Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης
19 Φεβρουαρίου 2005

Θέμα 1 (α) Έστω

$$A = \{l + \frac{1}{4n+l} : n \in \mathbb{N}, l = 0, 1, 2, 3\}.$$

Βρείτε το $\overline{A}$, τα σημεία συσσώρευσης του $\overline{A}$ και τα μεμονωμένα σημεία του.
(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$A_x = \{(x + \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x \in \mathbb{R}$ ώστε το A_x να είναι κλειστό.
(γ) Θέτουμε

$$A_3 = \{(x, \frac{1}{(x-a)(b-x)}) : a < x < b\}.$$

Δείξτε ότι το A_3 είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^2$.
(δ) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $(x_n)_n, x$ στον X ώστε $x_n \to x$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του συμπαγούς συνόλου δείξτε ότι το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές.

Θέμα 2 (α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Δώστε τον ~~ορισμό των σημείων συσσώρευσης του A~~ και δείξτε ότι αν x σημείο συσσώρευσης του A τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n \subseteq A$ με $x_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \to x$.
(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $(x_n)_n, x$ στον X ώστε για κάθε υπακολουθία $(x_{n_k})_k$ της $(x_n)_n$ υπάρχει περαιτέρω υπακολουθία $(x_{n_{k_l}})_l$ της $(x_{n_k})_k$ με $x_{n_{k_l}} \to x$. Δείξτε ότι $x_n \to x$ [Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε εις άτοπο απαγωγή].
(γ) Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι, $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ και $x_0 \in X$ ώστε για κάθε ακολουθία $(x_n)_n$ στον X με $x_n \to x_0$ υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_k$ της $(x_n)_n$ ώστε $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

Θέμα 3 Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.
(α) Αν $(x_n)_n, (y_n)_n, x$ στον X με $x_n \to x$ και $\rho(x_n, y_n) \to 0$, δείξτε ότι $y_n \to x$.
(β) Αν $A, B \subseteq X$ και

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\} = 0$$

δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n$ στο A και ακολουθία $(y_n)_n$ στο B ώστε $\rho(x_n, y_n) \to 0$.
(γ) Αν $F \subseteq X$ κλειστό, $K \subseteq X$ συμπαγές με $\rho(F, K) = 0$ δείξτε ότι $F \cap K \neq \varnothing$.

Θέμα 4 (α) Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος. Δείξτε ότι αν

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \ldots$$

φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με $diam F_n \to 0$ τότε το $\bigcap_n F_n$ είναι μονοσύνολο.
(β) Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Δείξτε ότι υπάρχει $(F_n)_n$ που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες και $\bigcap_n F_n = \varnothing$.

Θέμα 5 (α) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $(F_i)_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Δείξτε ότι $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \varnothing$.
(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$ συμπαγές.

(1) Δείξτε ότι $diam K < \infty$.

(2) Δείξτε ότι υπάρχουν x_0, y_0 στο K ώστε $diam K = \rho(x_0, y_0)$.

Θέμα 6 (α) Έστω $(f_i)_{i\in I}$ οικογένεια συναρτήσεων του $C[a,b]$. Πότε η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ λέγεται ισοσυνεχής και πότε ομοιόμορφα ισοσυνεχής;

(β) Δείξτε ότι αν $(f_i)_{i\in I}$ είναι ισοσυνεχής είναι και ομοιόμορφα ισοσυνεχής.

(γ) Αν I πεπερασμένο σύνολο, δείξτε ότι η $(f_i)_{i\in I}$ είναι ισοσυνεχής.