πολικές συντεταγμένες:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \ )$$

β) (βαθ. 1,75). Να λυθεί, με χρήση της συνάρτησης Green, το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u(x_1,x_2) = f(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in (-\infty,0)\times(-\infty,+\infty), \\ &u(0,x_2) = g(x_2), \end{aligned}\right\}.$$

(Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον $\mathbb{R}^2$:

$$E(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{x}') = \frac{1}{2\pi}\ln[(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2]^{1/2}.)$$

Θέμα 3° : **(βαθ. 2).**

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 1, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 2, \quad u(\pi,t) = 2\pi, \ t > 0, \\ u(x,0) = -\dfrac{x^2}{2} + 2x, \ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Δώστε μία φυσική ερμηνεία αυτού του προβλήματος, αν $u = u(x,t)$ παριστάνει θερμοκρασία.

Θέμα 4° : **(βαθ. 2).**

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 1 < x < e^{\pi}, \; y'(1) = y(e^{\pi}) = 0.$$

Στη συνέχεια να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \pi y(x) = 1, \quad 1 < x < e^{\pi}, \; y'(1) = y(e^{\pi}) = 0.$$

Θέμα 5° : **(βαθ. 1).**

Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) - u(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = f(x),$$

(υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier).

Δίνονται (να κάνετε χρήση μόνο αυτών των τύπων και να δώσετε τη λύση υπό ολοκληρωτική μορφή):

1. $\mathbf{F}\{u(x,t)\} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{isx}\, dx = \hat{u}(s,t),$
2. $\mathbf{F}^{-1}\{\hat{u}(s,t)\} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s,t) e^{-isx}\, ds = u(x,t),$
3. $\mathbf{F}\{u_{xx}(x,t)\} = (-is)^2 \hat{u}(s,t).$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ