ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Θέματα που έχουν πέσει.

1. Στον $L^2[-\pi,\pi]$ με εσωτερικό γινόμενο

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot g dx$$

να βρεθεί η προβολή της συνάρτησης $f(x)=x$ στον υπόχωρο που παράγουν οι τρεις συναρτήσεις $\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x$.

2. Α) Νά υπολογισθεί η $L^2$ - παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=|x^3|$, στο $[-1,1]$.

Β) Να βρεθεί η ασθενής μορφή του μικτού συνοριακού προβλήματος

$$-\Delta u = f, \sigma\tau o\,\Omega$$
$$u=0, \sigma\tau o\,\Gamma_1$$
$$\frac{\partial u}{\partial v}=g, \sigma\tau o\,\Gamma_2$$

(Θεωρείστε το χώρο $V=\{v\in H^1(\Omega)/V=0\,\sigma\tau o\,\Gamma_1\}$, και χρησιμοποιείστε έναν κατάλληλο τύπο Green).

3. Να υπολογισθούν τα στοιχεία $a_{ij}$ και τα δεύτερα μέλη $b_i$ του γραμμικού συστήματος $Ac=b$ που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με n συναρτήσεις βάσης στέγες στο ομογενές πρόβλημα που προκύπτει από το μη ομογενές πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών

$$-u''+xu=0, \sigma\tau o\,(0,1)$$
$$u(0)=0, u(1)=1.$$

Για τα ολοκληρώματα χρησιμοποιείστε τη μέθοδο Simpson, με βήμα h/2, όπου $h=\frac{1}{n+1}$.

4. Να αναχθεί το πρόβλημα

$$u^{(4)} + u = 1, \sigma\tau o\,(0,1),$$
$$u(0) = 0, u(1) = 0$$
$$u'(0) = 1, u(1) = -1$$

στο πρόβλημα

$$v^{(4)} + v = F, \sigma\tau o\,(0,1)$$
$$v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0$$

με κατάλληλη F.

5. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$u'' + u = -x, x \in \Omega = (0,1)$$
$$u(0) = 0, u(1) = 0$$

Να εφαρμοσθεί η μέθοδος Galerkin με συναρτήσεις βάσης

$$\phi_1(x) = x - x^2, \phi_2(x) = x - x^3, \phi_1, \phi_2 \in C^1[0,1].$$

6. Εστω τα 3 σημεία του επιπέδου $A_1(1,0)$, $A_2(0,1)$, $A_3(1,1)$ και οι τρείς γραμμικές συναρτήσεις $\varphi_i(x,y)$, $j=1,2,3$ που ορίζονται από τις σχέσεις

$$\varphi_j(A_i)=1,\ i=j \text{ και } \varphi_j(A_i)=0,\ i \neq j.$$

Να βρεθούν οι αναλυτικές εκφράσεις των $\phi_j$ και $\nabla\phi_j$ και να υπολογισθούν όλα τα ολοκληρώματα

$$\iint_T \nabla\phi_i \nabla\phi_j dxdy,\ T = A_1 \overset{\triangle}{A_2} A_3$$

7. Να δειχθεί ότι σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο, για u σταθερό, η έκφραση $F(v) = (u, v)$ ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό, με νόρμα $\|u\|$.

8. Εστω οι τρείς συναρτήσεις του $L^2(1,2)$

$$u_1(x)=x,\ u_2(x)=x^2,\ u_3(x)=x^3.$$

a) Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $u_1$, $u_2$, $u_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

b) Να υπολογισθεί η προβολή της συνάρτησης $u(x)=1/x$ στον υπόχωρο που παράγουν οι συναρτήσεις $u_1$, $u_2$, $u_3$, δηλ. Να βρεθεί συνάρτηση $\underline{u}$ τέτοια ώστε $(u - \underline{u}, u_i) = 0, \forall i = 1,2,3$